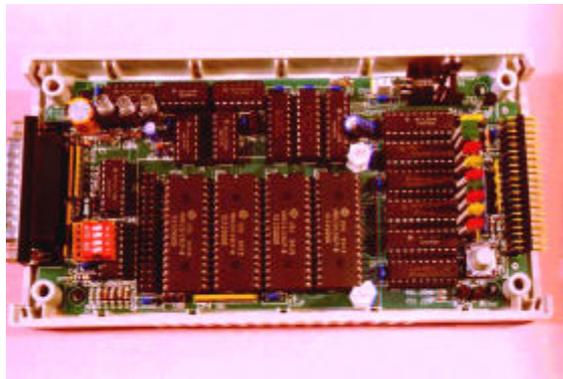


CIRCUITS ELECTRONIQUES II

DGEI 4° AEI

Montages Electroniques à base d'Amplificateurs Opérationnels



Stabilité des systèmes bouclés à base d'AOP

Conversion du signal

CAN et CNA

Techniques de Filtrage analogique

Filtrage passif

Filtrage actif

Filtres à capacités commutées

Janvier 0000

Département de Génie Electrique et Informatique

© JY. FOURNIOLS
jean-yves.fourniols@insa-tlse.fr

Table des Matières

Stabilité des systèmes bouclés à base d'AOP

1. RAPPELS SUR L'AOP.....	4
1.1. RELATION TENSION D'ENTRÉE TENSION DE SORTIE.....	4
1.2. ARCHITECTURE CLASSIQUE D'UN AOP.....	5
1.3. QUELQUES GRANDEURS PHYSIQUES.....	6
1.4. DISTORSION NON LINÉAIRE DU SIGNAL DE SORTIE.....	6
2. STABILITÉ D'UN SYSTÈME BOUCLÉ À BASE D'AOP	8
2.1. CONDITIONS DE STABILITÉ (RAPPELS).....	8
2.2. STABILITÉ D'UN AOP EN BOUCLE OUVERTE.....	8
2.3. STABILITÉ D'UN AOP EN BOUCLE FERMÉE.....	8
3. ETUDE DE LA STABILITÉ D'UN AOP EN BOUCLE FERMÉE PAR LE CRITÈRE DE CAUCHY.	9
3.1. APPLICATION DU THÉORÈME DE NYQUIST.	10

Conversion du signal

1 CONVERSION ANALOGIQUE-NUMÉRIQUE	12
1.1 INTRODUCTION	12
1.2 RESTITUTION D'UN SIGNAL INITIAL APRÈS ÉCHANTILLONNAGE.....	12
1.3 RESTITUTION D'UN SIGNAL INITIAL APRÈS ÉCHANTILLONNAGE ET BLOCAGE D'UN SIGNAL	13
2 CONVERSION NUMÉRIQUE-ANALOGIQUE	14
2.1 CNA À SOMMATION DE COURANTS, À RÉISTANCES PONDÉRÉES (C.N.A PARALLÈLE)	14
2.1.1 Utilisation du CNA à sommation de courants.....	15
2.2 CNA À SOMMATION DE COURANTS, À ÉCHELLE RÉISTIVES (C.N.A PARALLÈLE).....	16
2.3 CNA À TRANSFERT DE CHARGES (C.N.A SÉRIE)	18
2.3.1 Principe du transfert de charges.....	19
2.3.2 C.N.A série à transfert de charges	19
2.3.3 Réalisation d'un C.N.A série à transfert de charges.....	20
3 CONVERSION NUMÉRIQUE-ANALOGIQUE	22
3.1 CONVERSION ANALOGIQUE NUMÉRIQUE À CONVERSION SIMULTANÉE (FLASH).....	22
3.2 CONVERSION ANALOGIQUE NUMÉRIQUE À RAMPE NUMÉRIQUE À 4 BITS	24

Techniques de Filtrage analogique

4. GÉNÉRALITÉS SUR LES FILTRES	26
4.1. DÉFINITIONS, TYPES DE FILTRES	26
4.2. CLASSIFICATION DES FILTRES	27
4.3. TEMPS DE PROPAGATION DE GROUPE D'UN FILTRE	27

5.	SYNTHÈSE DE FILTRES PASSIFS.....	27
5.1.	PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS IMMITANCES (ADMITTANCE ET IMPÉDANCE)	27
5.2.	PROPRIÉTÉS DES DIPÔLES LC ET RC.....	28
5.2.1.	<i>Dipôles LC</i>	28
5.2.2.	<i>Dipôles RC</i>	28
5.3.	SYNTHÈSE DE DIPÔLES LC : MÉTHODE DE CAUER	29
5.4.	SYNTHÈSE DE DIPÔLES RC :	30
5.4.1.	<i>Dipôle série</i> :	30
5.4.2.	<i>Foster parallèle</i> :.....	30
6.	NORMALISATION, TRANSFORMATION DE FILTRES PASSIFS	31
6.1.	GABARIT D'UN FILTRE RÉEL	31
6.2.	SÉLECTIVITÉ D'UN FILTRE RÉEL.....	32
7.	FILTRE PROTOTYPE, NORMALISATIONS.....	32
7.1.	NORMALISATION DE L'UNITÉ FRÉQUENCE	32
7.2.	NORMALISATION DE L'UNITÉ D'IMPÉDANCE.....	33
7.3.	TRANSFORMATION D'UN CIRCUIT PASSE-BAS EN CIRCUIT PASSE-HAUT	33
7.4.	TRANSFORMATION D'UN CIRCUIT PASSE-BAS EN CIRCUIT PASSE-BANDE	34
7.5.	TRANSFORMATION D'UN CIRCUIT PASSE-BAS EN CIRCUIT PASSE-BANDE	35
8.	FONCTIONS DE TRANSFERT DES FILTRES	37
8.1.	FONCTIONS DE TRANSFERT DES FILTRES D'AFFAIBLISSEMENT.....	37
8.2.	FONCTIONS DE TRANSFERT DES FILTRES ANALYTIQUES.....	38
8.2.1.	<i>Filtre de Butterworth</i>	38
8.2.2.	<i>Filtre de Tchebycheff</i>	40
8.2.3.	<i>Filtres de Legendre, de Cauer, de Bessel, de Paynter</i>	41
9.	RÉALISATION DE FILTRES ACTIFS	47
9.1.	INTRODUCTION	47
9.2.	CRÉATION D'UNE « INDUCTANCE ÉQUIVALENTE ».....	47
9.2.1.	<i>A partir d'un convertisseur d'impédance généralisé (GIC)</i>	47
9.2.2.	<i>SELF obtenue à partir d'un gyrateur</i>	49
9.3.	RAPPEL SUR LES SENSIBILITÉS DES FILTRES ACTIFS	51
9.4.	SYNTHÈSE DE FILTRES ACTIFS PAR DIFFÉRENTES MÉTHODES	52
9.4.1.	<i>Synthèse en cascade</i>	52
9.4.2.	<i>Synthèses globales</i>	52
9.5.	BLOCS DE BASE DES FILTRES CASCADÉS	53
9.5.1.	<i>Cellule du premier ordre</i> :.....	53
9.5.2.	<i>Cellule du second ordre</i> :	54
9.5.3.	<i>Principe des filtres à variable d'état</i> :.....	57
9.6.	RÉALISATION DE FILTRES ACTIFS COMPLEXES	61
9.6.1.	<i>Filtre passe-bas Tchebycheff ordre 5</i> :.....	61
9.6.2.	<i>Implémentation sur silicium d'un filtre LC avec des FDNR</i> :	62
9.6.3.	<i>Synthèse « leap-frog » d'un filtre LC</i> :	62
10.	FILTRES À CAPACITÉS COMMUTÉES.....	64
10.1.	INTÉGRATEUR À CAPACITÉS COMMUTÉES	65
10.2.	RÉALISATION TECHNOLOGIQUE DES INTERRUPTEURS	65
10.3.	TRANSFORMATION MONTAGES INTÉGRATEURS, EN FILTRES À CAPACITÉS COMMUTÉES	67

Ce document a été conçu avec l'objectif de présenter (de manière non exhaustive) la mise en œuvre matérielle de fonctions de transfert conduisant à la réalisation de filtres analogiques.

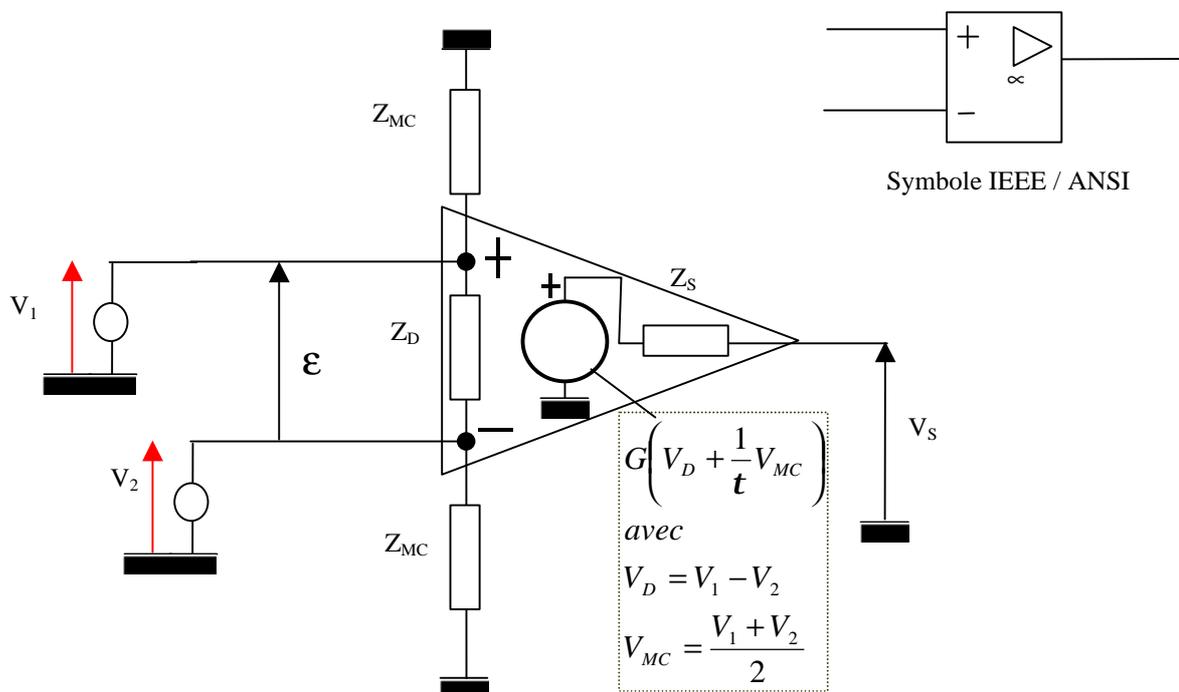
Un des éléments de base du filtrage « analogique » est l'Amplificateur Opérationnel (AOP) pour lequel des rappels effectués, certains critères « électroniques » de stabilité en boucle fermée vont être étudiés.

La seconde partie du document, présentera les techniques permettant de réaliser un filtre « analogique » à partir de son gabarit. Nous terminerons la présentation des méthodes de synthèse de filtres actifs, par la présentation du principe des filtres à capacités commutées.

Partie I : Stabilité des montages bouclés à base d'AOP

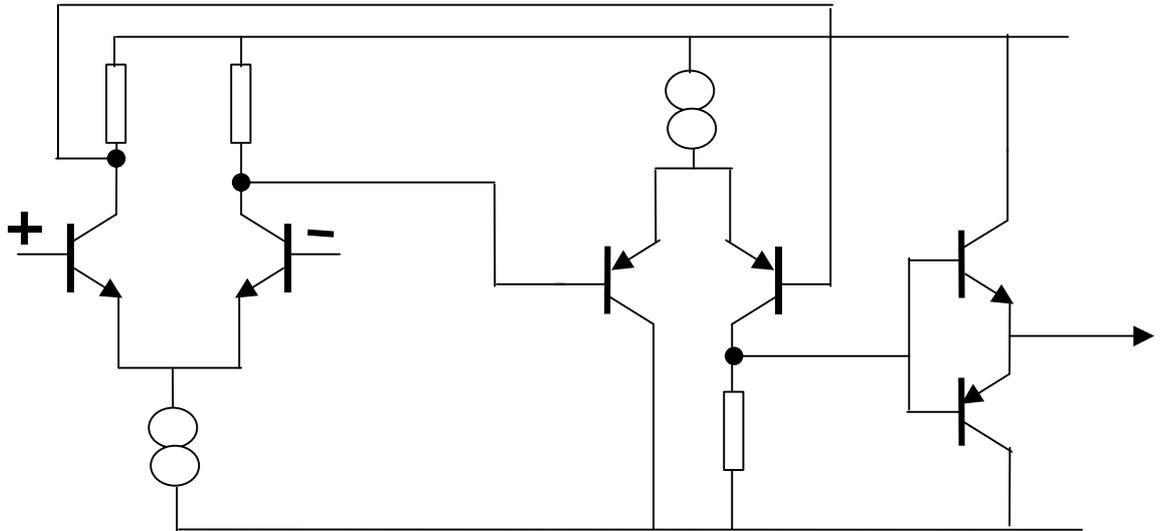
1. Rappels sur l'AOP

1.1. Relation tension d'entrée tension de sortie

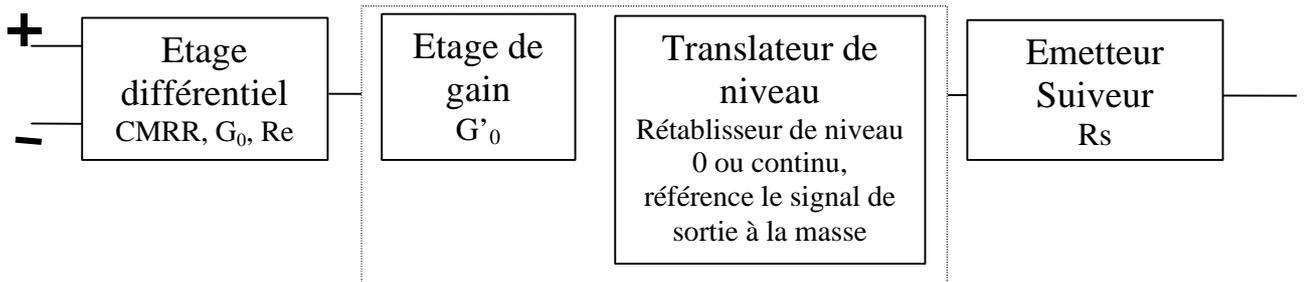


V_D tension d'entrée de mode différentiel, V_{MC} tension de mode commun.

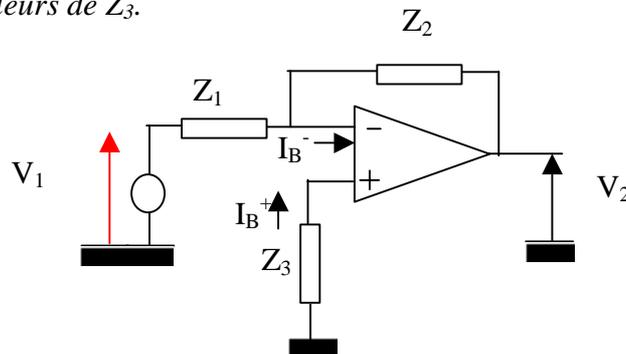
1.2. Architecture classique d'un AOP



Structure à deux étages d'un AOP (exemple du 741)



Tout transistor Bipolaire nécessite un courant de polarisation de la base, noté I_B . Démontrer l'influence du courant $dI = I_B^+ - I_B^-$ appelé « courant d'offset » sur la tension de sortie dans le cas du montage « classique » suivant, où l'AOP est supposé parfait. Discuter selon les valeurs de Z_3 .



... On démontre ainsi que pour diminuer l'influence du courant de polarisation moyen noté I et défini par :

$$I_B^+ = I + \frac{dI}{2}$$

$$I_B^- = I - \frac{dI}{2}$$

il faudra assurer que les entrées **In⁺ et In⁻ soient connectées sur des circuits d'impédances égales.**

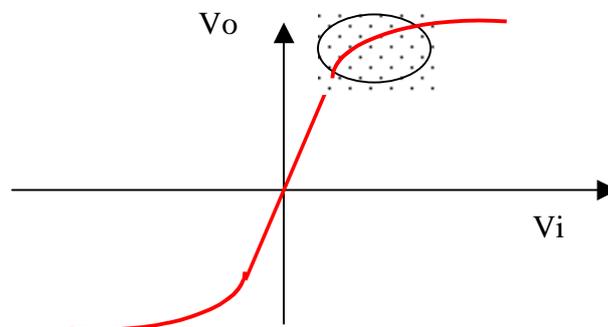
Remarque : On pourrait également conduire la même étude sur la tension de décalage liée aux tensions de base différentes sur l'entrée de l'étage différentiel.

1.3. Quelques grandeurs physiques

	Cas Idéal	Cas Réel (valeurs typiques)
Gain en Boucle Ouverte	∞	$\geq 10^4$
Bande Passante en Boucle Ouverte	∞	3 pôles (pôle dominant à 10 Hz)
Taux de réjection Mode Commun (Common Mode Rejection Rate)	∞	> 70 dB
Re	∞	$\geq 10M\Omega$
Rs	0	$< 500\Omega$
Ie	0	$< 0.5\mu A$
V et I décalage	0	$< 10mV$ $< 0.2nA$

1.4. Distorsion non linéaire du signal de sortie

Lorsqu'on applique un « grand signal »; la non linéarité de la caractéristique interne de l'AOP, va se répercuter sur le signal de sortie.



Si on prend comme approximation de la zone de non linéarité, que la tension de sortie V_o varie en fonction de V_i^2 (ou selon un polynôme de degré ≥ 2), quel que soit le type de signal en entrée pour V_i (sinusoïdal à fréquence pure ou décomposition en série de Fourier) on aura, soit pour la fréquence fondamentale, soit pour un harmonique n la relation :

$$\sin^2 w_i t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2w_i t$$

Ce qui implique que la sortie va contenir un second harmonique.

On mesure cette distorsion par le taux de distorsion non-linéaire, noté k et défini par la relation :

$$k = \frac{Vin_H}{Vin_1} = \frac{\sqrt{Vin_2^2 + Vin_3^2 + \dots + Vin_n^2 + \dots}}{Vin_1} t$$

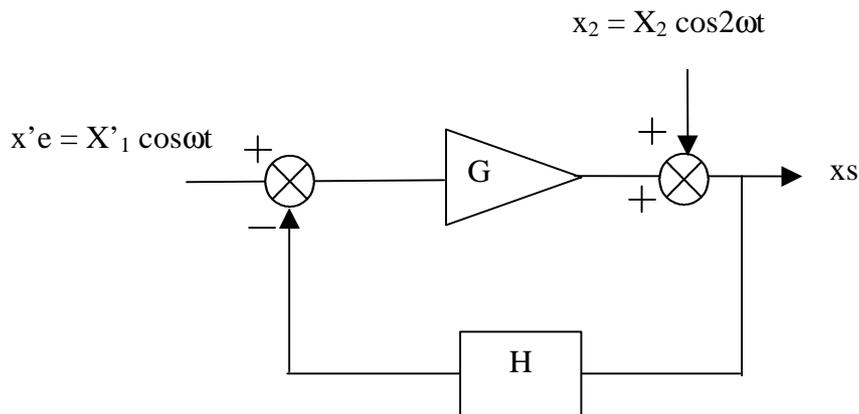
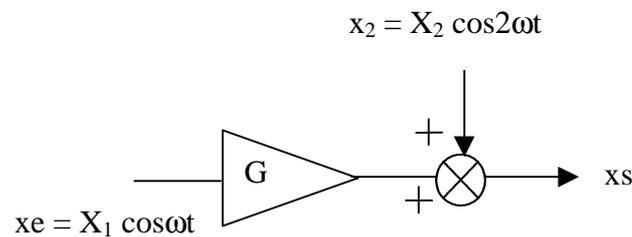
où : Vin_i est l'harmonique de rang i .



Evolution de la distorsion en boucle fermée :

On considère le montage en boucle ouverte suivant :

- * Calculer k en boucle ouverte
- * Calculer k en boucle fermée avec x' tel que x_s conserve la même amplitude qu'en boucle ouverte afin d'assurer que x_2 reste le même.



On démontre ainsi que $k_{Bf} = \frac{k_{Bo}}{1 + GH}$.

2. Stabilité d'un système bouclé à base d'AOP

2.1. Conditions de stabilité (Rappels)

Un système est stable si :

- il retourne vers son état d'équilibre lorsqu'il en est écarté,
ou encore
- la réponse à une perturbation transitoire de durée finie s'évanouit,
ou encore plus mathématiquement
- tous les signaux d'entrée bornés [x(t) est borné si |x(t)| ≤ Cste ∀t] produisent des signaux de sortie bornés

$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ est stable si tous les pôles de F(p) [qui en fait sont les racines de D(p)] sont

négatifs ou complexes conjugués à partie réelle négative. (Cela provient de la décomposition de F(p) en éléments simples qui par transformée inverse de Laplace donnera une somme d'exponentielles dont les termes convergent ou pas)

2.2. Stabilité d'un AOP en boucle ouverte

La fonction de transfert « classique » d'un AOP fait apparaître 3 pôles. Elle s'écrira :

$$G(p) = \frac{G_0}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}$$

d'où $D(p) = (1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + 1$ avec A, B, C >0, polynôme dont les 3 racines sont < 0.

⇒ A la mise sous tension, ($\varepsilon=0$ et V_{s0} non nul), le réponse du système est une somme d'exponentielles à exposant <0, qui tendent vers 0.

Un AOP en boucle ouverte en donc un système STABLE, il s'en suit que **le nombre de pôles positifs de la fonction de transfert de G(p) en boucle ouverte est toujours NUL**. Cette remarque prendra de l'importance lors de l'étude de la stabilité d'un système bouclé par le critère de Nyquist.

2.3. Stabilité d'un AOP en boucle fermée

La stabilité d'un système bouclé de fonction de transfert g(p), définie par :

$$g(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$$

avec

$$G(p) = \frac{G_0}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}$$

est donc déterminée par la nature des racines de son **dénominateur D(p)** dont l'appellation est généralement **équation caractéristique du système**.

Pour déterminer si le système est stable, on va résoudre l'équation caractéristique $D(p)=1+G(p)H(p)=0$ ou bien encore avoir recours à des critères algébriques ou graphiques.

La complexité des systèmes va souvent orienter l'étude vers la résolution par des critères graphiques, où on effectue l'étude $G(p)H(p)$ d'après le :

- critère du revers, (Nyquist, le lieu devant passer à droite du point -1 , appelé point critique dans le plan de Nyquist)
- tracé dans le plan de Bode (marge de gain (≥ 0 dB) et marge de phase ($\geq 45^\circ$) pour $f=f_T$).
- critère de Nyquist, issu du théorème de Cauchy.

3. Etude de la stabilité d'un AOP en boucle fermée par le critère de Cauchy.

Si on considère la fonction de transfert en boucle fermée $g(p)$, avec $g(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$, la stabilité du système dépend du nombre de pôles éventuellement positifs de $g(p)$; pôles qui en fait sont les racines de l'équation caractéristique $1+G(p)H(p)=0$.

Si il semble relativement facile de mettre le gain en boucle $G(p)H(p)$ sous la

forme $G(p)H(p) = \frac{\prod_i (p - z_i)}{\prod_j (p - p_j)}$ en déterminant les pôles et zéros, les racines de l'équation

caractéristique ne pourront pas se déduire facilement.

Par contre le théorème de Cauchy, peut permettre d'identifier le nombre de pôles et zéros.

Théorème de Cauchy :

Lorsqu'un point A d'affixe p , décrit un contour fermé C , la variation de phase correspondante d'une fonction analytique $F(p)$ est égale à la différence entre le nombre de pôles et le nombre de zéros de $F(p)$ situés à l'intérieur du contour C .

Dans notre cas, le contour C correspond à la variation de p , soit à l'union entre l'axe imaginaire (privé de l'origine) et un cercle de rayon infini situé dans le demi plan complexe droit.

Application du théorème de Cauchy :

Si $(1+G(p)H(p))$ a des pôles et des zéros positifs, le lieu T entourera $N = P - Z$ fois l'origine. Or les pôles de $1 + G(p)H(p)$ sont identiques à ceux de $G(p)H(p)$, il s'en suit que si $H(p)$ n'introduit pas de pôles à partie réelle positive, $G(p)$ étant toujours stable en boucle ouverte, on aura $P = 0$.

On déduira donc que le nombre de tours N est égal au nombre de zéros positifs de $1+G(p)H(p)$, qui correspondent aux pôles positifs de $g(p)$.

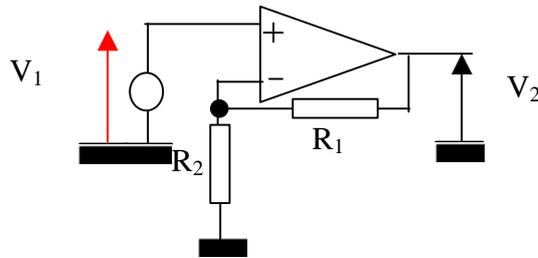
Remarque :

Déterminer le nombre de tours de $1+G(p)H(p)$ autour de l'origine, revient à déterminer le nombre de tours dans le plan de Nyquist de $G(p)H(p)$ autour du point « -1 ».

La stabilité sera donc parfaitement déterminée par le nombre de tours du lieu de Nyquist du gain de boucle $G(p)H(p)$ autour du point « -1 ».

3.1. Application du théorème de Nyquist.

On considère le montage suivant pour lequel on effectue une contre réaction en tension.



Avec :

$$H(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = H$$

$$G(p) = \frac{G_0}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}$$

On a donc :

$$g(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)}$$

avec

$$G(p)H(p) = \frac{G_0 H}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}$$

On construit le Lieu de Nyquist du gain de chaîne directe :

$$G(w)H(w) = \frac{G_0 H}{Ap^3 + Bp^2 + Cp + 1} = \frac{G_0 H}{(1 - Bw^2) + jw(C - Aw^2)} = \frac{G_0 H}{R(w) + jI(w)}$$



Etude de la stabilité en boucle fermée :

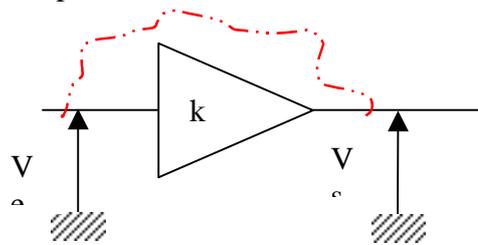
Effectuer le tracé du lieu de Nyquist, en déduire les relations assurant la stabilité du système. Dans le cas où on sera en oscillation, donner la valeur de la fréquence d'oscillation du système.



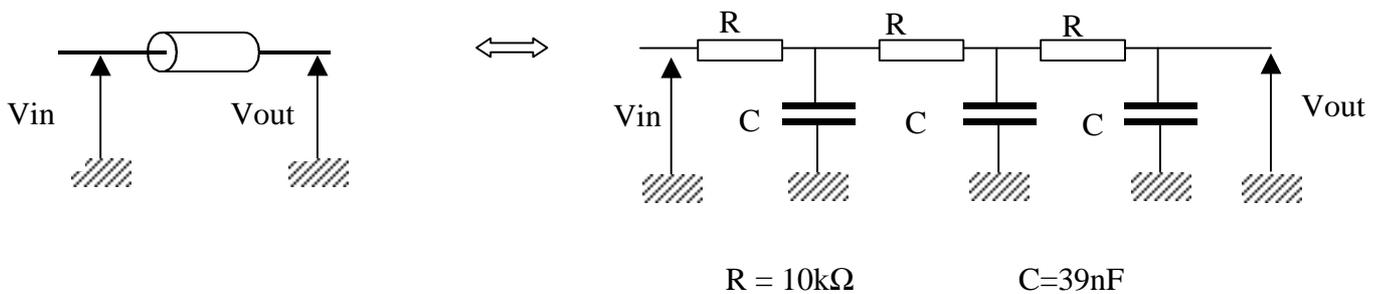
Exercice TD :

On considère l'étude d'un système bouclé, pour lequel l'Amplificateur opérationnel utilisé est supposé parfait.

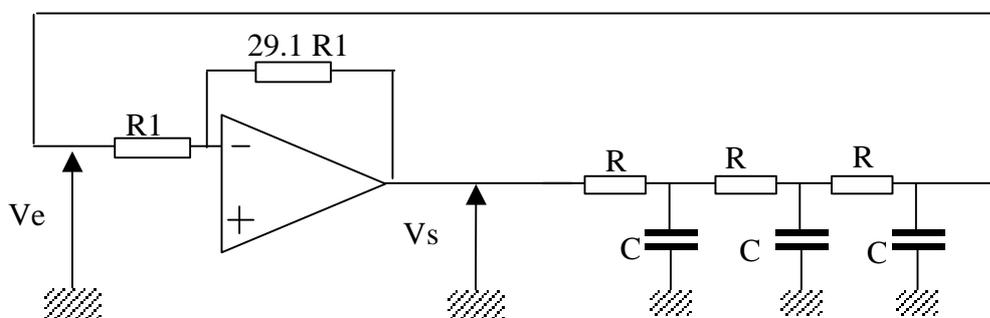
Le montage présenté Figure 1 correspond à un AOP en boucle fermée de gain k ($k \in \mathfrak{R}$).



On reboucle la sortie V_s sur l'entrée V_e , à l'aide d'un fil, dont le schéma électrique équivalent est donné ci-après :



- 1./ Calculer la fonction de transfert $T(p) = V_{out}(p)/V_{in}(p)$ de la "cellule à retard".
- 2./ Tracer le lieu de Nyquist de la cellule $T(p)$.
- 3./ Déterminer suivant le signe et la valeur numérique de k (qui est le gain en boucle fermée de l'AOP), le comportement du montage.
- 4./ On considère le montage suivant:



Déterminer la valeur de l'amplitude V_E du signal $V_e(t)$ (pris de la forme $V_e(t) = V_E \sin \omega t$)

Partie II : Conversion du signal

1 Conversion analogique-numérique

1.1 Introduction

La conversion analogique numérique (CAN) fait correspondre à un signal ANALOGIQUE d'entrée $V_e(t)$ une suite de nombres $\{V_k\}$ codés sous forme binaire. Chaque nombre binaire, correspond à l'amplitude V_k du signal $V_e(t)$ prise à l'instant k . Chaque valeur, appelée échantillon, est prise à intervalle de temps régulier, de largeur T_e . Cet intervalle de temps T_e est communément nommé, période d'échantillonnage.

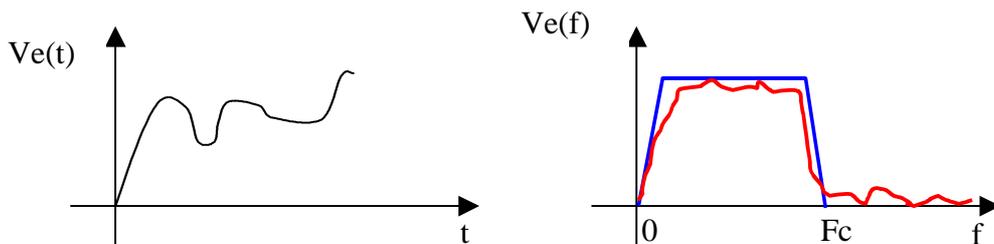
On distingue donc 3 phases dans le fonctionnement du système :

- la phase d'échantillonnage,
- la phase de mémorisation, nécessaire étant donnée que la transcription en binaire nécessite une certaine durée,
- la phase de codage.

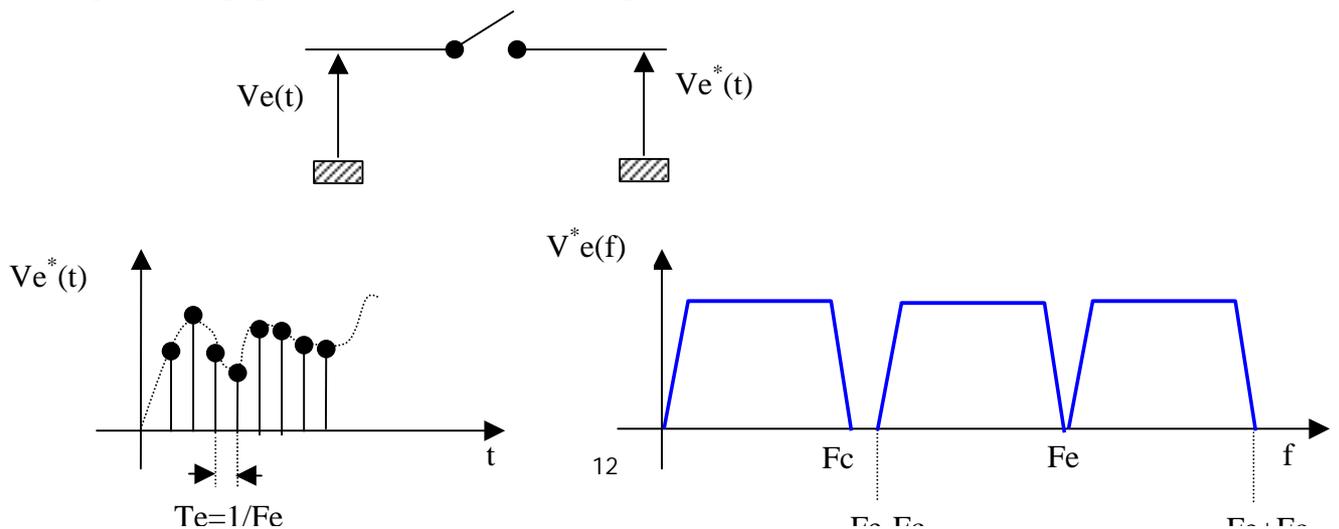
1.2 Restitution d'un signal initial après échantillonnage

L'échantillonnage d'un signal, modifie son spectre en le répétant à l'infini sur l'axe des fréquences.

Exemple : (représentation spectrale limitée aux fréquences positives)



Si ce signal analogique est échantillonné à la fréquence F_e :



On ne pourra reconstituer le signal $V_e(t)$ que s'il n'y a pas de recouvrement entre les spectres, soit :

$$\boxed{F_c < F_e - F_c \quad \Rightarrow \quad F_e > 2F_c} \quad (\text{Théorème de Shannon})$$

Pour reconstituer le spectre du signal analogique (dont la représentation spectrale est rarement bornée en fréquence), il faudra caler un filtre passe-bas entre F_c et $F_e - F_c$, ce filtre qui doit obligatoirement être de type analogique est appelé : **filtre anti-repliement**.

1.3 Restitution d'un signal initial après échantillonnage et blocage d'un signal

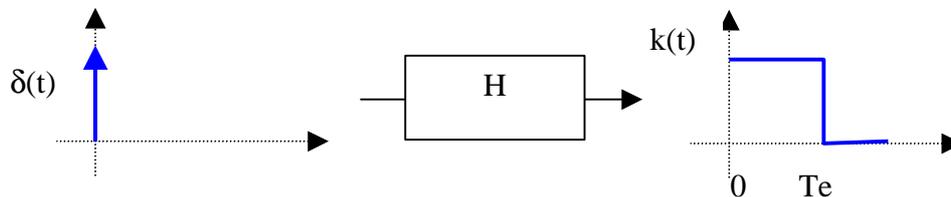


Donner les sources de problème (ou les limitations) dans le principe du système de conversion présenté ci-dessus

...

Dans l'utilisation des C.A.N la durée τ du blocage est égale à la période d'échantillonnage T_e .

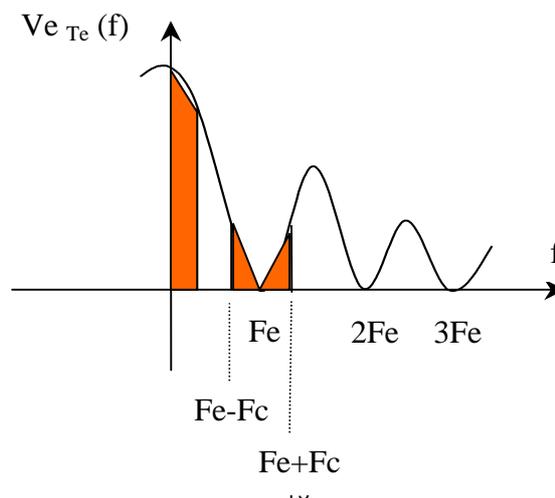
(Tout se passe comme si le signal échantillonné $V_e^*(t)$ traversait un système de transmittance H telle que la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$ soit un signal rectangulaire de largeur (durée) T_e .



La transformée de Fourier de $k(t)$, réponse du système à $\delta(t)$, $H(f)$ est définie par la relation :

$$H(f) = T_e \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e}$$

Le spectre du signal échantillonné et bloqué devient alors :



La déformation du spectre de $V_e(t)$ est due au facteur $\frac{\sin pfT_e}{pfT_e}$.



Comment minimiser cette déformation du spectre?

...

2 Conversion numérique-analogique

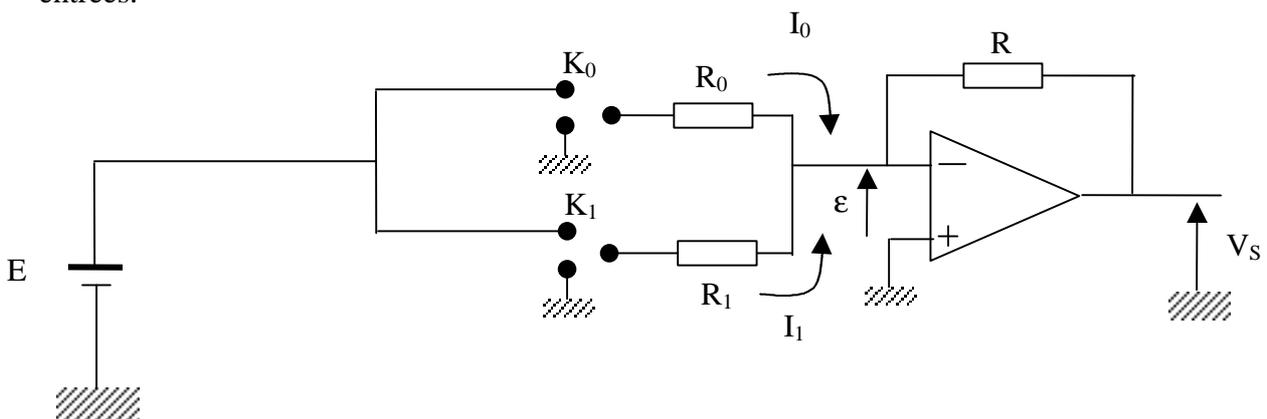
Un CNA peut par exemple constituer l'interface de sortie d'un ordinateur (port parallèle), pour restituer une grandeur analogique propre à agir sur un système de commande (capteur ou actionneur analogiques, ou plus simplement haut-parleur).

Il doit donc associer à un code numérique (nombre binaire codé sur N digits) arrivant sur ses entrées, une tension (ou un courant) analogique d'amplitude *le plus souvent* proportionnelle à ce nombre binaire.

Un CNA (Digital Analog Converter) est un élément d'une chaîne de traitement du signal qui transforme un nombre N, codé sur k digits, présentés en parallèle sur les entrées du CNA, en tension (ou courant) proportionnelle à N.

2.1 CNA à sommation de courants, à résistances pondérées (C.N.A parallèle)

Ce dispositif est réalisé sur le principe d'un montage amplificateur inverseur à plusieurs entrées.



Etude du montage CNA à sommation de courants en fonction de la position des interrupteurs :

...

Si on choisit $R_1 = R_0/2$, alors on obtient :

$$V_S = -\frac{R}{R_0} E \sum_{i=0}^3 k_i 2^i$$

avec
 $k_i = 0$ ou 1

On peut ainsi augmenter le nombre de digits du C.N.A en augmentant son nombre d'entrées parallèles.

Pour $n=2$, on a $2^2 = 4$ configurations pour les interrupteurs, 3 intervalles de tension, 2 valeurs de résistances, R_0 et $R_1 = R_0/2$.

L'incrément proportionnel (**pas de conversion**) de tension analogique en sortie est égal à $\frac{V_{SM}}{2^{n-1}}$.

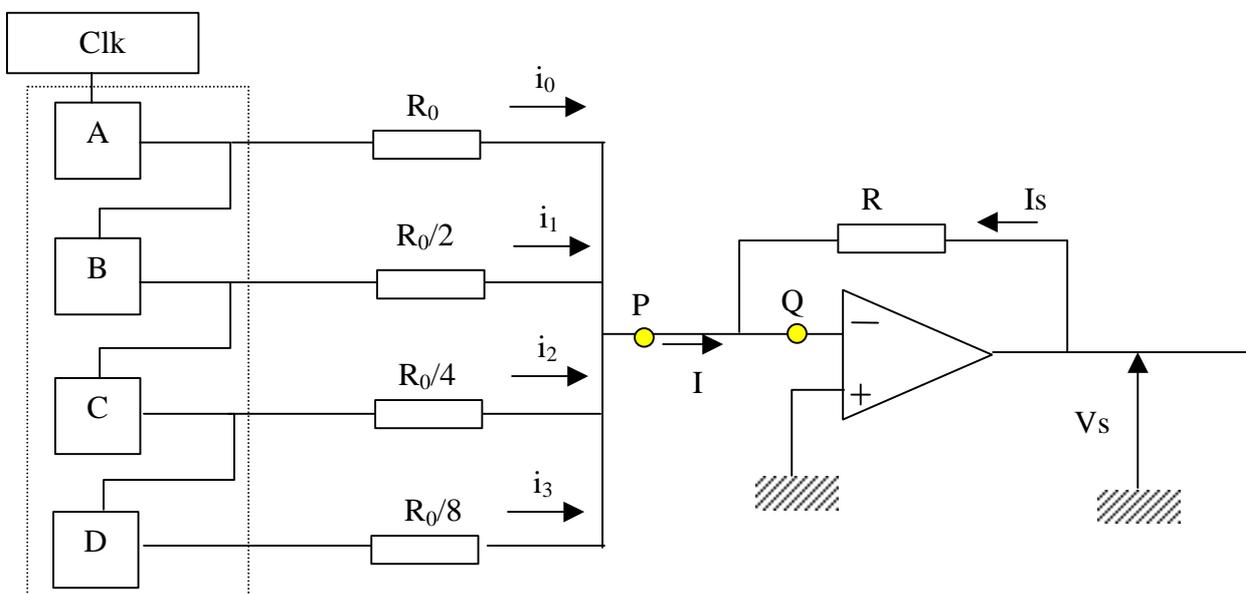
2.1.1 Utilisation du CNA à sommation de courants

Les paires « source E – commutateur K » sont en fait les sorties de bascules bistables pouvant correspondre :

- à la sortie d'un compteur dans le cas de la génération de rampes numériques,
- à la sortie d'un registre parallèle branché sur le bus de données d'un micro-contrôleur afin de commander un actionneur.

Exemple : CAN à sommation de courants : Conversion Numérique Analogique à rampe numérique

Ce système utilise les propriétés de sommation de courant d'un AOP bouclé en « montage inverseur » (contre-réaction).



...

Avantages du Système :

- Conception simple.

Inconvénients :

- Il apparaît lorsque le nombre de digits augmente, dans les valeurs extrêmes des résistances :
 - R_{min} (courant consommé trop important)
 - R_{max} (comparable à Z_d de l'AOP)
- Il apparaît clairement lorsque le nombre de digits augmente, et réside dans la difficulté à fabriquer des résistances précises.



On souhaite que l'erreur due à la tolérance des résistances ne dépasse pas $\frac{1}{2}$ du LSB ; pour un système 8 bits, donner la tolérance requise pour les résistances constituant le système.

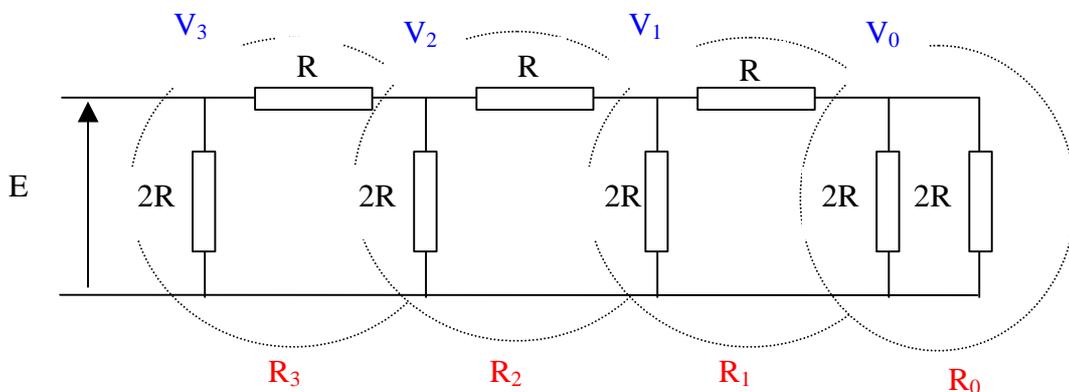
...

On démontre ainsi que pour 8 bits, la tolérance des résistances doit être de 0,2% (Résistances « chères »)

2.2 CNA à sommation de courants, à échelle résistives (C.N.A parallèle)

Les CNA à échelle n'utilisent que 2 valeurs de résistances, l'une étant le double de l'autre.

Ce réseau ($R ; 2R$) est constitué de *cellules élémentaires*, qui quels que soit leur position, ont pour propriété de présenter la même résistance d'entrée.



Calculer les tensions V_0, V_1, V_2, V_3 .

D'où :

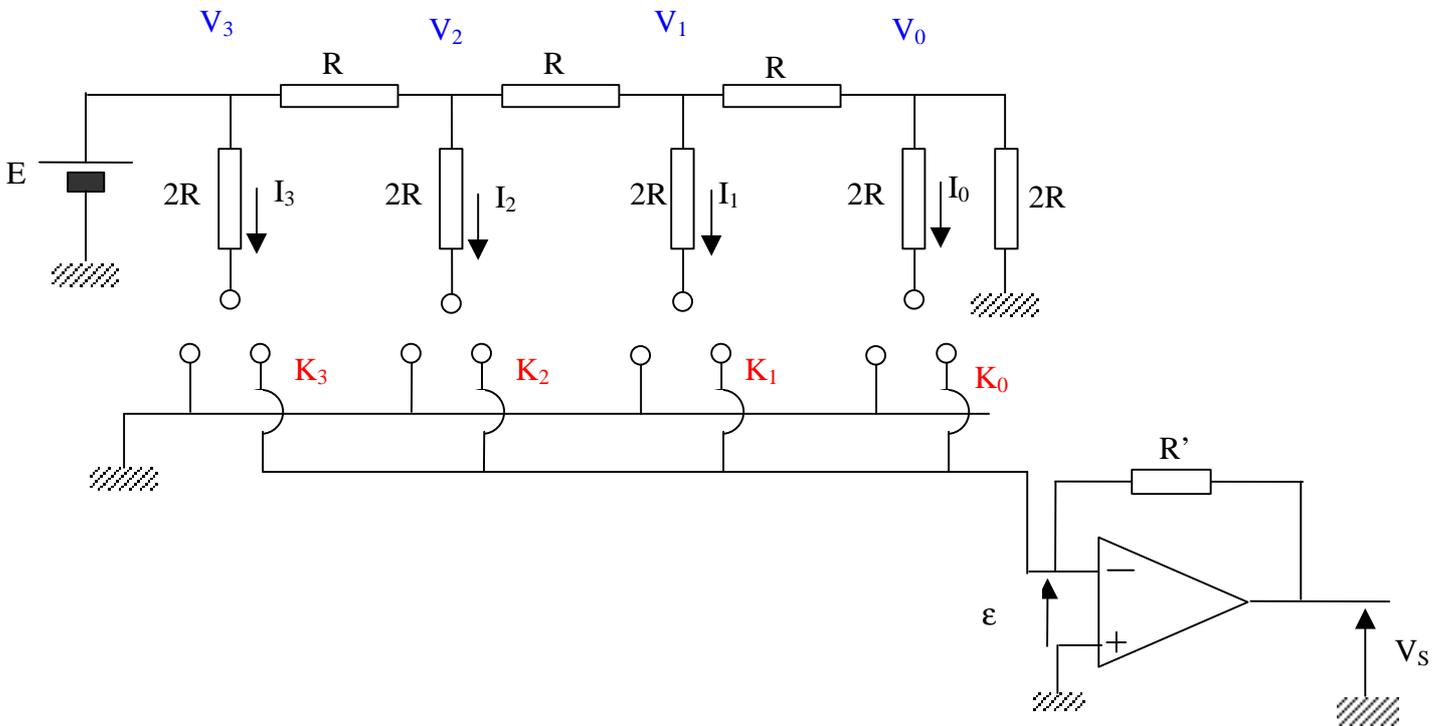
$$V_3 = E$$

$$V_2 = \frac{E}{2}$$

$$V_1 = \frac{E}{4}$$

$$V_0 = \frac{E}{8}$$

Cette propriété de division numérique des tensions est utilisée dans le CNA à sommation de courants dont une représentation schématique est donnée ci-contre :



$$V_S = -R' I$$

pour

$$I = k_3 I_3 + k_2 I_2 + k_1 I_1 + k_0 I_0$$

et

$$I_3 = \frac{V_3}{2R} = \frac{E}{2R}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{2R} = \frac{E}{2R} \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{2R} = \frac{E}{2R} \frac{1}{4}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{2R} = \frac{E}{2R} \frac{1}{8}$$

$$V_S = -R' \left[k_3 \frac{E}{2R} + k_2 \frac{E}{2R} \frac{1}{2} + k_1 \frac{E}{2R} \frac{1}{4} + k_0 \frac{E}{2R} \frac{1}{8} \right]$$

$$= -\frac{R'E}{2R} \sum_{i=0}^3 k_i 2^i$$

avec
 $k_i = 0$ ou 1

On a donc :

$$V_{S_{MIN}} = 0$$

$$V_{S_1} = -\frac{R'E}{2R} \frac{1}{2^3} \text{ (quantum)}$$

$$V_{S_{15}} = -\frac{R'E}{2R} \frac{15}{2^3}$$

2.3 CNA à transfert de charges (C.N.A série)

Les deux C.N.A présentés ci-dessus étaient à entrées parallèles ; on avait donc chaque digit, de chaque mot à convertir qui était présenté sur l'entrée correspondant à sa position dans le mot (LSB ... MSB).

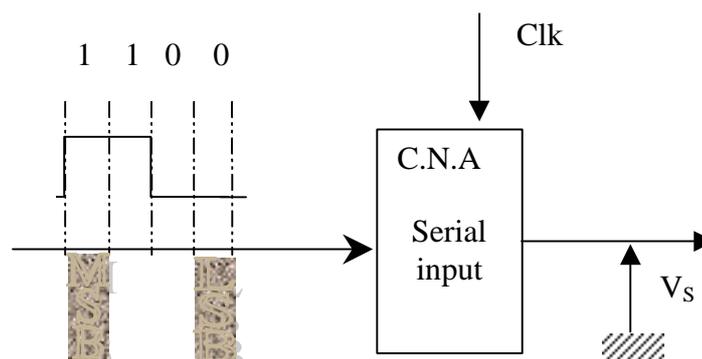
Ce type de transmission parallèle est utilisée uniquement sur de courtes distances (8 lignes pour 1 octet), et devient très vite lourde à mettre en œuvre.

Si on a une transmission série (1 seul fil) il est possible :

- soit de « paralléliser » les entrées à l'aide de composants spécifiques (UART), et d'utiliser un C.N.A tel que présenté précédemment, au risque de pénaliser le système en terme de vitesse de conversion (délai pour le passage série/parallèle)
- soit d'utiliser un C.N.A série, dont nous allons présenter le principe de fonctionnement.

Exemple :

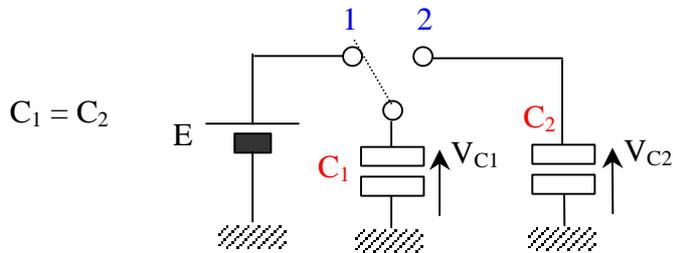
Soit une transmission série de 4 bits, représentant le nombre 12.



Le système synchronisé sur une horloge, doit être en mesure de détecter :

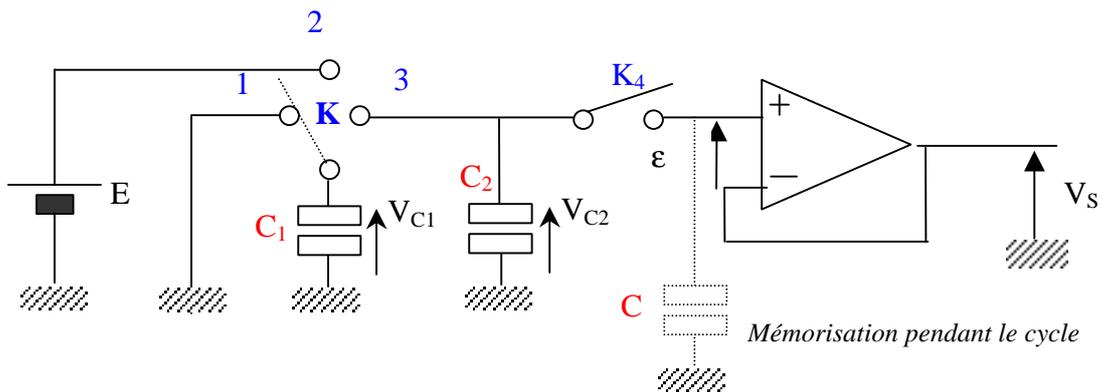
- la présence du LSB du mot à convertir (start Bit),
- et aussi (dans certains cas) la fin de la séquence (Stop Bit).

2.3.1 Principe du transfert de charges



...

2.3.2 C.N.A série à transfert de charges



Rotation de K par cycles, un cycle = K en position 1 puis 2 puis 3

Cycle	K en 1	K en 2	K en 3
1	...		
2			
3			
4			...

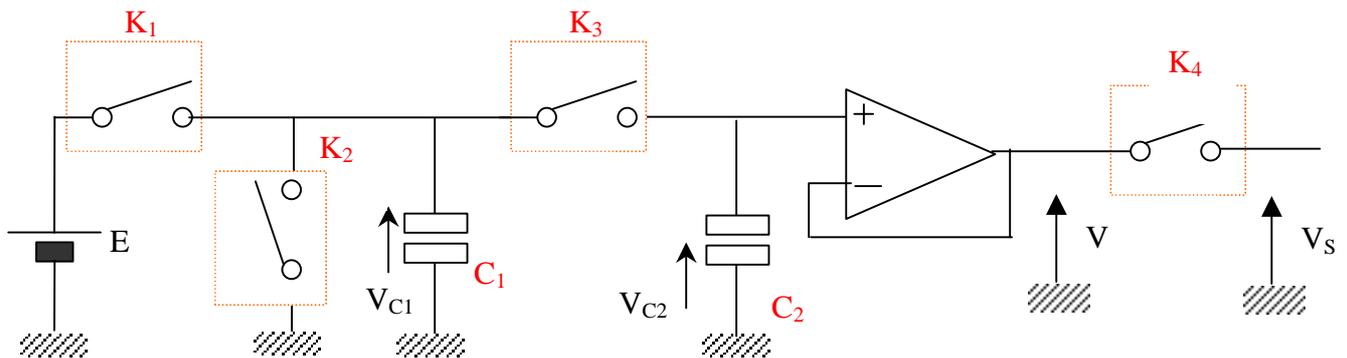
On constate donc, que pour un cycle de K , V_{C2} a une valeur proportionnelle au nombre N maximum qui peut être codé sur le nombre de bits correspondant au nombre de cycles.

Exemple :

Pour 3 cycles, soit $n = 3$ bits, on a le nombre décimal maxi codé sur 3 bits, qui est 7 (1 1 1) pour $2^n = 8$ positions.

On observe également que suivant que l'on veut obtenir une tension proportionnelle au maximum du nombre N de 1, 2, 3, 4 bits ; il suffit de fermer l'interrupteur $K4$ en fin du cycle 1, 2, 3 ou 4.

2.3.3 Réalisation d'un C.N.A série à transfert de charges



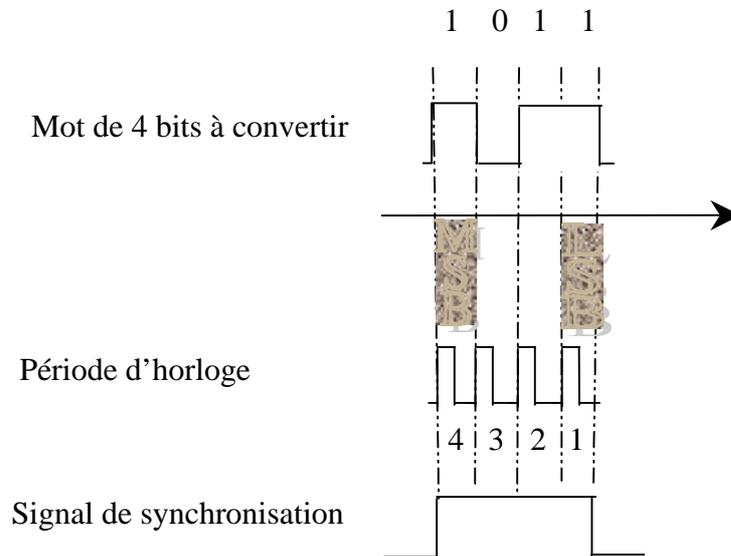
Chaque interrupteur est actionné par des systèmes logiques combinatoires (que nous définirons plus tard) commandés par le mot à convertir et synchronisés par le signal d'horloge.

Le principe de fonctionnement est le suivant pour chaque bit du mot commençant par le LSB :

- à chaque demi-période d'horloge, C_1 est chargé :
 - A travers $K1$ à la tension E si le bit à convertir vaut 1.
 - A travers $K2$ à la tension 0 si le bit à convertir vaut 0.
- à chaque $2^{\text{ème}}$ demi-période d'horloge, $K1$ et $K2$ sont ouverts et $K3$ est fermé ce qui provoque le transfert de charges de $C1$ à $C2$, et une égalisation de leur tension $V = 0.5 (V_{C1} + V_{C2})$

Exemple :

Soit le mot suivant à convertir, transmis en liaison série :

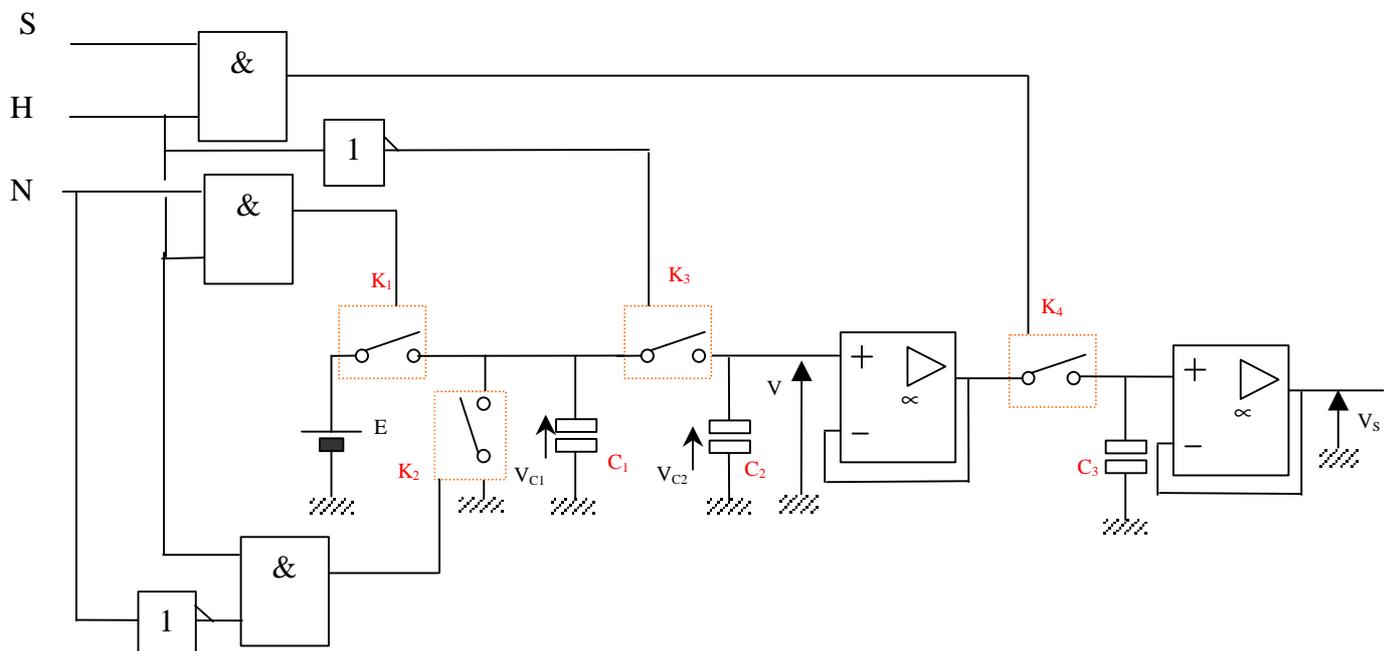


Exercice TD :

Exprimer l'évolution des tensions V_{C1} , V_{C2} et V pendant les 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} périodes d'horloge pour le mot de quatre bits représentant le chiffre décimal « 11 ».

Justifier le fonctionnement du système de commande des interrupteurs en représentant les chronogrammes de commande des interrupteurs K_i ($i=1..4$).

Donner le rôle du second AOP.



A la 4^{ème} période, le mot de 4 bits est lu entièrement et V est bien proportionnel à la valeur décimale du mot série (y compris le zéro).

Remarque :

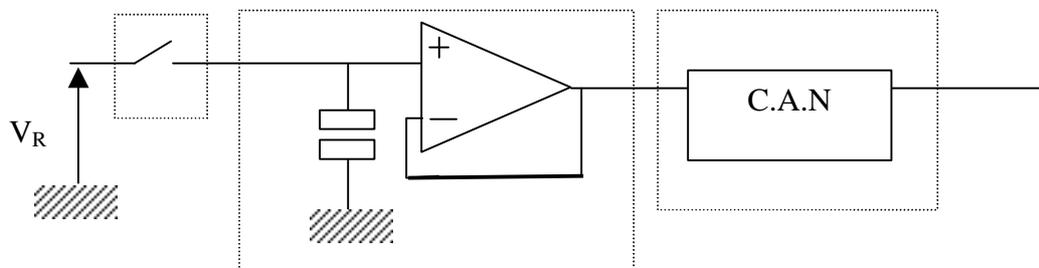
- Sans modification des circuits, et en jouant sur la longueur du signal de synchronisation, ce dispositif peut traiter des mots avec un nombre de digits quelconque.
- Un échantillonneur bloqueur peut conserver la tension correspondant au mot converti le temps de la tension du mot suivant.

3 Conversion numérique-analogique

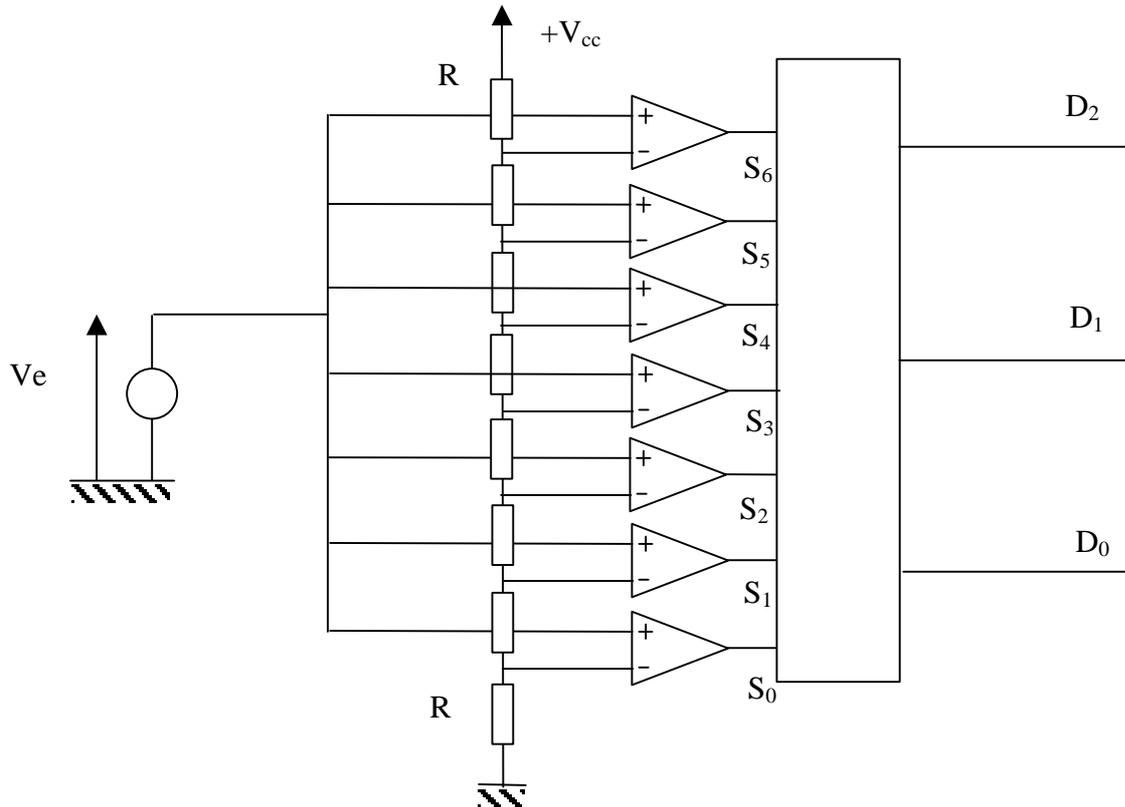
A un signal analogique V(t) on va faire correspondre une suite de nombres $\{V_k\}$ codés sous forme binaire.

Les différentes étapes conduisant à la numérisation sont :

- l'échantillonnage
- la mémorisation
- le codage



3.1 Conversion Analogique Numérique à conversion simultanée (flash)



Effectuer la synthèse logique du décodeur.

Solution :

$$D_2 = S_6 + \overline{S_5} \cdot S_4 + \overline{S_3} \cdot S_2 + \overline{S_1} \cdot S_0$$

$$D_1 = S_1 \cdot \overline{S_3} + S_5$$

$$D_0 = S_3$$

Avantages du système :

Rapidité et simplicité de mise en œuvre.

Inconvénients du système :

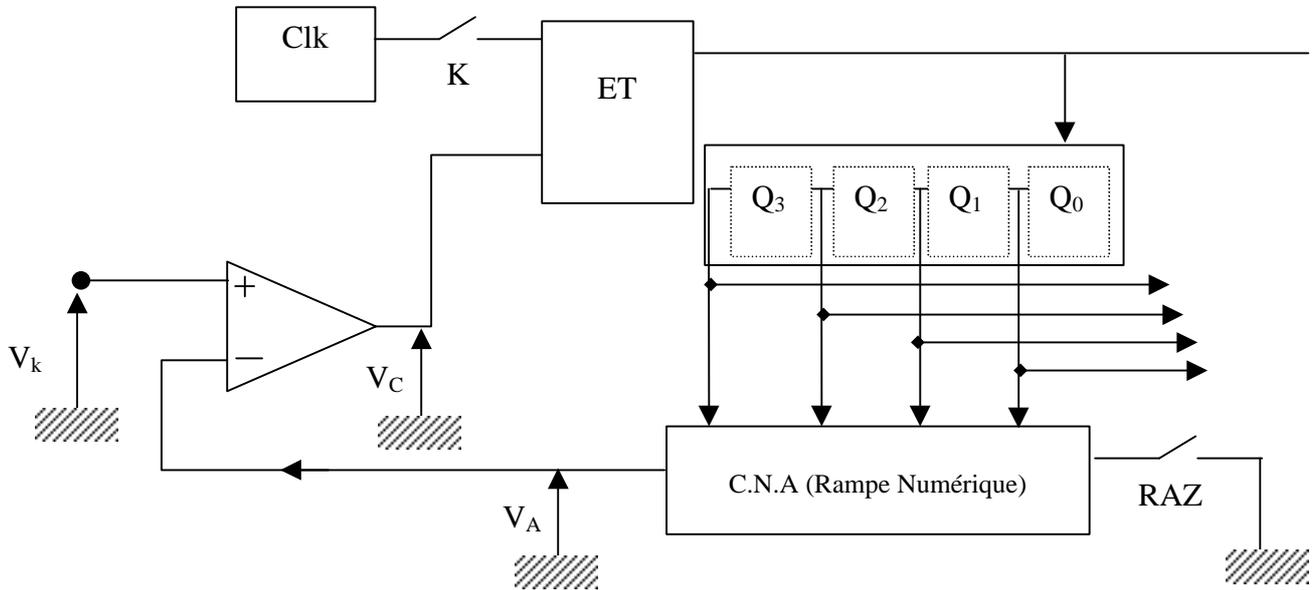
Utilisation de 2^{n-1} comparateurs (8 bits => 255 comparateurs).



Proposer une architecture de CAN flash, permettant de réduire le nombre de convertisseurs utilisés (possibilité d'utiliser un CNA).

...

3.2 Conversion Analogique Numérique à rampe numérique à 4 bits



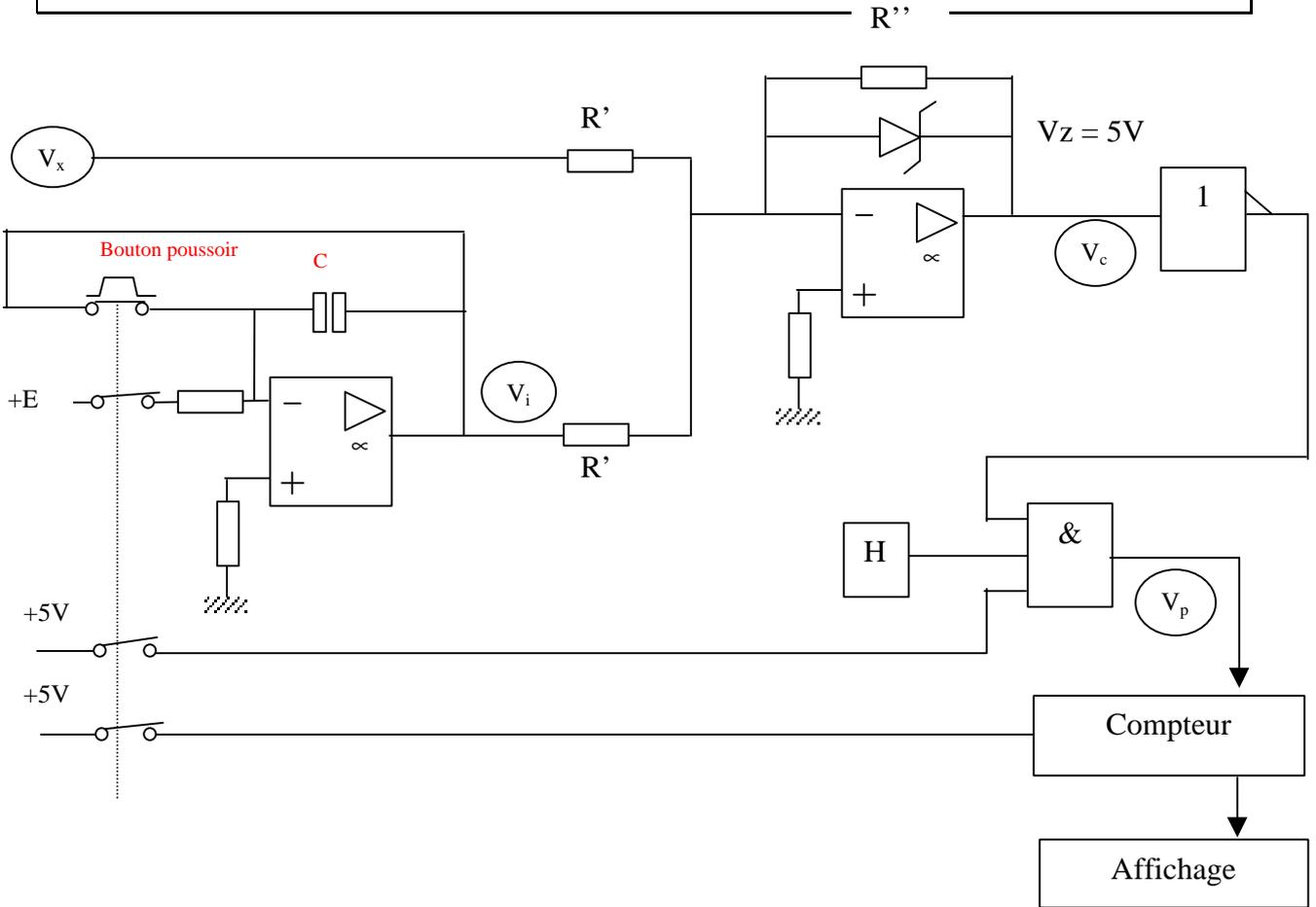
Principe de fonctionnement :

...



Expliquer le fonctionnement du montage CAN à modulation de durée suivant :

- * Représenter les chronogrammes avant et après action sur le bouton poussoir.
- * Donner la relation entre le nombre « N » lu sur le système d'affichage et la tension à mesurer V_x .



...

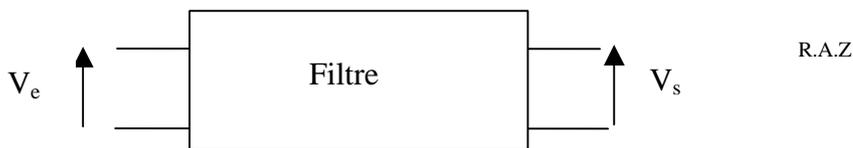
Partie III : Filtrage Analogique

4. Généralités sur les filtres

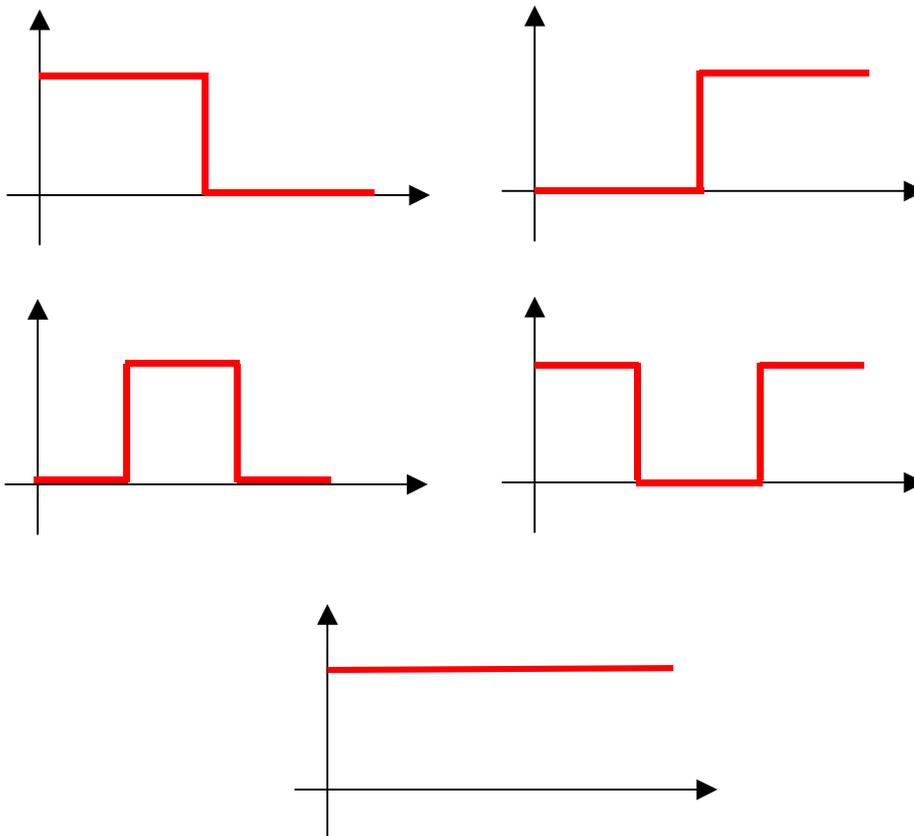
4.1. Définitions, types de filtres

Filtrer : Trier les composantes d'un signal en fonction des fréquences.
Le filtre agit sur l'amplitude et la phase des composantes fréquentielles.

Filtres idéaux : n'ont une action que sur l'amplitude et pas sur la phase.



Sur les gabarits suivants, identifier les différents types de filtres.



4.2. Classification des filtres

Passifs : Résonateurs, piezo électriques (quartz)
Inconvénient : L (coût, encombrement)

Actifs : Au moins un Aop (nécessité d'une alimentation) et un réseau RC.
Inconvénient : Limitation HF (500 kHz)

4.3. Temps de propagation de groupe d'un filtre

Déphasage inégal des composantes dans la bande passante du filtre (\Rightarrow déformation du signal)

Pour qu'un filtre transmette un signal sans déformation dans la BP, il faut que :

$$\left| \frac{d\varphi}{d\omega} \right| = \tau = c^{ste}$$

Où τ est appelé, temps de propagation de groupe du filtre.

5. Synthèse de filtres passifs

5.1. Propriétés des fonctions immitances (admittance et impédance)

Les immitances d'un dipôle passif sont des fonctions analytiques **Positives Réelles** (PR) définies selon les relations :

- $F(p)$ est réelle si p réel ($p = \alpha + j\omega$)
- $\text{Re}[F(p)] \geq 0$ si $\text{Re}[p] \geq 0$

En électronique, la fonction $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

est une **fonction PR** si :

- les coefficients de $N(p)$ et $D(p)$ sont réels strictement positifs,
- les degrés les plus haut de $N(p)$ et $D(p)$ ne diffèrent que de un,
- les degrés les plus bas de $N(p)$ et $D(p)$ ne diffèrent que de un,
- $D(p)$ est un polynôme de Hurwitz
 - $D(p) \neq 0$:
 - Racines à partie réelle < 0 ,
 - Racines imaginaires pures, simples ou nulles.
- les pôles imaginaires purs de $F(p)$ doivent être simples avec résidus > 0 ,
- $\text{Re}[F(p)] \geq 0, \forall \omega$ avec $p = j\omega$



Les fonctions suivantes sont-elles PR :

$$M(p) = \frac{p+2}{p^3 + 5p^2 + 6p + 7}$$

$$N(p) = \frac{p^2 + 4p - 3}{p^2 + 5p + 9}$$

$$O(p) = \frac{p+2}{p^2 + 4p + 3}$$

5.2. Propriétés des dipôles LC et RC

5.2.1. Dipôles LC

* Impédance :

$$Z = Ap + \frac{B}{p} = \frac{Ap^2 + B}{p}$$

* Admittance :

⇒ Z et Y ont même forme, donc même propriétés : fonction PR impaire

$$Y = \frac{1}{Ap} + \frac{p}{B} = \frac{A'}{p} + B'p = \frac{A' + B'p^2}{p}$$

- pôles et zéros : imaginaires purs, simples et alternés
- à l'origine : (pôle ou zéro)
- à l'infini : (zéro ou pôle)

5.2.2. Dipôles RC

* Impédance :

$$Z = A + \frac{B}{p} = \frac{Ap + B}{p}$$

* Admittance :

$$Y = A' + B'p$$

⇒ Z et Y/p ont même forme, donc même propriétés :

- pôles réels simples et négatifs,
- pôles et zéros alternés,
- près de l'origine : pôle (zéro possible)
- près de l'infini : zéro (∞ possible)

5.3. Synthèse de Dipôles LC : Méthode de Cauer

Nous venons de voir que toutes des racines du dénominateur sont sur l'axe imaginaire, il s'en suit le développement en fractions simples de $Z(p)$:

$$Z(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - j\omega_1} + \frac{A_1^*}{p + j\omega_1} + \dots + A_\infty p$$

Avec : $A_\infty p$ pôle à l'infini, A_0/p pôle à l'origine.

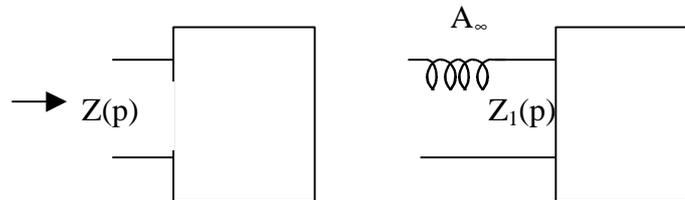


Méthode de Cauer décroissant (C_d) : extraction des pôles à l'infini

Soit l'impédance $Z(p)$ d'un bipôle LC, $Z(p)$ a soit un pôle ou un zéro à l'infini :

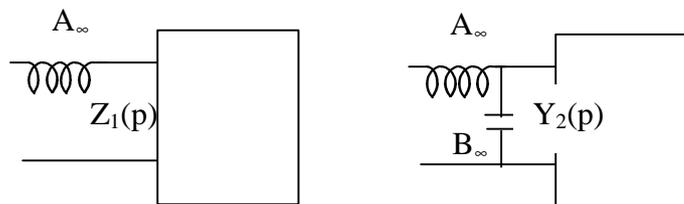
- supposons que $Z(p)$ a un pôle, on peut écrire :

$Z(p) = A_\infty p + Z_1(p)$, ce qui se traduit sur le schéma suivant :



* la fonction $Z_1(p)$ n'a donc plus de pôle à l'infini, elle donc un zéro, donc $Y_1(p) = [1/Z_1(p)]$ a un pôle à l'infini, et s'écrit donc :

$Y_1(p) = B_\infty p + Y_2(p)$, ce qui se traduit sur le schéma suivant :



* la fonction $Y_2(p)$ n'a donc plus de pôle à l'infini, elle donc un zéro, donc $Z_2(p)$ a un pôle à l'infini, et s'écrit :

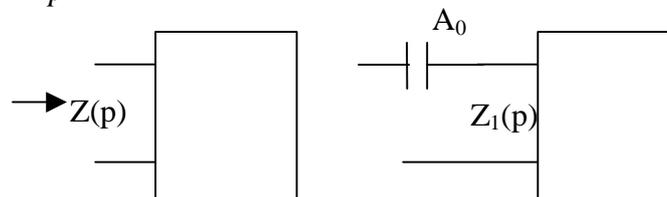
$Z_2(p) = C_\infty p + Z_3(p)$, etc. On range donc par puissance décroissante.



Méthode de Cauer croissant (C_c) : extraction des pôles à l'origine

- supposons que $Z(p)$ a un pôle, on peut écrire :

$Z(p) = \frac{A_0}{p} + Z_1(p)$, ce qui se traduit sur le schéma suivant :



$Z_1(p)$ n'a pas de pôle à l'origine donc Y_1 a un pôle à l'origine, d'où :

$$Y_1(p) = \frac{B_0}{p} + Y_2(p), \text{ etc. On range donc par puissance croissante.}$$



Synthèse d'un dipôle par C_d et C_c défini par :

$$Z(p) = \frac{p^3 + 2p}{2p^2 + 1}$$

...

5.4. Synthèse de Dipôles RC :

5.4.1. Dipôle série :

Un dipôle RC peut se décomposer en éléments simples :

$$Z(p) = K_\infty + \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p + a_i}$$

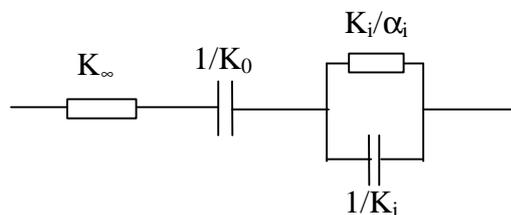
où : K_∞ est un pôle à l'infini (nul si on a un zéro à l'infini)

K_0 est un pôle à l'origine

α_i pôles à partie réelle négative pour lesquels $Z_i = K_i / (p + \alpha_i)$, qui peut se mettre sous la

forme : $Y_i(p) = \frac{p}{K_i} + \frac{a_i}{K_i}$.

D'où la structure du filtre :



5.4.2. Foster parallèle:

Soit le dipôle $Z(p)$ que l'on veut synthétiser, on peut écrire :

$$\frac{Y(p)}{p} = K_{\infty} + \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p + a_i}$$

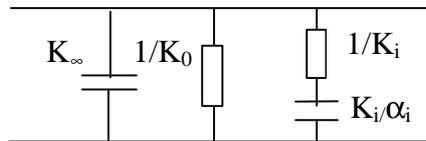
d'où :

$$Y(p) = K_{\infty} p + K_0 + \sum_{i=1}^n \frac{pK_i}{p + a_i}$$

vec :

$$Y_i(p) = \frac{pK_i}{p + a_i} \quad \Rightarrow \quad Z_i(p) = \frac{1}{K_i} + \frac{a_i}{K_i p}$$

D'où la structure du filtre :



Effectuer la synthèse d'un dipôle RC défini par :

$$Z(p) = \frac{3p^2 + 18p + 24}{p^2 + 2p}$$

6. Normalisation, transformation de filtres passifs

6.1. Gabarit d'un filtre réel

On définit le **gabarit d'un filtre** comme étant les limites entre lesquelles la réponse du filtre $H(p)$ doit se situer, avec :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} \quad \text{et} \quad G_{dB} = 20 \log |H(p)| < 0$$

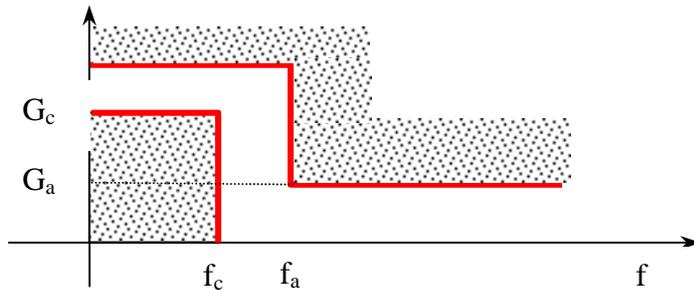
On parlera **d'atténuation du filtre**, et on pourra travailler sur la fonction $A(p)$ définie par :

$$A(p) = \frac{V_e(p)}{V_s(p)} \quad \text{et} \quad |A(p)|_{dB} = 20 \log |A(p)| > 0, \text{ présentant une courbe de module}$$

inversée.

Le gabarit d'un filtre passe-bas sera défini par :

- f_c dernière fréquence passante (fréquence de coupure) $\Rightarrow G_c$ gain associé,
- f_a dernière fréquence atténuée $\Rightarrow G_a$ gain associé.



6.2. Sélectivité d'un filtre réel

On pourrait définir la sélectivité k d'un filtre comme étant sa capacité à laisser passer (sélectionner) une fréquence donnée. Ainsi la sélectivité d'un filtre idéal (quel que soit son type est égale à 1)

Filtre passe-bas

$$k = \frac{f_c}{f_a}$$

Filtre passe-haut

$$k = \frac{f_a}{f_c}$$

Filtre passe-bande

$$k = \frac{f_c^+ - f_c^-}{f_a^+ - f_a^-}$$

Filtre coupe-bande

$$k = \frac{f_a^+ - f_a^-}{f_c^+ - f_c^-}$$

Pour un filtre passé bande, on définit la bande coupée relative B par la relation :

$$B = \frac{f_c^+ - f_c^-}{f_0}, \text{ avec } f_0 \text{ fréquence centrale du filtre.}$$

Pour un filtre coupe-bande, on définit la bande passante relative B par la relation :

$$B = \frac{f_a^+ - f_a^-}{f_0}, \text{ avec } f_0 \text{ fréquence centrale du filtre.}$$

7. Filtre prototype, normalisations

Si on normalise les unités fréquence et impédances, on pourra par des transformations mathématiques (sur la variable p) obtenir à partir d'un filtre prototype passe-bas normalisé, les filtres passe-haut, passe-bande et coupe-bande.

7.1. Normalisation de l'unité fréquence

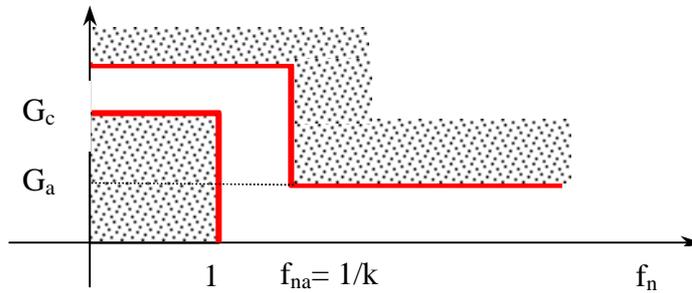
L'unité utilisée est f_u , fréquence unitaire définie par les relations :

- $f_u = f_c$, pour un filtre passe-bas et passe-haut,
- $f_u = f_0$, pour un filtre passe-bande et coupe-bande,

Dans ces conditions, on aura pour fréquence normalisée, la fréquence f_n :

$$f_n = \frac{f}{f_u} = \frac{w}{w_u} = w_n$$

Application pour le filtre passe-bas :



7.2. Normalisation de l'unité d'impédance

L'unité utilisée pour la normalisation d'impédance est Z_u , avec la relation $Z_u = R_u$.

On peut écrire pour l'impédance Z_n :

$$Z_n = \frac{Z}{Z_u} = \frac{Z}{R_u}, \text{ avec } R_u = \text{Résistance de charge } R_L.$$

On appliquera cette transformation sur les fonctions de transfert.



Effectuer la dénormalisation d'un dipôle RLC série.

...

Par identification :

$$\begin{aligned} R &= R_u R \\ L &= \frac{L_n R_u}{w_u} \\ C &= \frac{C_n}{R_u w_u} \end{aligned}$$

7.3. Transformation d'un circuit passe-bas en circuit passe-haut

Afin de se familiariser avec pulsations et fréquences, nous allons travailler en coordonnées réduites par les transformations :

- ω_{c_Bas} est la pulsation de coupure du passe bas,
- ω_{c_Haut} est la pulsation de coupure du passe haut

La variable $u = \frac{p}{w_{C_Bas}}$ est remplacée $u' = \frac{p'}{w_{C_Haut}}$

La variable p du filtre passe-bas est changée en $\frac{1}{p}$.



Donner la transformation des éléments impédances du filtre passe-bas

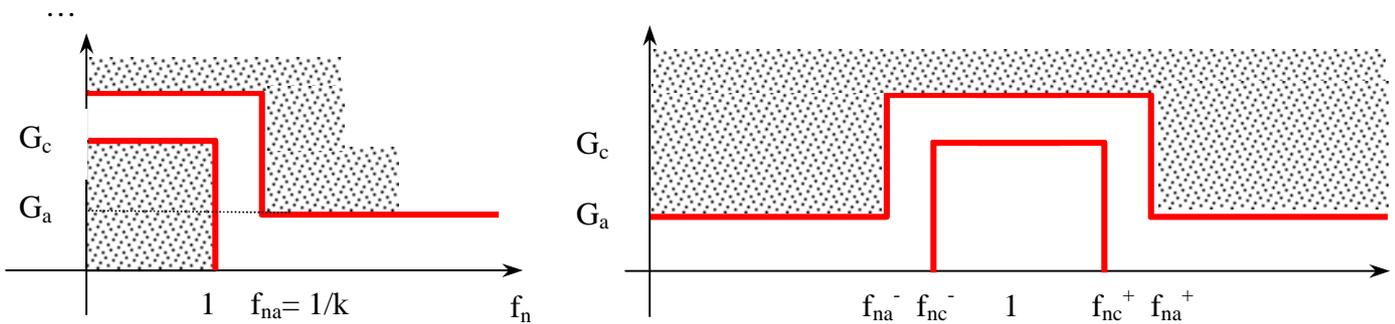


7.4. Transformation d'un circuit passe-bas en circuit passe-bande

La variable p du filtre passe-bas est changée en $\frac{1}{B} (p + \frac{1}{p})$.



Démonstration...



On a les relations :

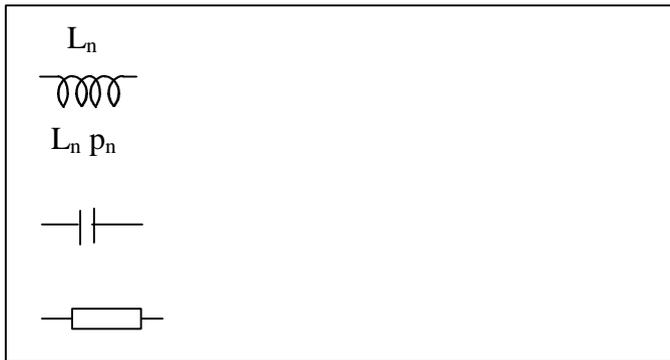
$$f_{nc}^+ \cdot f_{nc}^- = 1 = f_{na}^+ \cdot f_{na}^-$$

G_c, G_a, k conservés

$$B = \frac{f_c^+ \cdot f_c^-}{f_0} = f_{nc}^+ - f_{nc}^-$$



Donner la transformation des éléments impédances du filtre passe-bas en filtre passe-bande

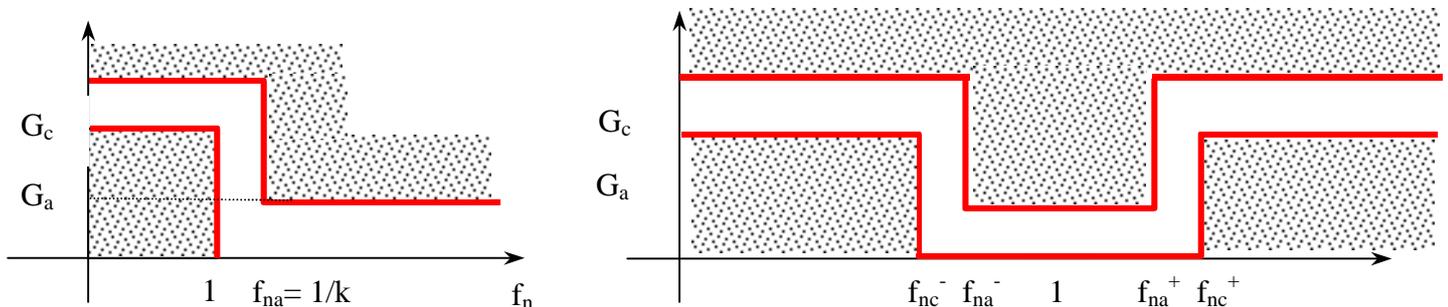


7.5. Transformation d'un circuit passe-bas en circuit passe-bande

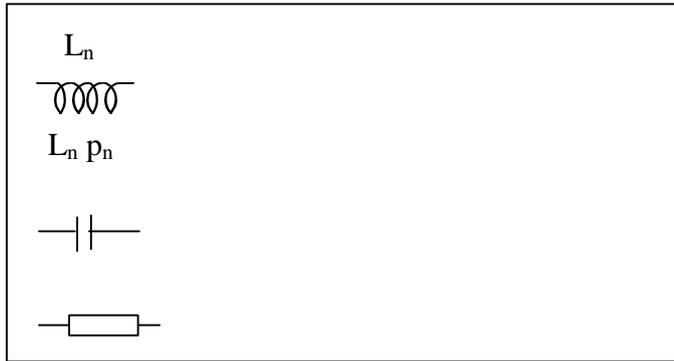
Evident en transformant dans le cas précédent u' en $v'=1/u$, pour $w = wr$ $v' \rightarrow \infty$ et pour $w = 0$ ou $w \rightarrow \infty$, $v' \rightarrow 0$.

Les pulsations de coupure sont inchangées puisque $|v'|=1 \Leftrightarrow |u'| = 1$

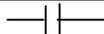
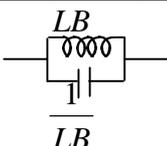
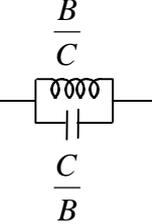
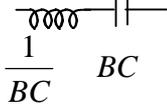
La variable p du filtre passe-bas est changée en $\frac{1}{B(p + \frac{1}{p})}$.



Donner la transformation des éléments impédances du filtre passe-bas en filtre coupe bande (notch)



Récapitulatif : Transformations fréquentielles des éléments d'un filtre LC

Filtre passe-bas	Filtre passe-haut	Filtre passe-bande de largeur B	Filtre réjecteur de bande de largeur B
p	$p \rightarrow \frac{1}{p}$	$p \rightarrow \frac{1}{B} \left(p + \frac{1}{p} \right)$	$p \rightarrow \frac{B}{\left(p + \frac{1}{p} \right)}$
 L	 $C = \frac{1}{L}$	 $\frac{L}{B} \quad \frac{B}{L}$	 $\frac{LB}{LB}$
 C	 $L = \frac{1}{C}$	 $\frac{B}{C} \quad \frac{C}{B}$	 $\frac{1}{BC} \quad BC$

8. Fonctions de transfert des filtres

8.1. Fonctions de transfert des filtres d'affaiblissement

Ce sont des fonctions rationnelles (p ou z), où la relation entre la fonction de transfert $H(j\omega)$ est reliée à l'affaiblissement A par la relation :

$$\begin{aligned}
 A(\text{dB}) &= 20 \log \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = 20 \log |H^{-1}(j\omega)| \\
 &= 10 \log [H^{-1}(j\omega)H^{-1}(-j\omega)] \\
 \text{car :} & \\
 [H^{-1}(j\omega)H^{-1}(-j\omega)] &= |H^{-1}(j\omega)|^2 = A_l^2
 \end{aligned}$$

Avec A_l affaiblissement exprimé en échelle linéaire ($A \approx 0 \Rightarrow A_l \approx 1$).

Les meilleurs filtres d'affaiblissement seront ceux pour lesquels A :

- s'annule le plus grand nombre de fois en bande passante (pour $\omega = \omega_{0i}$)
- devient infini le plus grand nombre de fois possible en bande atténuée (pour $\omega = \omega_{\infty j}$)

Fonctions d'affaiblissement des filtres passe-bas :

$$\begin{aligned}
 A_l^2 &= \left| \frac{V_1}{V_2} \right|^2 = 1 + e^2 \frac{\prod_{i=1}^{(n)/2} (w^2 - w_{0i}^2)^2}{\prod_{j=1}^m (w^2 - w_{\infty j}^2)^2} = 1 + |K(j\omega)|^2 & (n \text{ pair}) \\
 A_l^2 &= \left| \frac{V_1}{V_2} \right|^2 = 1 + e^2 \frac{w^2 \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (w^2 - w_{0i}^2)^2}{\prod_{j=1}^m (w^2 - w_{\infty j}^2)^2} = 1 + |K(j\omega)|^2 & (n \text{ impair})
 \end{aligned}$$

On calculera un filtre dont on définit le gabarit d'affaiblissement en déterminant au mieux les paramètres ω_{0i} , $\omega_{\infty j}$, et ϵ .

La fonction A peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned}
 A_l^2 &= 1 + |K(j\omega)|^2 = 1 + \frac{F(j\omega)F(-j\omega)}{P(j\omega)P(-j\omega)} = |H^{-1}(j\omega)|^2 = \frac{E(j\omega)E(-j\omega)}{P(j\omega)P(-j\omega)} \\
 \Rightarrow & \\
 E(p)E(-p) &= F(p)F(-p) + P(p)P(-p) \quad (*)
 \end{aligned}$$

L'équation (*) est appelée équation de Feldkeller, où E(p) est obtenue à partir de la factorisation des seules racines p_r à partie réelle négative de l'équation (*) :

$$E(p) = E_0 \prod_{r=1}^n (p - p_r)$$

avec $p_r = a_r + j b_r$ et $a_r < 0$

E_0 est égal au coefficient du terme de degré le plus élevé de $F(p)F(-p)+P(p)P(-p)$

8.2. Fonctions de transfert des filtres analytiques

On ne sait **calculer analytiquement qu'un petit nombre de fonctions** caractéristiques répondant convenablement au gabarit d'affaiblissement (pour des gabarits simplifiés). Cependant nous verrons que dans de nombreux cas, on pourra se satisfaire du résultat obtenu.

Les fonctions passe-bas, « originelles », puisque toutes les fonctions de filtrage en seront déduites, se divisent en 2 catégories selon si elles se présentent:

- **sous la forme d'une fraction rationnelle,**
- **sous la forme d'un polynôme** (Butterworth, Tchebycheff, Legendre) sous la forme

$$A_t^2 = \left| \frac{V_1}{V_2} \right|^2 = 1 + e^2 w^2 \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (w^2 - w_{0i}^2) \quad (n \text{ impair})$$

$$A_t^2 = \left| \frac{V_1}{V_2} \right|^2 = 1 + e^2 \prod_{i=1}^{(n)/2} (w^2 - w_{0i}^2) \quad (n \text{ pair})$$

Remarque :

Les fonctions rationnelles donneront pour un gabarit donné un filtre d'ordre inférieur, au prix d'une plus grande difficulté de réalisation et de réglage (lié aux zéros de transmission).

8.2.1. Filtre de Butterworth

Tous les w_{0i} sont nuls, on a donc :

$$A_t^2 = \left| \frac{V_1}{V_2} \right|^2 = 1 + e^2 w^{2n}, \text{ où les valeurs de } \varepsilon \text{ et } n \text{ pour que l'atténuation se situe dans les zones}$$

autorisées de gabarit sont données par les relations :

$$10 \log(1 + e^2) = A_{MAX}$$

$$10 \log \left(1 + e^2 \left(\frac{1}{k} \right)^{2n} \right) \geq A_{MIN}$$

Soit :

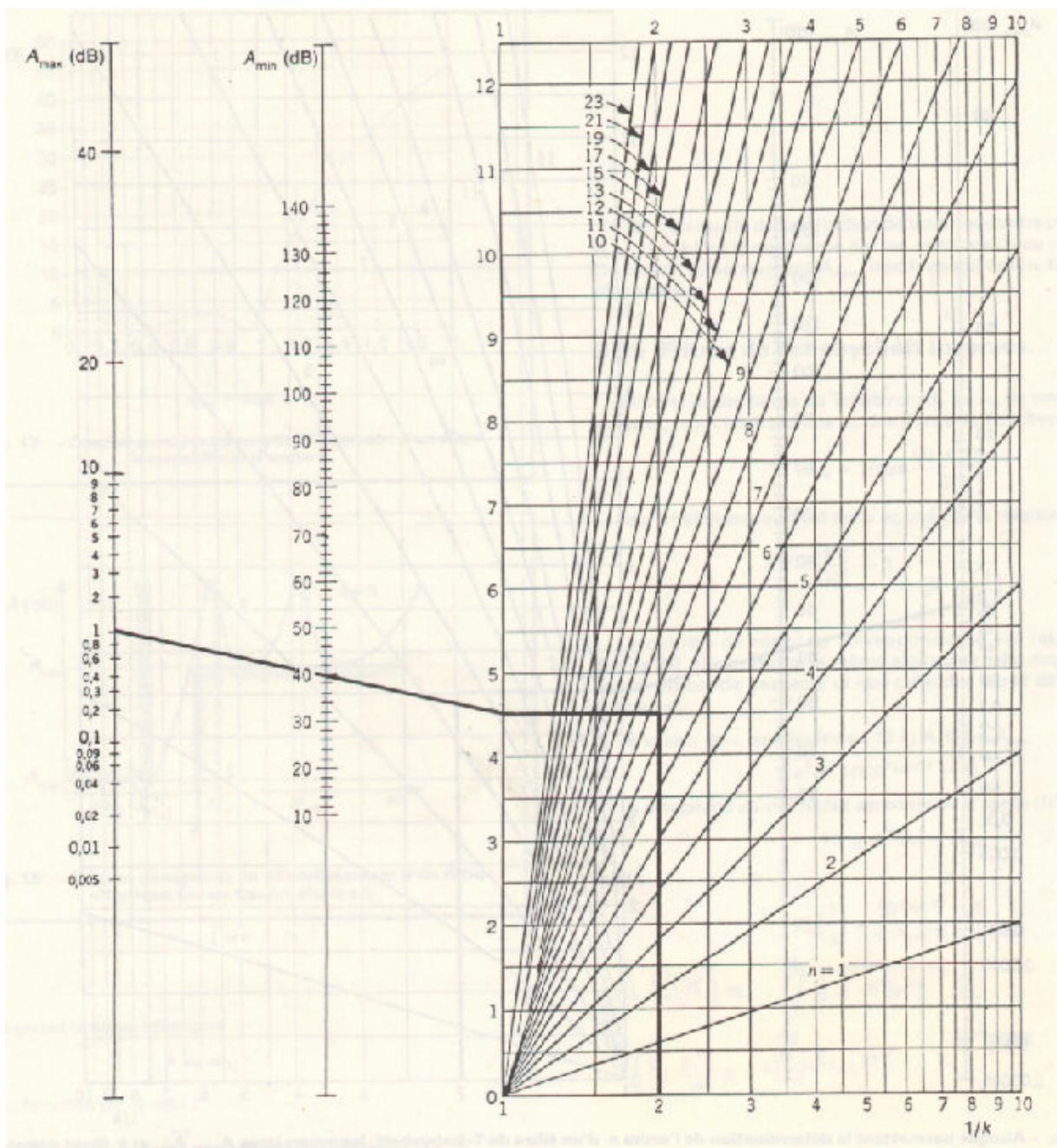
$$e^2 = 10^{A_{MAX}/10} - 1$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\log(10^{A_{MAX}/10} - 1) - \log e^2}{2 \log \left(\frac{1}{k} \right)}$$

Remarque :

Plus n est élevé, plus la fonction de transfert du filtre à réaliser est d'ordre élevé. On choisit donc la valeur entière la plus faible satisfaisant à l'inégalité. (Ce choix se fait généralement à l'aide d'un abaque).

- réponse très régulière, et temps de propagation de groupe assez constant dans la bande passante
- Pour un gabarit donné, l'ordre n du filtre sera plus élevé que pour les autres types de filtres.



Abaque permettant la détermination de l'ordre d'un filtre de Butterworth.

8.2.2. Filtre de Tchebycheff

Les valeurs de w_{0i} sont réparties dans la BP de façon à ce que l'affaiblissement ondule entre 0 et A_{MAX} . Il s'en suit que les w_{0i} satisfont à l'équation :

$$w_{0i} = \cos \frac{(2i+1)p}{2n} \quad \text{avec } i = 1, \dots, n$$

Les polynômes ayant ce jeu de racines, sont les polynômes de Tchebycheff :

$$\begin{array}{l}
 T_n(w) = \cos(n.Arc \cos w) \\
 \text{soit :} \\
 T_0 = 1 \\
 T_1 = w \\
 T_2 = 2w^2 - 1 \\
 \dots \\
 T_n = 2wT_{n-1} - T_{n-2}
 \end{array}$$

Remarque :

$T_n(1) = 1, \forall n$; et $T_n(0) = 0$ ou 1 , selon la parité de n .

L'affaiblissement des filtres de Tchebycheff est donné par la relation :

$$A_l^2 = 1 + e^{2T_n^2(w)}$$

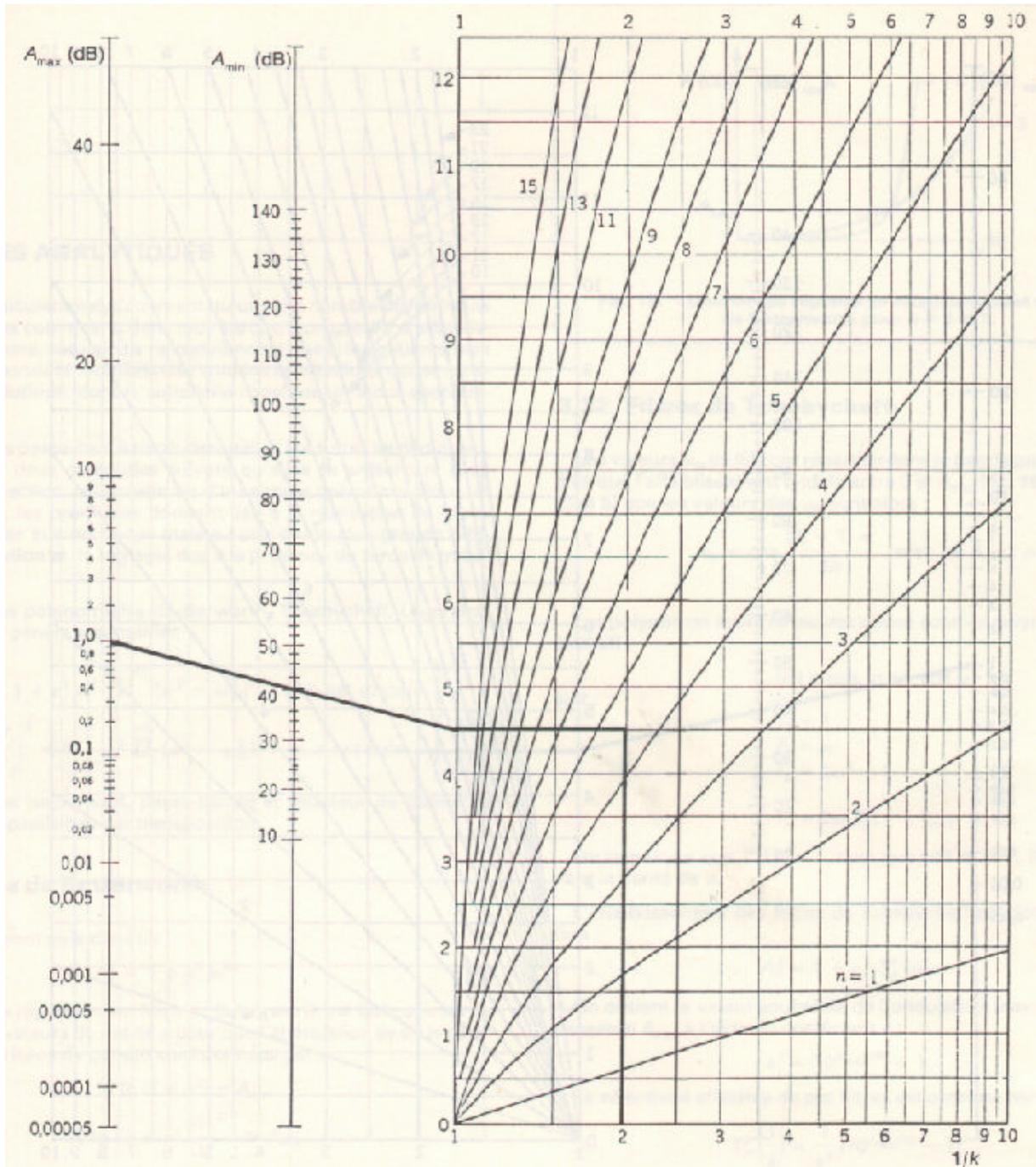
On obtient la valeur souhaitée de l'ondulation maximale en bande passante A_{MAX} à l'aide du coefficient ε :

$$\varepsilon^2 = 10^{A_{MAX}/10} - 1$$

La sélectivité de ces filtres est donnée par :

$$T_n^2\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} (10^{A_{MIN}/10} - 1)$$

L'ordre n , du filtre est ensuite déterminé de manière à respecter le gabarit, cette détermination se fait à l'aide d'abaques.



Abaque permettant la détermination de l'ordre d'un filtre de Tchebycheff.

On citera d'autres méthodes (moins analytiques et nécessitant un calculateur) :

- Filtres Elliptiques (ou de Cauer)
- Filtres de Tchebycheff inverses
- Filtres de Legendre

8.2.3. Filtres de Legendre, de Cauer, de Bessel, de Paynter

Principales fonctions d'approximation polynomiales du filtre passe-bas

1- Fonctions de Butterworth (maximally flat - MF)

- en général $|H(x)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 x^{2N}}$ $x = f_n$ fréquence normalisée

- en particulier $G_c = 20 \log |H| = -3dB$ pour $x = 1$ avec $\epsilon = 1$

$$|H(x)|^2 = \frac{1}{1 + x^{2N}}$$

et $H(p) = \frac{1}{Bu_N(p)}$ Bu_N : polynômes de Butterworth

N	$Bu_N(p)$
1	$p + 1$
2	$p^2 + \sqrt{2} p + 1$
3	$p^3 + 2 p^2 + 2 p + 1$
4	$p^4 + 2,613 p^3 + 3,414 p^2 + 2,613 p + 1$
5	$p^5 + 3,236 p^4 + 5,236 p^3 + 5,236 p^2 + 1,236 p + 1$
6	$p^6 + 3,864 p^5 + 7,464 p^4 + 9,142 p^3 + 7,464 p^2 + 3,864 p + 1$

2 - Fonctions de Tchebycheff (equal ripple - ER)

$|H(x)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(x)}$ $T_N(x)$ polynômes de Tchebycheff
 $\epsilon < 1$ caractérise l'ondulation

$T_N(x) = \cos [N \text{ Arc } \cos x]$ si $|x| \leq 1$

$T_N(x) = \text{ch} [N \text{ Arg } \text{ch } x]$ si $|x| \geq 1$

$T_0(x) = 1$

$T_{N+1}(x) = 2x T_N(x) - T_{N-1}(x)$

$T_N^2(x) = \frac{T_{2N}(x) + 1}{2}$

N	$T_N(x)$
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

2 -

3 - Fonctions de Legendre ou de Papoulis (Fonction 0, optimale)

$$|H(x)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 L_N(x)}$$

L_N polynômes déduits des $\epsilon = \beta_n$
polynômes de Legendre

N	$L_N(x)$
1	x^2
2	x^4
3	$3x^6 - 3x^4 + x^2$
4	$6x^8 - 8x^6 + 3x^4$
5	$20x^{10} - 40x^8 + 28x^6 - 8x^4 + x^2$
6	$50x^{12} - 120x^{10} + 105x^8 - 40x^6 + 6x^4$

4 - Fonctions de Bessel (ou de Thomson ou maximally flat delay MFD)

$$H(p) = \frac{1}{B_N(p)} \quad B_N \text{ polynômes de Bessel}$$

N	$B_N(p)$
1	$p + 1$
2	$p^2 + 3p + 3$
3	$p^3 + 6p^2 + 15p + 15$
4	$p^4 + 10p^3 + 45p^2 + 105p + 105$
5	$p^5 + 15p^4 + 105p^3 + 420p^2 + 945p + 945$
6	$p^6 + 21p^5 + 210p^4 + 1260p^3 + 4725p^2 + 10395p + 10395$

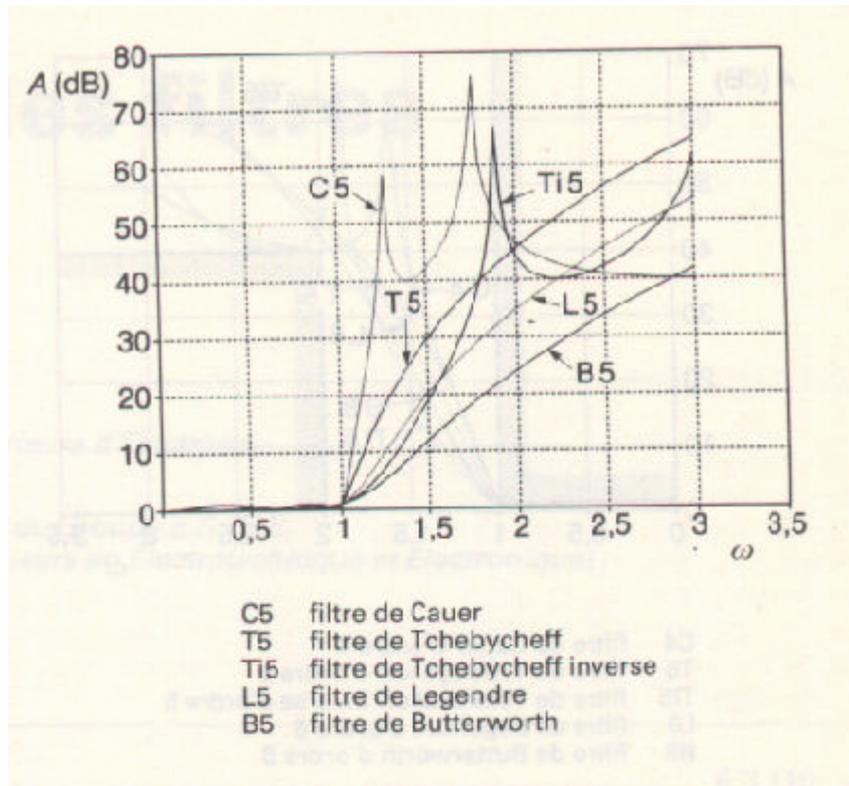
$$B_N(p) = (2N-1) B_{N-1} + p^2 B_{N-2}$$

$$B_0(p) = 1$$

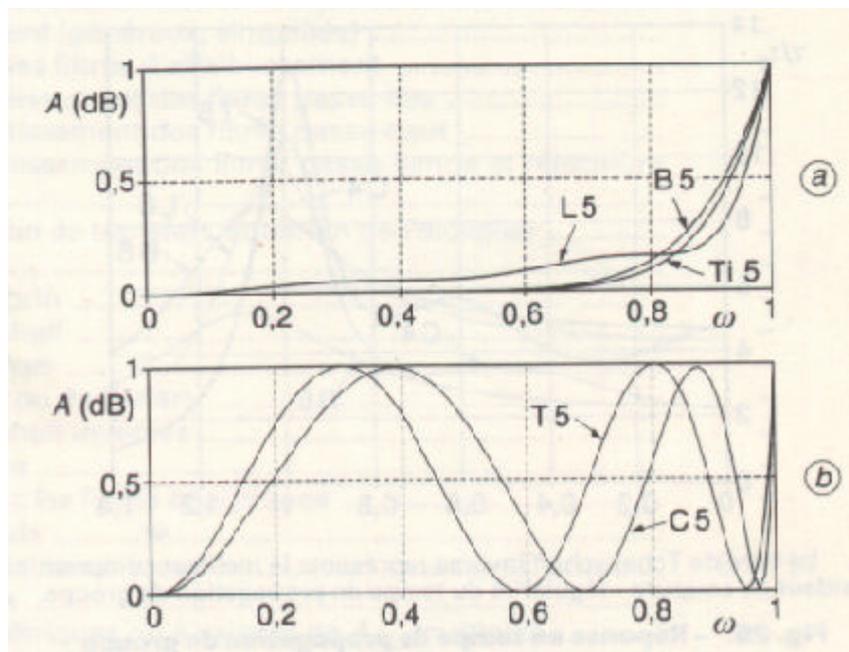
5- Fonctions de Paynter (conduisant aux "averaging filters")

$$H(p) = \frac{1}{P_N(p)}$$

N	$P_N(p)$
2	$4p^2 + 3p + 1$
3	$(1,6p^2 + 1,2p + 1) (2p + 1)$
4	$(2,42p^2 + 2,62p + 1) (0,734p^2 + 0,49p + 1)$
6	$(1,866p^2 + 2,39p + 1) (0,658p^2 + 0,62p + 1) (0,232p^2 + 0,122p + 1)$



Comparaison entre les affaiblissements de différents filtres analytiques d'ordre 5.



Réponse en Bande Passante des différents filtres.



Exercice TD :

Dessiner le gabarit du filtre passe-bas, avec les caractéristiques :

$$A_{max}=1dB$$

$$A_{min}=40dB$$

$$k=0,5$$

Calculer la fonction de transfert, par Butterworth, Tchebycheff et Legendre (utilisation de Matlab)

...

(Quelques fonctions Matlab à connaître...)

conv
size
roots
poles
poly
printsys
bode

Cauer :

Cette méthode n'est pas exposée directement dans le cours car elle ne se prête pas bien à la résolution analytique.

Les résolutions présentées, (Butterworth, Tchebycheff), ont leurs zéros de transmission à l'infini, c'est-à-dire $\omega_{\infty j} \rightarrow \infty$. L'avantage qui en résulte est une grande simplicité de calcul, étant donné que les fonctions inverses des fonctions de transfert sont des polynômes. Ces avantages s'obtiennent au prix d'un ordre n plus élevé.

Si on cherche à minimiser n pour un gabarit donné, on aura un filtre moins coûteux mais plus complexe à calculer et à réaliser. On démontre que la valeur minimale de n est obtenue lorsque les ω_{0i} et $\omega_{\infty j}$ sont placés de telle façon que la réponse oscille entre 0 et A_{max} en bande passante, et entre A_{min} et infini en bande atténuée.

On pose (résolution de Cauer) :

$$w_{0i} = sn(2iK / n, k) \quad n \quad \text{pair}$$

$$w_{0i} = sn\left(\frac{(2i-1)K}{2n}, k\right) \quad n \quad \text{impair}$$

avec sn fonction sinus elliptique, définie par :

$$sn(n, k) = \frac{2p}{kK} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin \left[(2n+1) \frac{pn}{2K} \right]$$

avec :

$$q = \exp \left[-p \frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)} \right]$$

et :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 f)^{-\frac{1}{2}} df$$

q est la fonction modulaire, K est la fonction de Jacobi.

ε est calculé de façon à ,avoir :

$$A(1) = A_{MAX}$$

$\omega_{\infty j}$ se déduit par la relation :

$$kw_{0i} w_{\infty j} = 1$$

L'ordre n est déterminé pour que le gabarit soit respecté, à l'aide d'abaques.

Remarque :

Il est certain que la détermination de 3 des 4 quatre paramètres A_{max} , A_{min} , n et k fixe le quatrième.

On choisira généralement A_{max} , n et k ce qui donne des calculs plus simples.

Dans notre exemple, le jeu de paramètres fixés est :

$$A_{max} = 1dB, A_{min} = 40dB, n = 4 \text{ (cf. abaque).}$$

On obtient :

$\omega_{\infty 1} = 1.6097$	$\omega_{01} = 0.4299$
$\omega_{\infty 2} = 3.5257$	$\omega_{02} = 0.9416$
$\varepsilon = 100$	

D'où la résolution

$$\dots \dots \dots H(p) = \frac{P(p)}{E(p)} = \frac{0.01(p^2 + 12.43)(p^2 + 2.59)}{p^4 + 0.939p^3 + 1.51p^2 + 0.8p + 0.361}$$

9. Réalisation de filtres actifs

9.1. Introduction

Les filtres actifs sont des filtres incluant des composants actifs

- Transistors,
- AOP,
- Interrupteurs électroniques,

associés à des composants passifs.

La *notion de filtre actif* est aussi associée à la *notion d'intégration* de cette fonction dans un composant, il s'en suit que les éléments inductifs, composants à ce jour difficilement intégrables sont en principe exclus.

Avantage :

Réalisation intégrée (faible coût)

Inconvénient :

Alimentation, donc notion de saturation (amplitude du signal à filtrer limitée par la tenue du composant actif)

Attention aussi à la présence de tensions d'offset, et de bruit liés au composant actif.



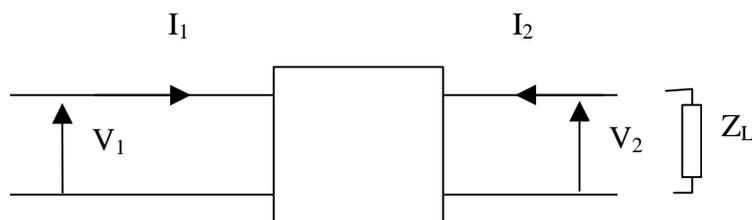
Donner trois supports technologiques permettant de réaliser des filtres actifs

9.2. Création d'une « inductance équivalente »

9.2.1. A partir d'un convertisseur d'impédance généralisé (GIC)

Le principe est de transformer une impédance Z_1 en une autre impédance Z_2 selon la relation :

$$Z_2 = F(p) Z_1$$



* V GIC : convertisseur de tension $I_1 = -I_2$

* I GIC : convertisseur intensité $\begin{cases} V_1 = V_2 \\ F(p) I_1 = -I_2 \end{cases}$

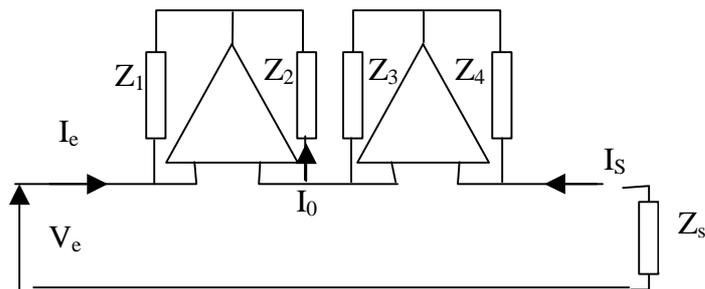
$$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F(p)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V2 \\ -I2 \end{pmatrix}$$

I

- *Exemple : IGIC de Riordan*



Calculer $F(p)$ pour le montage suivant.



... .. on a donc :

$$F(p) = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$$

A partir de ce schéma, on aura une inductance équivalente avec une borne à la masse pour par exemple:

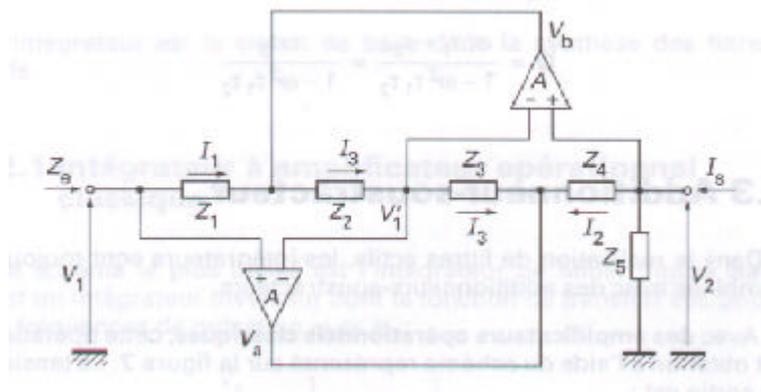
$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = R$$

$$Z_4 = 1/Cp$$

$$Z_s = r$$

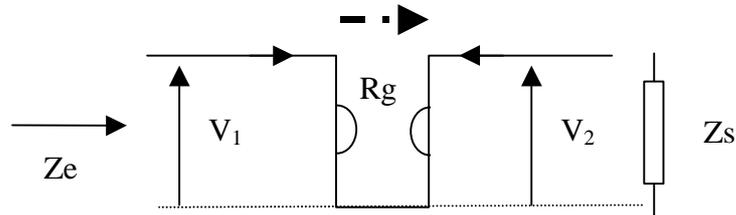
$$\Rightarrow Z_e = r RC p \Rightarrow \boxed{L = r RC}$$

Remarque: autre schéma de la structure de Riordan



9.2.2. SELF obtenue à partir d'un gyrateur

Le gyrateur parfait est défini comme étant un système inverseur (Unidirectionnel) d'impédance positif, où Z_e est proportionnelle à l'inverse de l'impédance placée en sortie :



Avec la matrice Z_{ij} définie par :

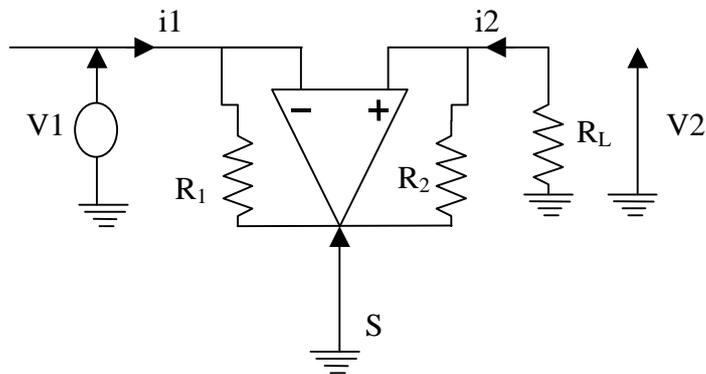
$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -R_g \\ R_g & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R_g^2}{Z_s}$$

- **Réalisation pratique :** *INIC (convertisseur d'impédance négatif à inverseur de courant)*

Soit le circuit suivant, où on suppose l'AOP comme étant parfait, et R_L très grand devant R_2 . Sa tension différentielle est donc nulle, ce qui se traduit par la relation $V_1 = V_2$.



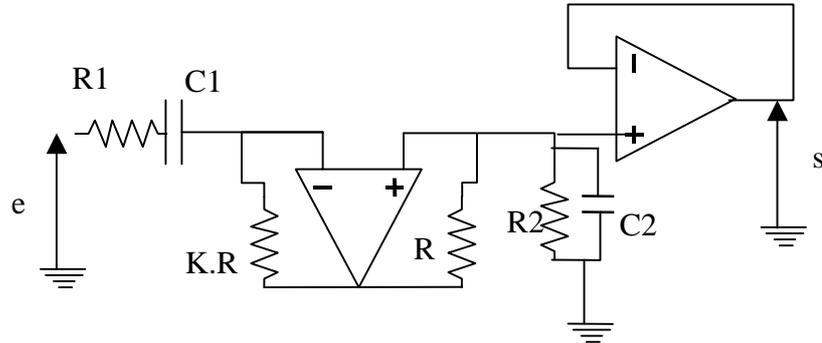
On se propose de calculer l'impédance d'entrée du montage, pour ce faire, on va chercher à exprimer le courant i_1 en fonction de i_2 .

...

On vient de réaliser un « filtre à convertisseur d'impédance négative » (pouvant réaliser des impédances négatives), en incluant une capacité à la place de R_2 , on peut obtenir une inductance équivalente, dont une des bornes est reliée à la masse.



Donner la fonction de transfert $S(p)/E(p)$ du montage ci-dessous.

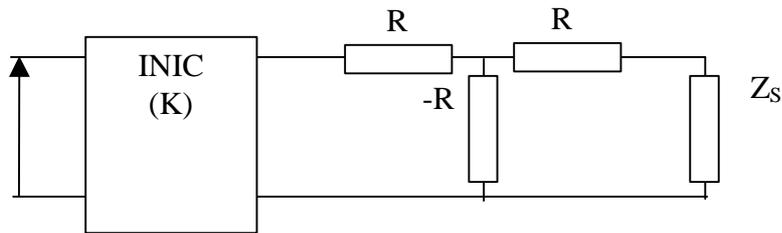


.....

$$H(p) = \frac{-KR_2C_1p}{R_1R_2C_1C_2p^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 - KR_2C_1)p + 1}$$

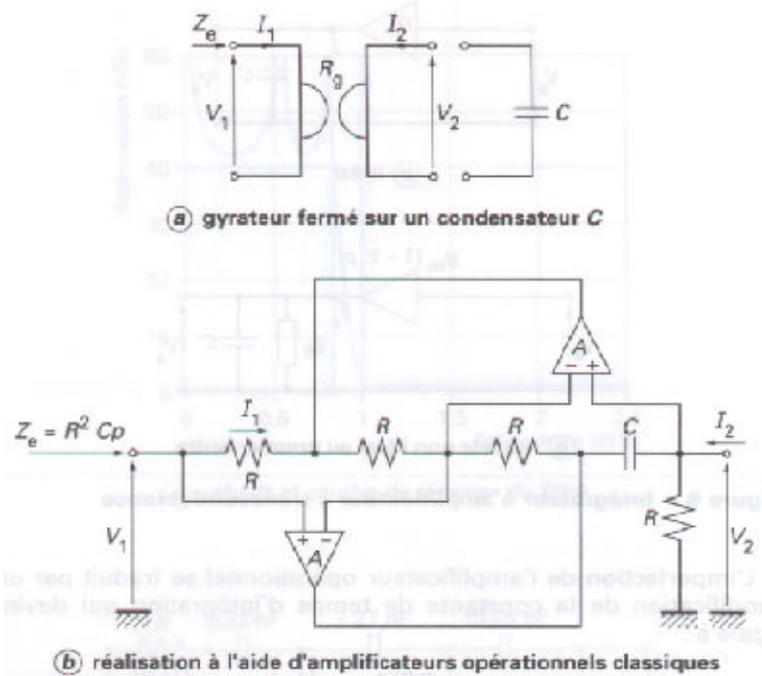


Démontrer que le montage suivant permet d'obtenir un gyrateur.



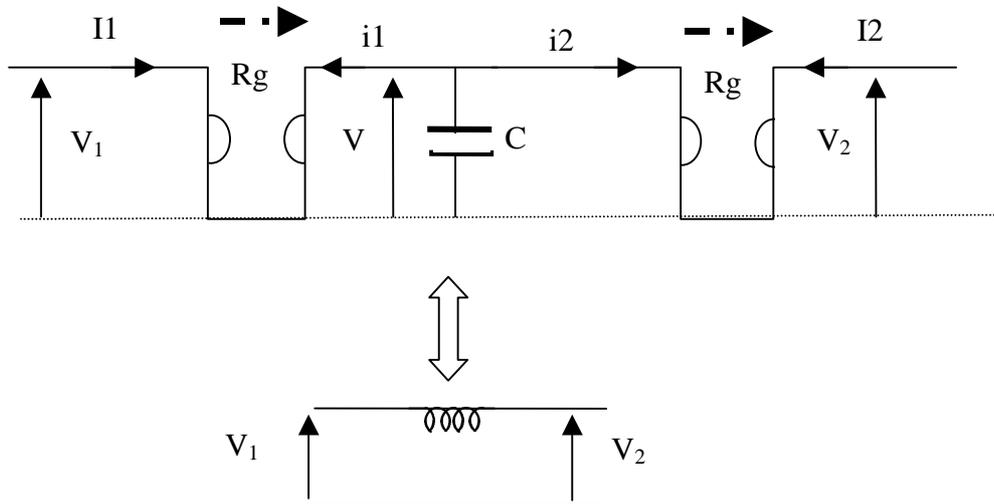
Remarque :

Le circuit suivant permet aussi de réaliser un gyrateur.





Démontrer que le montage suivant permet la réalisation d'une inductance flottante



...

$$\Rightarrow L = R_g^2 C$$

Remarque :

Les GIC permettent non seulement de réaliser des inductances actives, mais aussi des « super » résistances, plus connues sous le nom de FDNR (Frequency Dependant Negative Resistors) ou des « super » condensateurs, éléments n'ayant pas d'équivalents en circuits passifs et très utilisés dans la synthèse de certains filtres actifs.

Exemple de réalisation de FDNR par des IGIC (éléments très utilisés lors de la transformation de Brutton cf. chapitre « Synthèses globales »)

:

- Réalisation d'une « super inductance »
Dipôle $Z = Ap^2$ ($A > 0$)
- Réalisation d'une « super capacité »
Dipôle $Z = 1/(Bp^2)$ ($B > 0$)



9.3. Rappel sur les sensibilités des filtres actifs

Composants complexes et très précis, on doit assurer que les variations des valeurs des éléments constituant (dérives thermiques ...) n'altèrent pas trop les performances du filtre.

Le degré de sensibilité du gain G , à la variation d'un élément noté x_i est défini par :

$$S_{x_i}^G = \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{x_i}{G} = \frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}}$$

Seuls les filtres ayant des sensibilités très faibles sont susceptibles d'applications industrielles.

9.4. Synthèse de filtres actifs par différentes méthodes

On distinguera deux types de synthèses :

- la synthèse en cascade
- la synthèse globale.

9.4.1. Synthèse en cascade

Cette synthèse est basée sur la décomposition toujours possible de $H(p)$ en termes biquadratiques (et d'un terme de degré 1 dans le cas où l'ordre n du filtre est impair).

Si n est pair :

$$H(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0} = \prod_{i=1}^{n/2} K_i \frac{a_i p^2 + b_i p + 1}{\frac{p^2}{w_{0_i}^2} + \frac{Q_i p}{w_{0_i}} + 1} = \prod_{i=1}^{n/2} B_i(p)$$

Si n est impair :

$$H(p) = \frac{a'_0 p + 1}{a_0 p + 1} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} K_i \frac{a_i p^2 + b_i p + 1}{\frac{p^2}{w_{0_i}^2} + \frac{Q_i p}{w_{0_i}} + 1} = \frac{a'_0 p + 1}{a_0 p + 1} \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} B_i(p)$$

où $B_i(p)$ représente un circuit élémentaire biquadratique, pour lequel on prendra soin d'assurer une réaction d'un circuit sur l'autre.

Remarque :

La synthèse en cascade ne convient donc que pour la réalisation de filtres peu sélectifs dont l'ordre ne dépasse pas 8 ou 10, et pour des fréquences ne dépassant pas quelques kilohertz.

9.4.2. Synthèses globales

On part d'un filtre LC prototype (pour lequel les sensibilités sont toutes faibles, démonstration de Orchard) et on le copie de façon à éliminer les inductances.

- **copie des composants** : les inductances sont remplacées par des couples condensateurs + gyrateurs. Cette méthode est très efficace lorsque le filtre prototype ne possède pas d'inductances flottantes (passe-haut)
- **copie du prototype modifié par la transformation de Brutton** : toutes les impédances du prototype sont multipliées par $1/p$, ce qui ne modifie pas $H(p)$. Il

s'en suit que les inductances sont transformées en résistances, les condensateurs en super résistances (FDNR) réalisées à l'aide de GIC.

A noter que les résistances terminales sont transformées en condensateurs, ce qui peut poser quelques problèmes en basse fréquence.

Cette méthode est très efficace lorsque le prototype ne comporte pas de condensateurs dans les branches série (passe-bas).

- **copie « opérationnelle »** : toutes les équations différentielles du filtre prototype sont simulées dans un réseau électronique. Par exemple, pour un système du premier ordre, la réalisation peut s'effectuer à l'aide d'intégrateurs et d'additionneurs soustracteurs (technique leap-frop , « saute mouton », très efficace pour la synthèse des passe-bas). Pour les filtres plus complexes on utilisera les techniques de graphes de fluence ou de représentation par équations d'état.
- **copie « philosophique »** : on part de l'hypothèse que la faible sensibilité des filtres LC est due au couplage qui existe entre les composants du réseau. On en déduit (conjecture) qu'en ajoutant des couplages entre blocs actifs du premier ou second ordre on diminuera les sensibilités. (synthèse par cellules biquadratiques imbriquées).

9.5. Blocs de base des filtres cascades

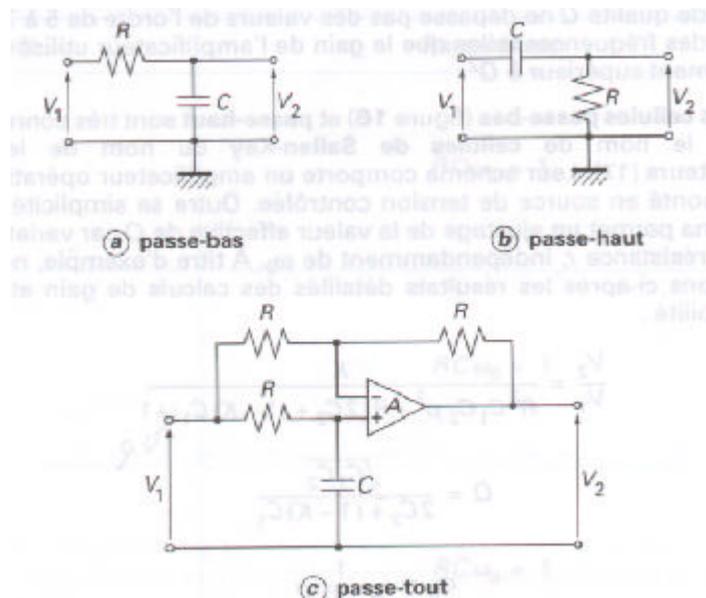
9.5.1. Cellule du premier ordre :

La forme générale de la fonction de transfert est :

$$B(p) = \frac{bp + c}{ap + 1}$$

ce qui nous permet d'obtenir :

<p>une cellule passe-bas (cellule RC) $b=0, c=1$ une cellule passe-haut, (cellule CR) $a=b, c=0$ une cellule passe-tout (correcteur de phase)</p>



9.5.2. Cellule du second ordre :

La forme générale de la fonction de transfert est :

$$B(p) = K \frac{a' p^2 + b' p + c}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{Qp}{\omega_0} + 1}$$

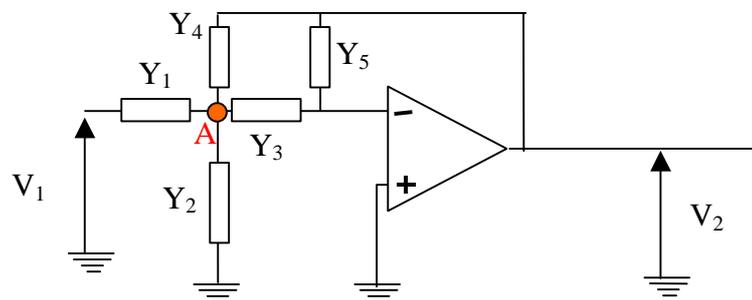
Qui peut se décliner en :

<p>cellules sans zéro de transmission (fréquence d'atténuation infinie)</p> <p> passe-bas pour $a'=b'=0$ et $c'=1$</p> <p> passe-haut pour $b'=c'=0$ et $a'=1/\omega_0^2$</p> <p> passe-bande pour $a'=c'=0$ et $b'=Q/\omega_0$</p> <p> passe-tout pour $a'=1/\omega_0^2$, $b'=-Q/\omega_0$ et $c'=1$</p> <p>cellules avec zéro de transmission</p> <p> passe-bas et passe-haut avec $b'=0$</p> <p> cellule de notch avec $a'=1/\omega_0^2$, $b'=-Q/\omega_0$ et $c'=1$</p> <p> ...</p>

9.5.2.1. Cellule du second ordre à un AOP, sans zéro de transmission:

9.5.2.1.1. Cellule de Rauch

Cellule constituée d'un AOP et de cinq dipôles passifs en double contre réaction. L'AOP est monté avec contre réaction multiple (MLF : Multiple Loop Feedback)



Calculer $F(p)=V_2/V_1$ pour le montage ci-dessus.

...

$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

Selon la nature des éléments Y_i (Résistances ou condensateurs uniquement), on peut obtenir des filtres :

- Passe-bas
- Passe-haut
- Passe-bande

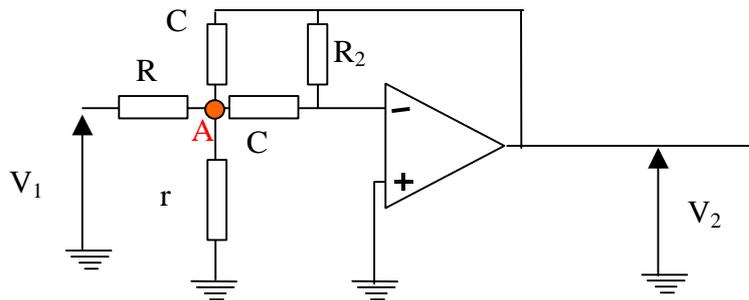


Calculer $F(p)=V_2/V_1$ avec $Y_1 = 1/R$, $Y_2 = C_1p$, $Y_3 = 1/R$, $Y_4 = 1/R$, $Y_5 = C_2p$.
Selon la valeur du rapport C_1/C_2 , avec quels types de filtres connus pouvez vous identifier ?

...

Remarque :

La cellule de Rauch est la plus utilisée dans le milieu industriel sous la forme d'une cellule passe-bande :



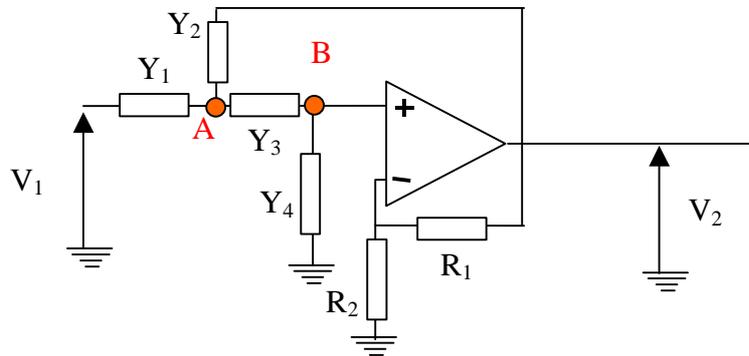
$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = - \frac{-kR_2Cp}{kR_2RC^2p^2 + Cp(2kR) + 1}$$

avec

$$k = \frac{r}{r + R}$$

L'avantage de cette cellule est d'offrir un gain réglable par la résistance R, sans influencer sur la pulsation de coupure.

9.5.2.1.2. Cellule de Sallen et Key



La fonction de transfert du filtre est définie par la relation :

$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{g_0 Y_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3(Y_4 - g_0 Y_2)}$$

avec

$$g_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

Remarque :



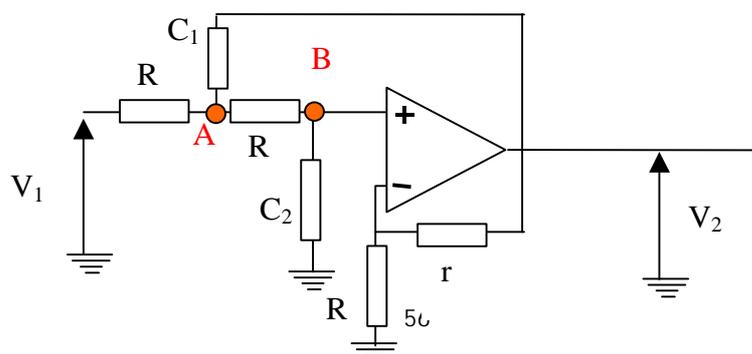
Calculer $F(p) = V_2/V_1$ avec $Y_1 = 1/R$, $Y_2 = C_2 p$, $Y_3 = 1/R$, $Y_4 = C_1 p$
La forme obtenue est-elle sans conditions ?

...

$$g_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_2} < 1 + 2 \frac{C_1}{C_2}$$

Remarque :

La cellule de Sallen-Key est la plus utilisée dans le milieu industriel sous la forme d'une cellule passe-bas ou passe-haut :



$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{k}{R^2 C_1 C_2 p^2 + R(2C_2 + (1-k)C_1)p + 1}$$

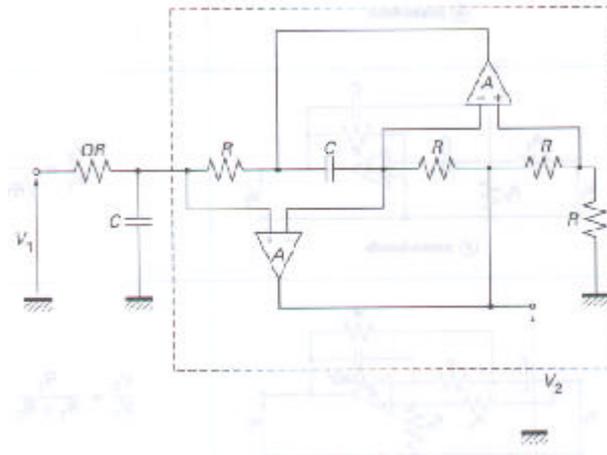
avec

$$k = \frac{r + R}{R}$$

9.5.2.2. Cellules biquadratiques à deux AOP:

L'intérêt majeur de ces cellules est d'utiliser un convertisseur d'impédance généralisé (GIC) présenté précédemment.

A titre d'exemple, on peut considérer le montage suivant, qui est un circuit passe-bande avec :



$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{pRC/Q}{R^2 C^2 p^2 + pRC/Q + 1}$$

La partie en pointillés est équivalente à une inductance L de valeur CR^2 .

9.5.3. Principe des filtres à variable d'état:

On peut décomposer une fonction de transfert d'ordre n en une somme de fonctions du premier ordre, ce qui permet de réaliser une fonction biquadratique à l'aide d'intégrateurs et d'additionneurs-soustracteurs.



Soit la fonction passe-haut du second ordre :

$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{a' p^2}{ap^2 + bp + 1}$$

Mettre sous la forme :

$$V_2(p) = aV_1(p) + b \frac{V_2(p)}{p} + g \frac{V_2(p)}{p^2}$$

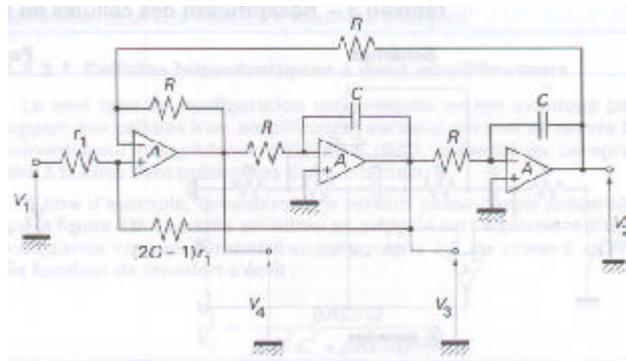
Proposer le schéma bloc associé

...

9.5.3.1. Cellule de Kerwin, Huelsman, Newcombe (KHN):

Cette cellule est obtenue en arrangeant les signes de la représentation schématique présentée pour le filtre à variable d'états.

La cellule KHN, présente la particularité d'offrir trois sorties :
 passe-bas en V2,
 passe-haut en V4,
 passe-bande en V3.



En effet, on peut écrire, en considérant les AOP comme étant parfaits :

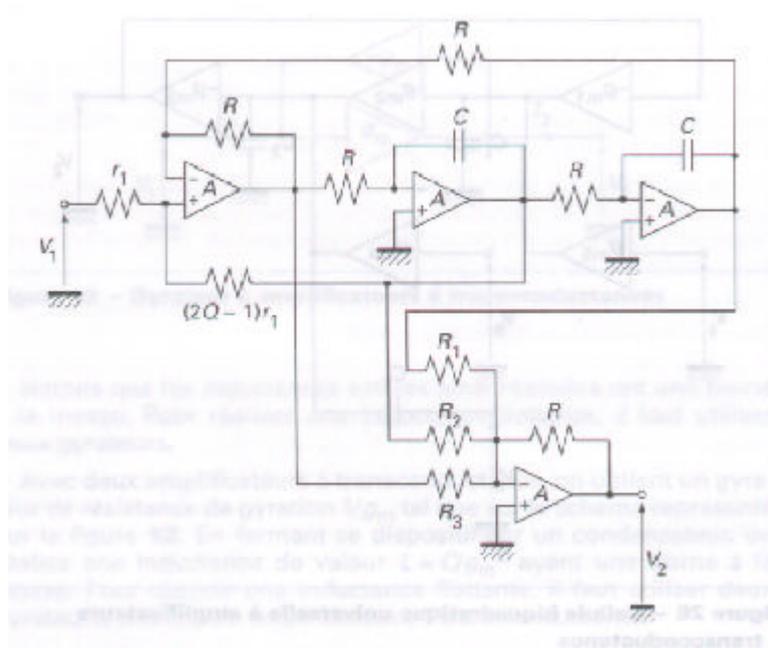


Démonstration...

Il s'en suit qu'en ajoutant algébriquement ces trois sorties pondérées, on peut obtenir n'importe quelle fonction biquadrique.

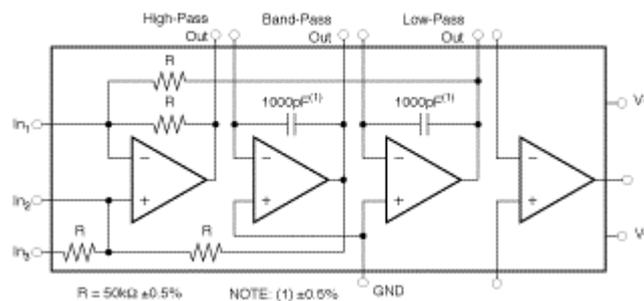


Calculer la fonction de transfert $\frac{V_2(p)}{V_1(p)}$ sur le schéma suivant.



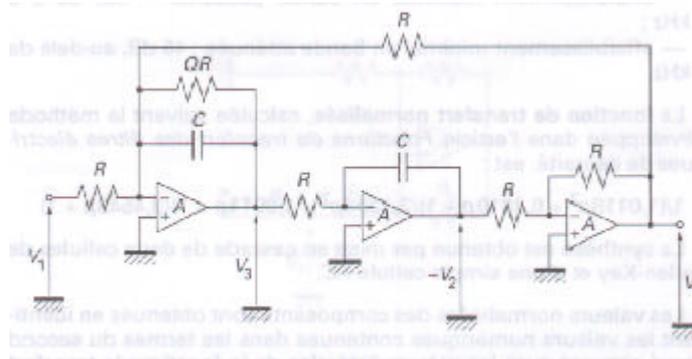
...

C'est la raison pour laquelle certains fabricants de composants proposent les cellules KHN, avec un AOP en plus (c'est le cas du circuit Burr-Brown UAF 42 (Universal Active Filter (<http://www.burr-brown.com/Products/DataSheets/UAF42.html>), dont la représentation est donnée ci-dessous)



9.5.3.2. Cellule de Tow et Thomas

La cellule de Tow et Thomas présente la particularité d'avoir les entrées (+) des 3 AOP directement reliées à la masse. Cette configuration présente donc l'avantage de minimiser l'influence des capacités parasites, qualité importante si les condensateurs sont réalisés directement sur le circuit intégré. Par contre il faudra s'assurer que les AOP présentent des courants de polarisation symétriques pour les 2 entrées.



Dans cette configuration seules les sorties :

- passe-bas (en V_2)
- passe-bande (en V_3)
- sont disponibles.

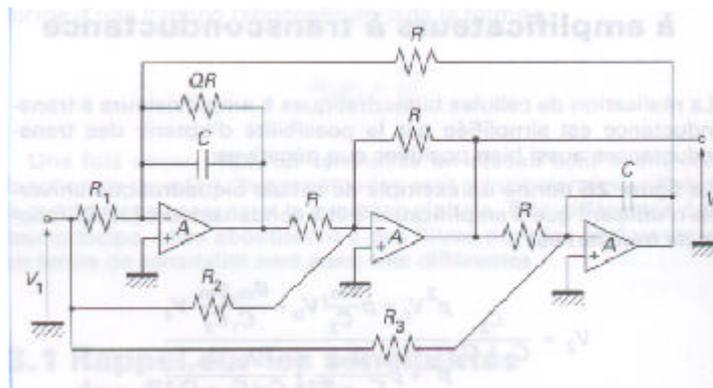
On a la relation (avec AOP parfaits)

$$\frac{V_2}{V_1} = - \frac{1}{R^2 C^2 p^2 + \frac{RC}{Q} p + 1}$$



En combinant la cellule de Tow et Thomas comme présenté ci-après, on obtient une cellule biquadratique universelle.

Calculer la fonction de transfert $\frac{V_2(p)}{V_1(p)}$.



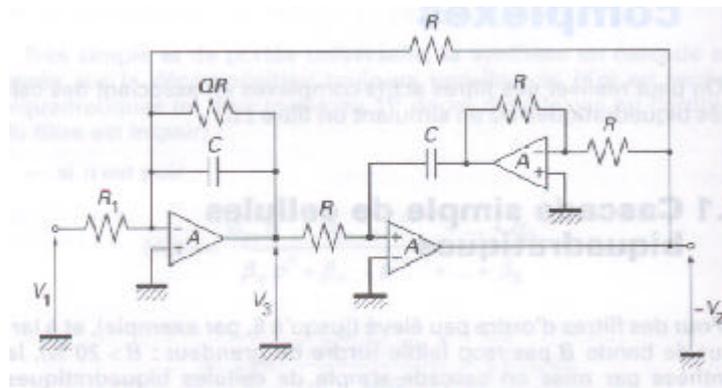
9.5.3.3. Cellule de Akerberg et Mossberg

Les deux types de cellules précédentes sont bien adaptées à des filtres dont la fréquence de travail est très inférieure à f_T des AOPs. On pourrait démontrer que ces 2 cellules voient aux

fréquences élevées leur coefficient Q s'élever (Q enhancement) à cause des déphasages introduits par les AOPs et de la valeur finie du gain. Pour remédier à cet inconvénient, on utilise une compensation consistant à introduire un AOP dans la boucle de retour d'un des intégrateurs. (les 2 AOPs devant être parfaitement appariés)

Remarque :

Comme on place un inverseur dans la boucle de retour de l'intégrateur, le rebouclage s'effectue sur l'entrée positive de l'AOP.



9.6. Réalisation de filtres actifs complexes

9.6.1. Filtre passe-bas Tchebycheff ordre 5 :



Exercice TD :

On veut déterminer le circuit assurant la fonction : Filtre passe-bas Tchebycheff avec les caractéristiques à partir de cellules de Sallen-Key:

- * affaiblissement maximal en bande passante : 1dB de 0 à 1kHz,
- * affaiblissement minimal en bande atténuée : 40dB au delà de 2kHz.

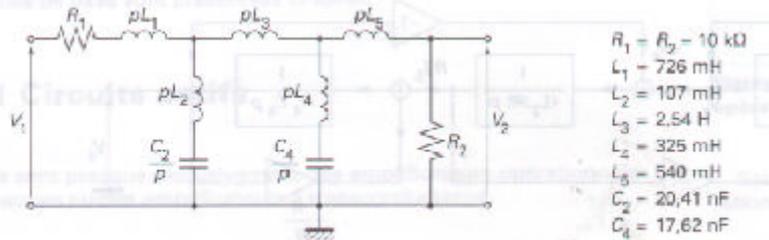
... calculs sous MATLAB ... $1/H(p) = 8.14p^5 + 7.63p^4 + 13.75p^3 + 7.93p^3 + 4.73p + 1$

9.6.2. Implémentation sur silicium d'un filtre LC avec des FDNR:

Sur la base d'un filtre LC, on applique la transformation de Brutton, qui consiste à multiplier toutes les impédances du filtre LC par $1/p$.



Soit le filtre passe-bas, Tchebycheff inverse présenté ci-dessous :



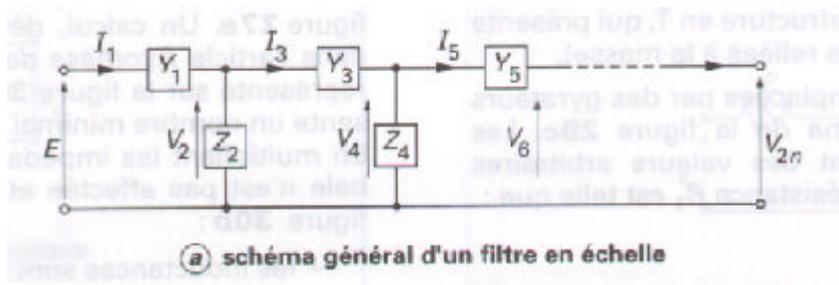
Ⓐ schéma du prototype LC

Effectuer la synthèse par des FDNR

9.6.3. Synthèse « leap-frog » d'un filtre LC :

Le principe consiste à réaliser un réseau régi par les mêmes équations différentielles que le filtre LC prototype, ce réseau ne comportant que des intégrateurs et des additionneurs-soustracteurs (comme dans le cas de filtres à variable d'états).

Dans le cas d'un filtre passe-bas ou passe-haut cette technique, très mécanique pour sa mise en place, est appelée synthèse leap-frog. (Pour un passe-bande la technique sera plus délicate...)



Ⓐ schéma général d'un filtre en échelle

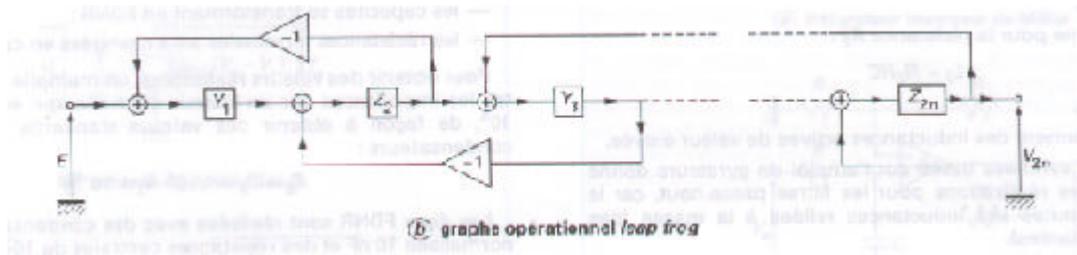
Soit le filtre LC en échelle présenté ci-dessus, pour lequel on notera Z_i et Y_i respectivement les impédances et admittances.

On a les relations :

$$\begin{aligned} (E - V_2)Y_1 &= I_1 & (I_1 - I_3)Z_2 &= V_2 \\ (V_2 - V_4)Y_3 &= I_3 & (I_3 - I_5)Z_4 &= V_4 \end{aligned}$$

$$(V_{2n-2} - V_{2n})Y_{2n-1} = I_{2n-1} \quad (I_{2n-1} - I_{2n+1})Z_{2n} = V_{2n}$$

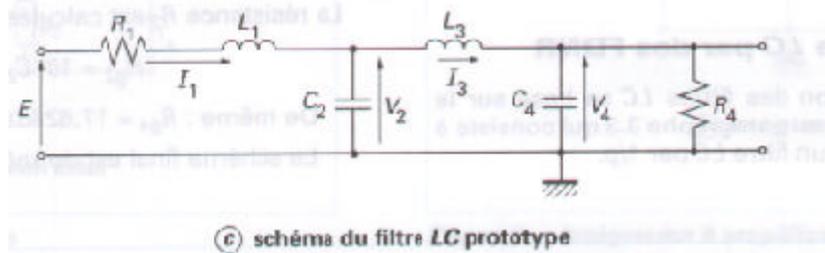
D'où la représentation schématique sous la forme d'un graphe opérationnel :



A noter que cette technique est souvent employée lors de la synthèse de filtres à capacités commutées.



Effectuer la synthèse leap frog du prototype LC suivant :



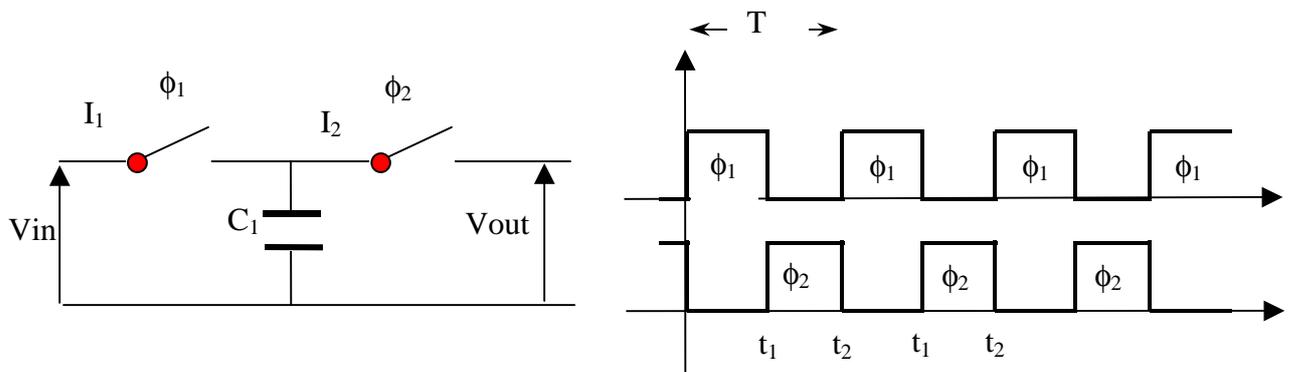
10. Filtrés à capacités commutées

La technologie intégrée ne permet pas dans tous les cas :

- de réaliser des inductances supérieures à quelques nH (nous venons de démontrer comment contourner ce problème)
- de réaliser des résistances (par diffusion, ou en polysilicium, ou encore sous forme de canaux MOS) très précises (et linéaires) ou de grande dynamique (malgré les FDNR)

Le principe de base des filtres à capacités commutées (1972) est de remplacer les résistances par un montage ne comprenant que des :

- condensateurs,
- interrupteurs analogiques, alternativement fermés puis ouverts, qu'au rythme d'une horloge $T=1/f_n$ décomposée en deux phases de durée $T/2$.
- AOP intégrateurs.



... résistance apparente :

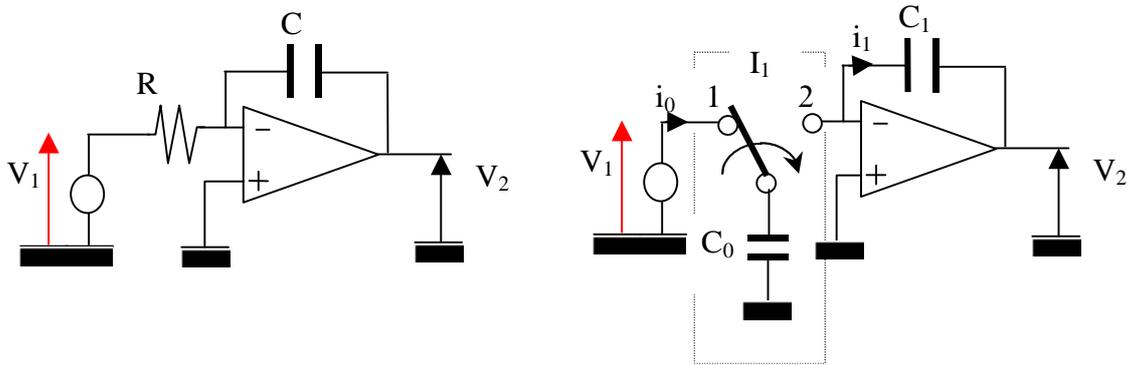
$$R_{app} = \frac{(V_{OUT} - V_{IN})}{I_{Moyen}} = \frac{1}{f_n C_1}$$

Cette démonstration est valable si :

- l'ensemble est inséré entre deux sources de tension,
- la fréquence d'horloge est grande devant la fréquence d'évolution de V_{IN} et V_{OUT} ,
- les interrupteurs I_1 et I_2 n'ont aucun temps de recouvrement,
- les régimes transitoires sont amortis entre les coups d'horloge,
- C_1 (valeur faible si capacité intégrée dans le circuit intégré) doit être supérieure aux capacités parasites des interconnexions,

Sous ces conditions, la résistance obtenue est essentiellement liée à la valeur de C_1 .

10.1. Intégrateur à capacités commutées



10.2. Réalisation technologique des interrupteurs

Les interrupteurs peuvent être réalisés à partir de transistors MOS commandés par des signaux en opposition de phase, sans recouvrement.

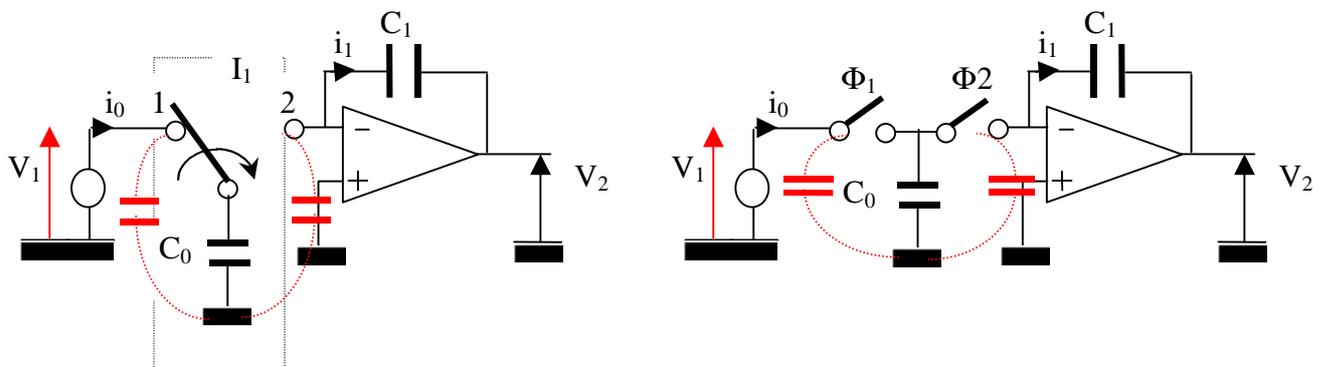
Dans le cadre de l'intégrateur à capacités commutées réalisé précédemment, on remarque que la fonction de transfert est définie par un rapport de capacités :

$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} \cong - \frac{C_0}{C_1} \frac{1}{pT_H}$$

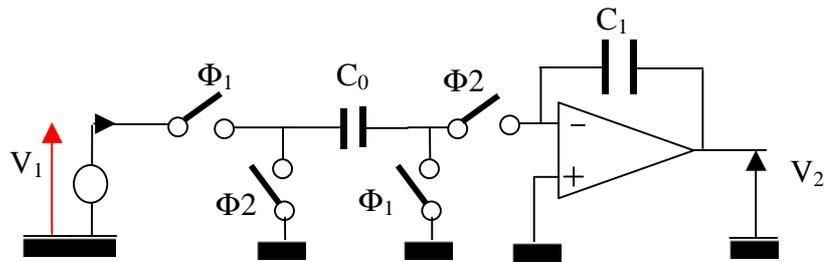
Cela présente l'avantage technologique, de s'affranchir des dérives de réalisation technologique sur les capacités C_1 et C_0 .

Le paramètre T_H , sera obtenu à partir d'un quartz.

Toutefois dans le calcul effectué, on ne tient pas compte des capacités parasites, liées aux interconnexions, et surtout aux interrupteurs.



Intégrateur sensible aux capacités parasites



Intégrateur non-inverseur « moins-sensible » aux capacités parasites

Au temps t_2^- (F2 est encore fermé) :

$$C_2[V_S(2nt) - V_S(2n-2)t] = C_1V_e(2n-1)t$$

avec

$$t = \frac{T_H}{2}$$

ce qui s'écrit :

$$C_2V_S(2nt)[1 - z^{-1}] = C_1V_e(2n-1)t$$

$$V_S(2nt) = \frac{C_1}{C_2(1 - z^{-1})}V_e(2n-1)t$$

Au temps t_1^- (F1 est encore fermé) :

$$C_2[V_S(2n-1)t - V_S(2n-3)t] = C_1V_e(2n-3)t$$

ce qui s'écrit :

$$C_2V_S(2nt)[1 - z^{-1}] = C_1V_e(2n-1)t$$

$$V_S(2n-1)t = \frac{C_1z^{-1}}{C_2(1 - z^{-1})}V_e(2n-1)t$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} V_S(2nt) \\ V_S(2n-1)t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(1 - z^{-1})} \\ 0 & \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{C_1}{C_2}V_e(2nt) \\ \frac{C_1}{C_2}V_e(2n-1)t \end{bmatrix}$$

On remarque que $H_{21} = H_{11} = 0$ ce qui traduit que la sortie ne dépend pas de la tension d'entrée aux temps t_1 (puisque le premier interrupteur est ouvert)

En pratique on prendra comme fonction de transfert l'une ou l'autre des fonctions H_{12} ou H_{22} .

Si la pulsation du signal d'entrée, ω est telle que $\omega T_H \ll 1$, alors les deux fonctions de transfert sont égales, ou encore on maintiendra le signal d'entrée constant sur l'intervalle T à l'aide d'un bloqueur.

Le signal de sortie d'un filtre à capacités commutées présentera la forme d'un signal en escalier, que l'on devra lisser afin d'obtenir l'équivalent d'un filtre analogique.

10.3. Transformation montages intégrateurs, en filtres à capacités commutées

