

Retour d'état et Observateur

1 Le retour d'état

Soit le système linéaire stationnaire défini par sa représentation d'état $(A, B, C, 0)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathcal{R}^m$ est la commande et $y(t) \in \mathcal{R}^p$ est la sortie mesurée du système. Ce système peut être représenté par le schéma bloc suivant 1.

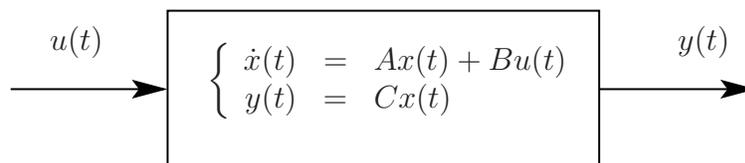


Figure 1: Schéma bloc d'un modèle espace d'état

1.1 Rappel

On désire asservir le système à une valeur $y_{ref}(t)$ tout en imposant les dynamiques du régime transitoire et en maintenant une erreur petite ou nulle en régime permanent. Modifier le régime transitoire du système (1), c'est modifier les pôles de la matrice dynamique A . On implante ainsi une loi de commande¹ par retour d'état qui prend en compte les valeurs de l'état à l'instant t :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

La loi de commande² s'écrit alors :

$$u(t) = -Kx(t) + v(t)$$

¹Cette technique s'appelle également commande par placement de pôles car elle permet de placer les pôles de la boucle fermée n'importe où dans le plan complexe.

²L'implantation de cette commande par retour d'état nécessite la mesure de **tous** les états du système ce qui est une hypothèse assez forte.

où $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ est une matrice appelée gain du retour d'état et $v(t)$ est une nouvelle entrée pour le système en boucle fermée (eventuellement ce dernier signal peut représenter la consigne). C'est une commande en boucle fermée car elle dépend des signaux internes du système même si elle ne prend pas en compte directement la sortie du système $y(t)$ comme le montre la figure 2.

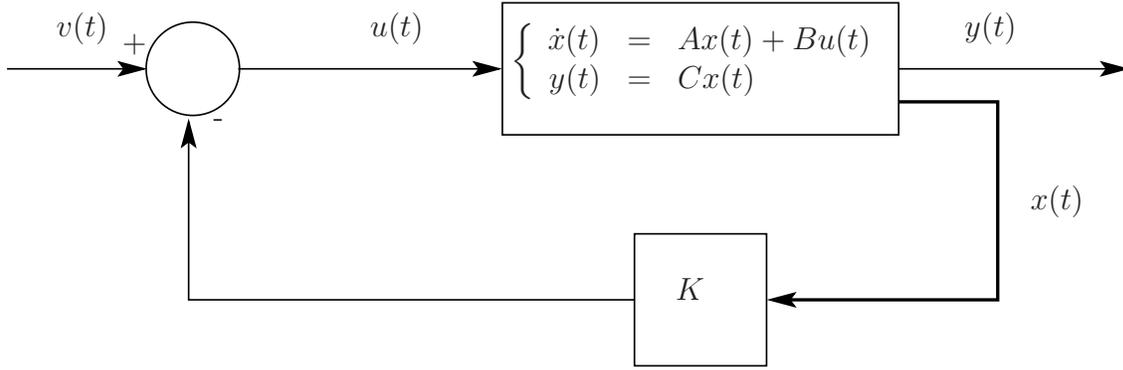


Figure 2: Le schéma bloc du retour d'état

Remarque 1 Dans le cas d'un système à une entrée, la commande par retour d'état s'écrit $u(t) = -Kx(t) + v(t) = -\sum_{i=1}^n k_i x_i(t) + v(t)$ avec $K = [k_1, \dots, k_n]$.

Le système en **boucle fermée** s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

et est représenté par le schéma bloc compact de la figure 3

Remarque 2 Nous pouvons modifier tous les pôles du système ssi le système est commandable, c'est-à-dire ssi la paire (A, B) vérifie le critère de commandabilité $\text{rg}(\mathfrak{C}) = n$ avec

$$\mathfrak{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

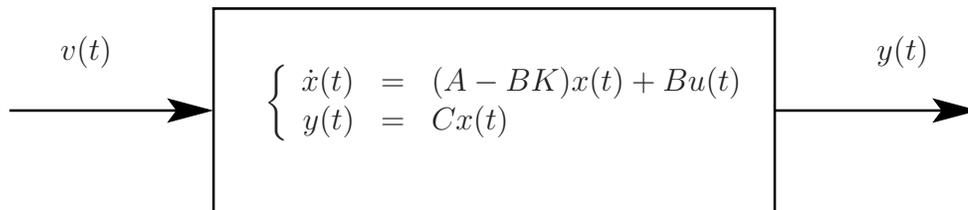


Figure 3: Le schéma bloc du retour d'état version 2

1.2 Calcul du gain de retour d'état K dans le cas SISO

Soit le système défini par le triplet (A, B, C) et l'état $x(t)$. On suppose que le système est commandable, c'est-à-dire que la matrice de commandabilité est de rang plein. Soit le nouvel état $x_c(t)$ associé au système mis sous forme commandable représenté par le triplet (A_c, B_c, C_c) . L'état x_c ainsi que les matrices A_c, B_c, C_c sont déterminées par la matrice de passage P_c , avec:

$$x = P_c x_c$$

$$A_c = P_c^{-1} A P_c, B_c = P_c^{-1} B, C_c = C P_c$$

La loi de commande par retour d'état s'écrit donc sous la forme

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) = -\overbrace{K P_c}^{K_c} x_c(t) + v(t)$$

où K_c est un gain du retour d'état dans la base commandable. Une fois K_c déterminé, un simple calcul $K = K_c P_c^{-1}$ permet de calculer le retour d'état dans la base initiale. Dans la base commandable, les matrices A_c et B_c s'écrivent ainsi :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où les coefficients $a_i, i \in \{0, n-1\}$ sont les coefficients du polynôme caractéristique associé à la matrice A , $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$. La matrice dynamique du système bouclé par le retour d'état s'écrit alors

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - k_{c1} & -a_1 - k_{c2} & \dots & \dots & -a_{n-1} - k_{cn} \end{bmatrix}$$

La matrice $A_c - B_c K_c$ est sous forme commandable et on peut alors aisément calculer le polynôme caractéristique du système en boucle fermée $P_{A_c - B_c K_c}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_c + B_c K_c) = \lambda^n + (a_{n-1} + k_{cn}) \lambda^{n-1} + \dots + (a_0 + k_{c1})$. Or, nous voulons placer les pôles

de la boucle fermée en p_1, \dots, p_n . Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donc uniquement déterminé par le choix des pôles désirés et nous avons donc la relation suivante:

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_n) = P_{des}(\lambda) = \lambda^n + f_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + f_0 = P_{A_c - B_c K_c}(\lambda)$$

Nous en tirons donc les valeurs du gain K_c permettant d'obtenir le polynôme désiré et donc de placer les pôles en p_1, \dots, p_n :

$$\begin{cases} k_{c1} = -a_0 + f_0 \\ k_{c2} = -a_1 + f_1 \\ \vdots \\ k_{cn} = -a_{n-1} + f_{n-1} \end{cases} \quad (3)$$

Le gain du correcteur K dans la base initiale s'écrit alors :

$$K = [f_0 - a_0, \dots, f_{n-1} - a_{n-1}]P_c^{-1}$$

Remarque 3 Le calcul de la matrice de passage P_c n'est pas très compliqué dans le cas SISO. Notons que la matrice de passage doit vérifier :

$$AP_c = P_c A_c, \quad B = P_c B_c$$

Ces deux dernières équations peuvent être résolues matriciellement en notant $P = [P_1, \dots, P_n]$. La dernière équation $B = P_c B_c$ nous permet d'obtenir directement $P_n = B$. L'utilisation de la première équation nous permet alors de résoudre terme à terme l'équation pour obtenir :

$$\begin{cases} P_n = B \\ P_{n-1} = AB + a_{n-1}B \\ P_{n-2} = A^2B + a_{n-1}AB + a_{n-2}B \\ \vdots \\ P_1 = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I) \end{cases}$$

Remarquons que cette dernière équation peut s'écrire d'une manière plus compacte:

$$P = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

On reconnaît la matrice de commandabilité \mathfrak{C} .

Finalement, nous pouvons proposer le théorème suivant:

Théorème 1 Soit le système commandable défini par le triplet (A, B, C) , les coefficients du polynôme caractéristique de A sont notés $a_i, \forall i \in \{0, n-1\}$, i.e. $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$. Soient p_1, \dots, p_n les pôles désirés du système en boucle fermée. Les coefficients du polynôme dont les racines sont $p_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ sont notés $f_i, \forall i \in \{0, n-1\}$. Le gain du retour d'état K permettant de placer les pôles du système en boucle fermée en (p_1, \dots, p_n) s'écrit alors :

$$K = [f_0 - a_0, \dots, f_{n-1} - a_{n-1}](\mathfrak{C}\mathbb{A})^{-1}$$

où \mathfrak{C} représente la matrice de commandabilité de la paire (A, B) , \mathbb{A} représente une matrice dépendant uniquement des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Application

1.3.1 Une première méthode

Soit le système définie par le quadruplet $\{A, B, C, D\}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = 0 \quad (5)$$

On désire placer les pôles du système³ en -3 et -4. Le polynôme caractéristique désiré s'écrit donc $P_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$. La première étape est de vérifier que le système est commandable. La matrice de commandabilité s'écrit

$$\mathfrak{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et est de rang 2. Calculons $A - BK$ et le polynôme caractéristique associé $P_{A-BK}(\lambda)$.

$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & -1 - k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc le polynôme caractéristique $P_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 + (1 + k_1)\lambda + 1 + k_2$.

En boucle fermée, ce polynôme caractéristique admet comme racine -3 et -4 et en égalant $P_{A-BK}(\lambda) = P_{des}(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$, on obtient la valeur de k_1 et k_2 , et donc la valeur de K , $K = [6 \quad 11]$.

³Imposer des pôles en -3 et -4 permet d'obtenir un régime transitoire apériodique de constante de temps 1/3

1.3.2 Méthode 2

La seconde méthode utilise la forme compagne de commande⁴ représenté par le quadruplet $\{A_c, B_c, C_c, D_c\}$. Le système dans la base compagne de commande s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x_c(t) \end{cases} \quad (6)$$

avec

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, C_c = [1 \ 0], B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_c = 0$$

La relation entre les deux représentations s'écrit à l'aide du changement de base suivant :

$$x(t) = P_c x_c(t)$$

avec $P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La commande implantée est donc de la forme $u(t) = -K_c x_c(t) + v(t)$. Le système en boucle fermée s'écrit dans la base compagne de commande :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= (A_c - B_c K_c) x_c(t) + B_c v(t) \\ y(t) &= C_c x_c(t) \end{cases} \quad (7)$$

Calculons $A_c - B_c K_c$:

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice reste en forme compagne de commande, il est donc inutile de calculer le polynôme caractéristique. Par identification, nous obtenons :

$$-1 - k_{1c} = -12, \quad -1 - k_{2c} = -7$$

La matrice recherchée est donc $K_c = [11 \ 6]$.

Or, nous voulons écrire le retour d'état en fonction des états $x(t)$ initiaux. Le calcul de l'inverse de la matrice de changement de base nous permet de calculer aisément le gain du retour d'état K dans la base initiale. $K = K_c P_c^{-1} = [6 \ 11]$

Remarque 4 *Il est en général plus facile de déterminer l'expression du système en base compagne de commande et ensuite de calculer un retour d'état dans cette base, plutôt que de calculer directement le retour d'état dans la base initiale. Effectivement, nous évitons le calcul du polynôme caractéristique en fonction des inconnues k_i .*

Les courbes de simulation pour une entrée d'échelon unitaire sont donnés par les courbes suivantes 4.

Nous avons effectivement modifier le comportement du régime transitoire en modifiant les pôles du système. Cependant, il existe une erreur important en régime permanent.

⁴Comme le système est commandable, le forme compagne de commande existe.

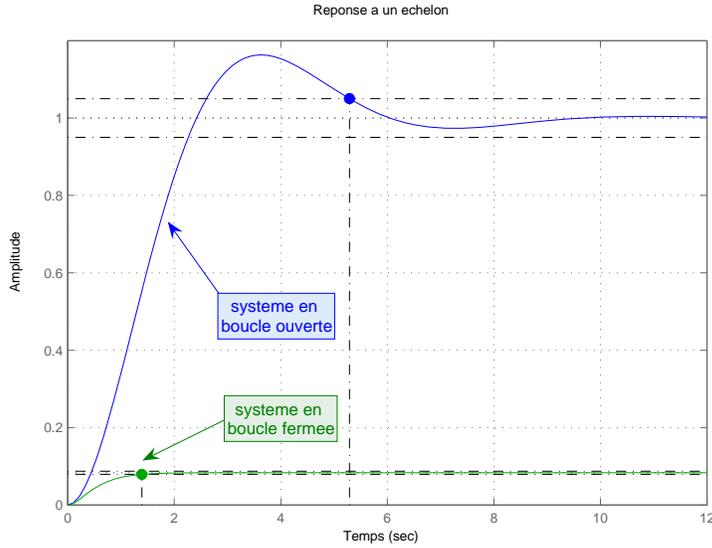


Figure 4: Réponse du système (5) en BO et BF, asservi par un retour d'état

1.4 Réglage du régime permanent- Cas des systèmes SISO

On suppose que le système est SISO⁵. Les pôles du système permettent de régler la dynamique du système, c'est-à-dire, le régime transitoire. Par contre, cette technique ne permet pas de régler le problème de la précision. Nous ne pouvons pas choisir le régime permanent du système en boucle fermée par le choix de K . Nous proposons une première structure de commande permettant d'assurer une erreur de position nulle en régime permanent.

$$u(t) = -Kx(t) + Ny_{ref}(t)$$

où N est un gain matriciel permettant de régler le gain statique du système en boucle fermée (c.f. figure).

Supposons que la matrice de transfert directe D est nulle. Soit $G(p) = C(pI - A)^{-1}B$ la fonction de transfert associée. La fonction de transfert du système en boucle fermée s'écrit $G_{bf}(p) = C(sI - A + BK)^{-1}BN$. Supposons que $y_{ref}(t) = y_{ref}$ est une constante. Pour que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{ref}$, il est donc nécessaire⁶ que $G_{bf}(0) = 1$, c'est à dire

$$N = \frac{1}{C(-A + BK)^{-1}B}$$

⁵Single Input Single Output en anglais pour système avec une entrée et une sortie.

⁶Le calcul de cette limite est possible car le système est stable en boucle fermée.

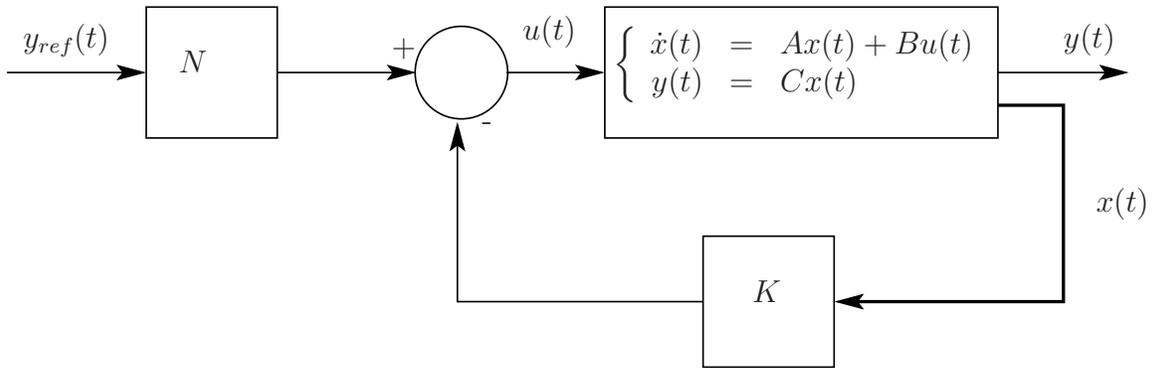


Figure 5: Commande par retour d'état et gain précompensateur

1.5 Application

Si on reprend l'exemple précédent, on calcule aisément $N = 12$ et on obtient les courbes suivantes (figure) pour la réponse du système en boucle fermée.

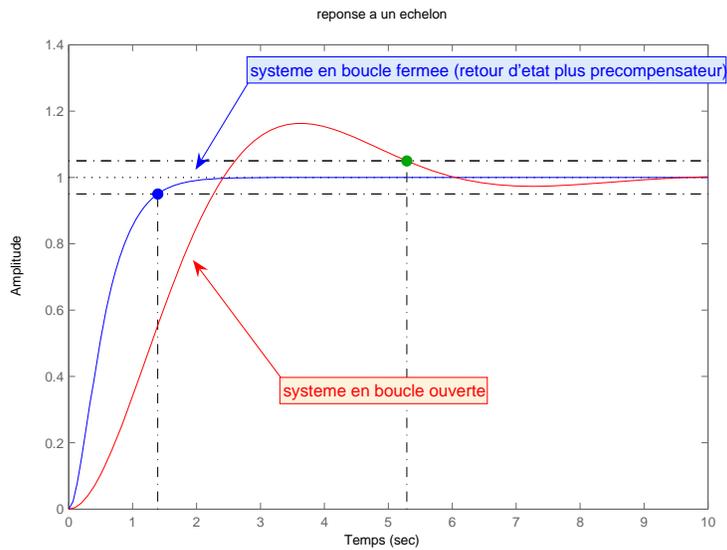


Figure 6: Réponse du système (5) asservi par un retour d'état et un précompensateur

1.6 Commande par retour d'état et action intégrale - cas SISO

1.6.1 Insuffisance du retour d'état

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la commande par retour d'état permet de modifier les pôles du système en boucle fermée. Cependant, cette dernière ne permet pas d'assurer un erreur de position nulle. Une première possibilité pour résoudre le problème est d'ajouter un gain précompensateur pour assurer un gain statique unitaire pour la boucle fermée. Une deuxième possibilité réside dans l'ajout d'un intégrateur dans la chaîne directe. Pour montrer l'intérêt d'une telle commande, choisissons un système SISO modélisé à l'aide de la forme commandable et qui ne possède pas de zéros. Dans ce cas précis, les états du système sont la sortie et ses dérivés successives.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Le correcteur implanté est défini par le retour d'état suivant:

$$u(t) = -Kx(t) + e(t)$$

où $e(t)$ est la consigne. Ce retour d'état peut donc s'exprimer à l'aide du formalisme de Laplace:

$$U(p) = E(p) - (k_1 + k_2p + \dots + k_np^{n-1}) Y(p)$$

On obtient alors le schéma bloc du système bouclé suivant : Il apparait clairement que

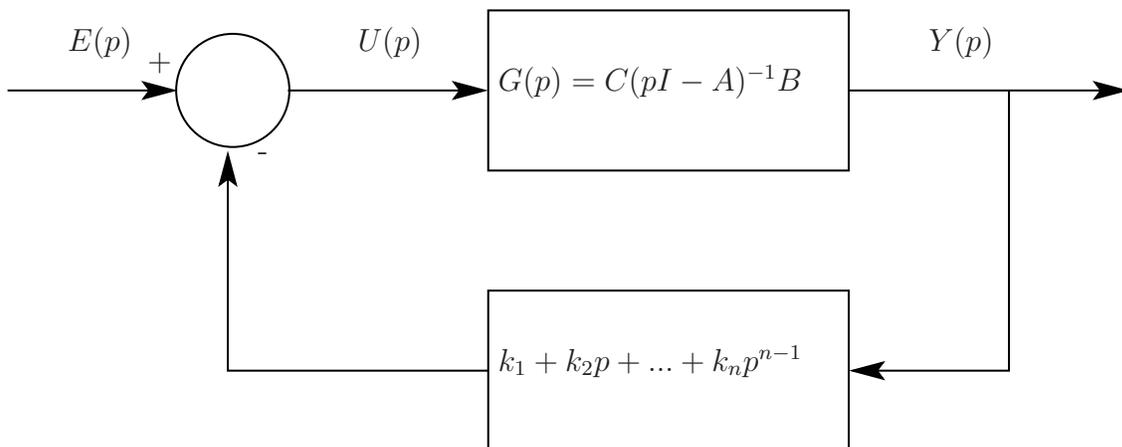


Figure 7: Le retour d'état en utilisant le formalisme de Laplace

le retour d'état est une généralisation de la commande proportionnelle dérivateur. En

notant $Q(p) = k_1 + k_2p + \dots + k_np^{n-1}$, le calcul de la boucle fermée entre $E(p)$ et $Y(p)$ s'écrit:

$$Y(p) = \frac{G(p)}{1 + Q(p)G(p)}E(p)$$

Cette fonction de transfert n'a pas un gain statique unitaire ce qui ne permet pas d'obtenir une erreur de position nulle en boucle fermée. Si on analyse le système bouclée en terme de réponse fréquentielle, il apparait que le système bouclé ne possède pas d'effet intégrale dans la chaîne directe.

1.6.2 Ajout d'une action intégrale

Principe

Le principe est d'ajouter un intégrateur dans la chaîne directe comme le montre la figure

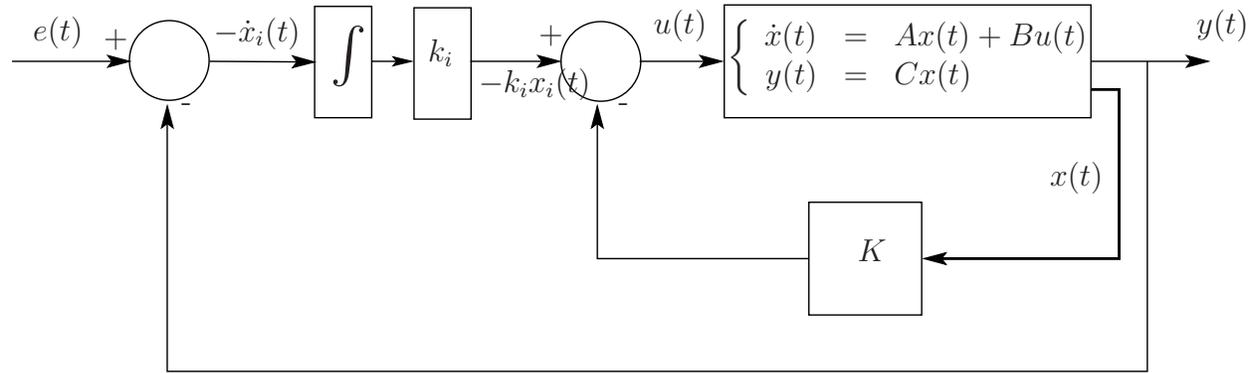


Figure 8: Commande par retour d'état et action intégrale

Remarquons que pour des raisons d'homogénéité, on note le signal d'erreur $e(t) - y(t)$, $-\dot{x}_i(t)$, le signe moins étant ajouté afin d'obtenir une expression homogène pour l'expression de la loi de commande.

Les équations de la boucle fermée s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ \dot{x}_i(t) = y(t) - e(t) \end{cases}$$

La loi de commande implantée est définie par:

$$u(t) = -k_i x_i(t) - Kx(t) = - \begin{bmatrix} K & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

C'est donc une commande par retour d'état pour le système augmenté suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v(t)$$

ou en prenant $z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$,

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) + \hat{D}e(t) \\ u(t) &= -\tilde{K}z(t) \end{cases}$$

L'objectif de la commande est double:

1. Assurer la stabilité du système augmenté (et donc plus particulièrement le système original) en boucle fermée.
2. Assurer une erreur nulle en régime permanent:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i(t) = 0$$

Etablissement des équations en régime permanent

En régime permanent, les différents signaux convergent vers une valeur finie :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= x_\infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) &= x_{i\infty} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= u_e \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= e_0 \end{cases}$$

Le calcul des points singuliers du système augmenté nous donne alors l'équation statique :

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) + \hat{D}e(t) \\ u(t) &= -\tilde{K}z(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire les relations suivantes

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{A}z_\infty + \hat{B}u_e + \hat{D}e_0 \\ u_e &= -\tilde{K}z_\infty \end{aligned}$$

ou

$$0 = (\hat{A} - \hat{B}\tilde{K})z_\infty + \hat{D}e_0$$

Etablissement des équations en régime dynamique

Afin d'observer la convergence des états vers leurs valeurs en régime permanent, formons l'erreur :

$$\epsilon(t) = \begin{bmatrix} x(t) - x_\infty \\ x_i(t) - x_{i\infty} \end{bmatrix}$$

la dynamique de l'erreur est donc régie par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{\epsilon}(t) = \hat{A}\epsilon(t) + \hat{A}z_\infty - \hat{B}\tilde{K}\epsilon(t) - \hat{B}\tilde{K}z_\infty + \hat{D}e(t)$$

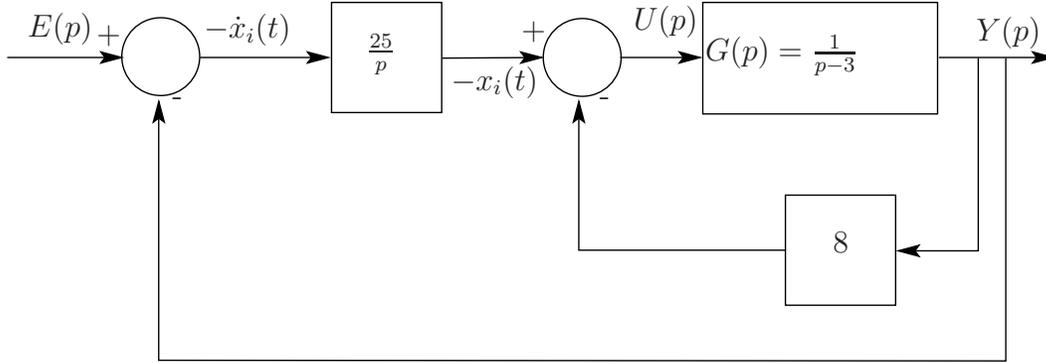


Figure 9: Commande par retour d'état et action intégrale pour l'exemple (8)

ou

$$\dot{\epsilon}(t) = (\hat{A} - \hat{B}\tilde{K})\epsilon(t) + \underbrace{(\hat{A} - \hat{B}\tilde{K})z_\infty + \hat{D}e(t)}_{=0}$$

Afin de prouver que la dynamique de l'erreur est stable et tend vers zéro pour des temps suffisamment grands, il faut choisir \tilde{K} tel que $\hat{A} - \hat{B}\tilde{K}$ soit stable. Par ailleurs, le choix des pôles de $\hat{A} - \hat{B}\tilde{K}$ permet d'imposer la vitesse de convergence de l'erreur vers zéro et donc de $x(t)$ vers x_∞ . Le problème de la synthèse d'une commande par retour d'état avec action intégrale revient donc au calcul classique d'un retour d'état sur un système augmenté $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, 0)$.

1.6.3 Exemples

Un premier exemple: Soit l'exemple très très académique⁷ suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (8)$$

On pose alors les matrices du système augmenté:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On choisit une loi de commande $u(t) = -\tilde{K}z(t) = -kx(t) - k_i x_i(t)$ afin que $\hat{A} - \hat{B}\tilde{K}$ ait les pôles désirés. Le polynôme caractéristique associé à $\hat{A} - \hat{B}\tilde{K}$ s'écrit $P_{\hat{A}-\hat{B}\tilde{K}}(\lambda) = \lambda^2 + (k-3)\lambda + k_i$. Supposons que les spécifications imposent le polynôme désiré $P_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 25$. On en déduit alors les gains du correcteurs $k = 8$ et $k_i = 25$, ainsi que le schéma bloc du système asservi dans le domaine de Laplace c.f. figure 9. La réponse temporelle est donnée par la figure suivante 10.

⁷Construire un retour d'état sur un système du premier ordre est équivalent à synthétiser une commande proportionnelle. Dans ce cas précis, des outils plus rapides d'utilisation sont à notre disposition.

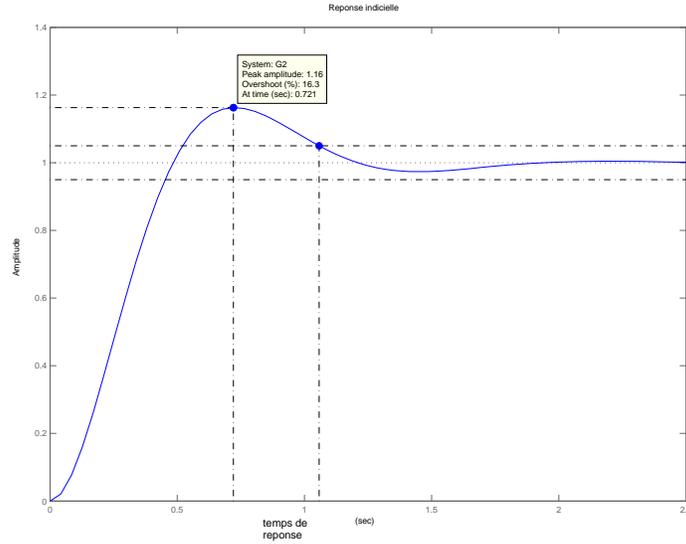


Figure 10: Sortie asservie de (8) par un retour d'état et action intégrale

Un second exemple: Soit le système modélisé par sa fonction de transfert $G(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}$. Sa représentation d'état sous forme commandable est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (9)$$

La dynamique de l'erreur pour le système augmenté admet comme équation différentielle $\dot{z}(t) = (\hat{A} - \hat{B}\tilde{K})z(t)$ avec

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On désire obtenir un système admettant un pôle dominant en -1. On choisit $P_{des}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 8)(\lambda + 9)$ ce qui permet de calculer $\tilde{K} = [11 \quad 13 \quad 72]$.

La réponse temporelle est donnée par la figure suivante 11.

2 L'observateur de Luenberger

2.1 Rappel

L'objectif est de reconstruire l'état interne d'un système à l'aide d'un algorithme dynamique (un système dynamique !!). Ce dernier dispositif est appelé Observateur. Soit le

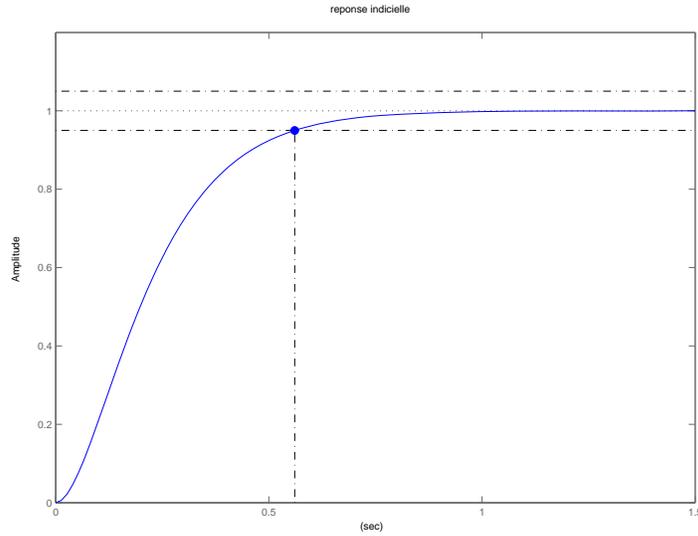


Figure 11: Sortie asservie de (9) par un retour d'état et action intégrale

système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

dont nous voulons observer (on dit aussi recalculer) $x(t)$. L'observateur est un système dynamique qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t) \\ \hat{x}(t) = Mz(t) + Ny(t) \end{cases} \quad (10)$$

où $u(t)$, $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Remarquons que ce sont également les deux entrées de l'observateur. La sortie de l'observateur est la variable $\hat{x}(t)$ (cf 12).

On définit un signal d'erreur $\epsilon(t)$ comme suit : $z(t) = Tx(t) + \epsilon(t)$. L'objectif est de construire l'observateur c'est-à-dire de choisir convenablement F, G, H, M, N, T telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) - x(t) = 0$. D'autre part, nous voulons également "contrôler" la manière dont l'erreur tend vers 0, c'est-à-dire le régime transitoire de l'erreur. Or, en utilisant l'expression de $z(t)$ et de $y(t)$, on peut réécrire $\hat{x}(t)$ de la manière suivante :

$$\hat{x}(t) = (MT + NC)x(t) + M\epsilon(t)$$

Posons

$$MT + NC = I,$$

il vient que $\hat{x}(t) = x(t) + M\epsilon(t)$. Si l'erreur converge asymptotiquement vers zéro, $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$, alors $\hat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t)$. Calculons la dynamique de

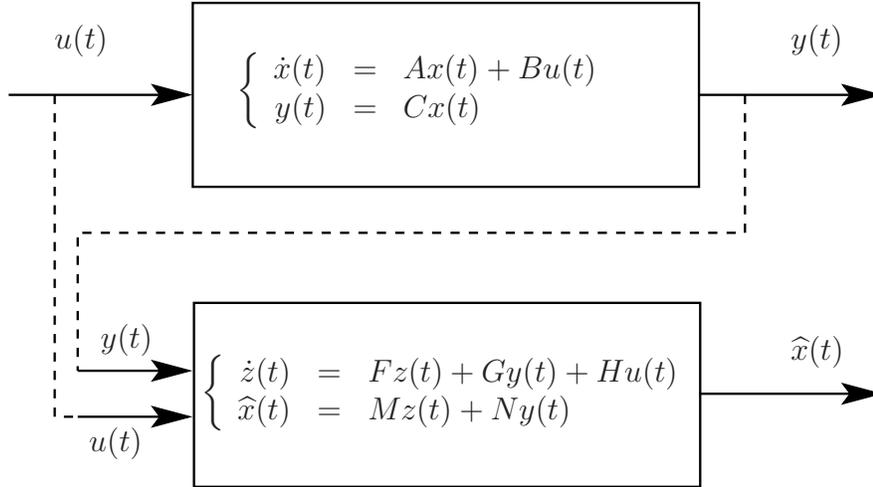


Figure 12: Schéma bloc de l'observateur: l'observateur vu comme un système dynamique

l'erreur, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}(t) = \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) \\ \dot{\epsilon}(t) = F\epsilon(t) + (FT + GC - TA)x(t) + (H - TB)u(t) \end{cases}$$

Imposons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} FT + GC - TA &= 0 \\ H &= TB \end{aligned}$$

Nous obtenons alors la relation $\dot{\epsilon}(t) = F\epsilon(t)$.

La matrice F doit alors être choisie de manière à assurer la stabilité asymptotique de $\epsilon(t)$ et la convergence de $\epsilon(t)$ vers 0. F est donc une matrice stable. Pour résumer, un observateur défini par le système dynamique (10) admet une erreur regie par $\dot{\epsilon}(t) = F\epsilon(t)$ ssi les équations matricielles suivantes sont vérifiées:

$$\boxed{\begin{aligned} MT + NC &= I, \\ FT + GC - TA &= 0 \\ H &= TB \end{aligned}} \quad (11)$$

Il reste ensuite d'imposer que les valeurs propres de F soient à parties réelles négatives pour impliquer la stabilité asymptotique de l'erreur et la convergence vers 0 de $\epsilon(t)$.

2.2 L'observateur Identité

Afin de résoudre les équations matricielles, on choisit :

$$\boxed{T=I, M=I, N=0}$$

L'unique relation à résoudre est :

$$\boxed{F=A-GC}$$

On obtient alors l'observateur identité :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Gy(t) + Bu(t) \\ \hat{x}(t) &= z(t) \\ z(t) &= x(t) + \epsilon(t) \end{cases} \quad (12)$$

Il faut ensuite déterminer le gain de l'observateur G tel que $F = A - GC$ soit une matrice stable. Ce calcul s'effectue en imposant le polynôme caractéristique de F (noté $P_{des}(\lambda)$) et en résolvant l'équation $P_{des}(\lambda) = P_{A-GC}(\lambda)$.

Remarque 5 *Celui-ci peut également s'écrire :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + G(y(t) - \hat{y}(t)) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (13)$$

Cela correspond finalement à une recopie du système original auquel un terme correctif dépendant de l'erreur $y(t) - \hat{y}(t)$ est ajouté.

2.3 Implantation d'un observateur minimal identité

L'idée est de reconstruire uniquement les états manquants, les autres étant mesurés. On suppose que l'état est partitionné en deux sous-ensemble $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t)$. avec donc $x_1 \in \mathcal{R}^p$ et $x_2 \in \mathcal{R}^{n-p}$. Le système dynamique original peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases} \quad (14)$$

Afin de mettre en valeur les dynamiques de l'état inconnu, transformons le système 14:

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + \overbrace{A_{21}x_1(t) + B_2u(t)}^{\bar{u}(t)} \quad (15)$$

où $\bar{u}(t)$ est une nouvelle commande⁸ On pose une nouvelle équation de sortie :

$$w(t) = \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t) = A_{12}x_2(t) \quad (16)$$

Finalement, nous obtenons un nouveau système dynamique d'ordre réduit $n - p$.

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) &= A_{22}x_2(t) + \bar{u}(t) \\ w(t) &= A_{12}x_2(t) \end{cases} \quad (17)$$

où \bar{u} et $w(t)$ sont respectivement une nouvelle commande et une nouvelle sortie liées au système original par :

⁸En effet, cette dernière commande est un signal connu car $x_1(t)$ est la sortie mesurée du système.

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= A_{21}x_1(t) + B_2u(t) \\ w(t) &= \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t)\end{aligned}$$

On propose alors de construire un observateur identité pour le système d'ordre réduit (17):

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Gw(t) + \bar{u}(t) \\ \hat{x}(t) &= z(t) \end{cases} \quad (18)$$

avec la relation suivante :

$$z(t) = x_2(t) + \epsilon(t)$$

et la relation matricielle $F = A_{22} - GA_{12}$. Afin d'écrire le système en fonction des signaux d'entrées $y(t)$ et $u(t)$ du système original, on transforme l'observateur minimal ainsi :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= Fz(t) + G \overbrace{(\dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t))}^{w(t)} + \overbrace{A_{21}x_1(t) + B_2u(t)}^{\bar{u}(t)} \\ \hat{x}(t) &= z(t) \end{cases} \quad (19)$$

Afin d'éviter la dérivée $\dot{x}_1(t)$ dans le second membre de la première équation, on pose une nouvelle variable $s(t)$ telle que:

$$s(t) = z(t) - Gx_1(t) = z(t) - Gy(t)$$

pour obtenir finalement:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) &= Fs(t) + (FG - GA_{11} + A_{21})y(t) + (B_2 - GB_1)u(t) \\ \hat{x}(t) &= s(t) + Gy(t) \end{cases} \quad (20)$$

Ces dernières équations représentent bien un système dynamique, observateur d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ de sortie $\hat{x}_2(t)$ et dont l'état $s(t)$ est de dimension réduite ($s(t) \in \mathcal{R}^{n-p}$) par rapport à l'observateur classique de Luenberger.

3 Calcul du gain de l'Observateur-Cas SISO

Cette section est consacrée au calcul du gain G dans le cas de la synthèse d'un observateur identité (ou identité réduite). On suppose que le système est observable. La dynamique de l'erreur entre l'état et l'état estimé s'écrit sous la forme

$$\dot{\epsilon}(t) = (A - GC)\epsilon(t)$$

où G est le gain de l'observateur. L'objectif est alors de déterminer G afin de placer les pôles de $A - GC$ en $\{p_1, \dots, p_n\}$. Or en transposant l'expression de la matrice dynamique $A - GC$, il vient que cet objectif est équivalent à déterminer un retour d'état pour un système fictif (A^T, C^T) . En effet, les valeurs propres de $A - GC$ sont égales aux valeurs propres de $A^T - C^T G^T$. Ainsi, on détermine un retour d'état fictif \tilde{K} , pour le système (A^T, C^T) et on obtient le gain $G = \tilde{K}^T$.

4 Application

4.1 Construction d'un observateur identité

Soit le système définie par le quadruplet $\{A, B, C, D\}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

On souhaite construire un observateur identité ayant pour pôles -2 et -5.

Les pôles de la matrice F sont donc -2 et -5 et le polynôme caractéristique associée est $P_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 10$.

Calculons la matrice $A - GC$ en posant $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} -1 - g_1 & 1 \\ 2 - g_2 & -2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit alors en fonction de g_1 et g_2 :

$$P_{A-GC}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(3 + g_1) + 2g_1 + g_2$$

En égalant $P_{A-GC}(\lambda) = P_{des}(\lambda)$, on obtient la valeur de G et F .

$$G = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

On obtient les simulations suivantes (c.f. figures 13,14) pour une entrée nulle $u(t) = 0$ et des conditions initiales pour le système $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4.2 Construction d'un observateur minimal identité

Reprenons l'exemple précédent, seul le premier état est accessible à la mesure, nous avons donc directement les valeurs des différentes matrices $A_{11} = -1, A_{12} = 1, A_{21} = 2, A_{22} = 2, B_1 = 1, B_2 = 1$. Nous devons ensuite résoudre l'équation $F = A_{21} - GA_{12}$. Nous choisissons la dynamique de l'erreur grâce aux pôles de F . Ici $F \in \mathcal{R}^{1 \times 1} = -5$. Nous trouvons donc $G = 7$. L'observateur réduit a donc pour équation dynamique:

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) &= -5\hat{s}(t) - 26y(t) - 6u(t) \\ \hat{x}(t) &= \hat{s}(t) + 7y(t) \end{cases} \quad (21)$$

On obtient les simulations suivantes 15,16 pour une entrée nulle $u(t) = 0$ et des conditions initiales pour le système $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

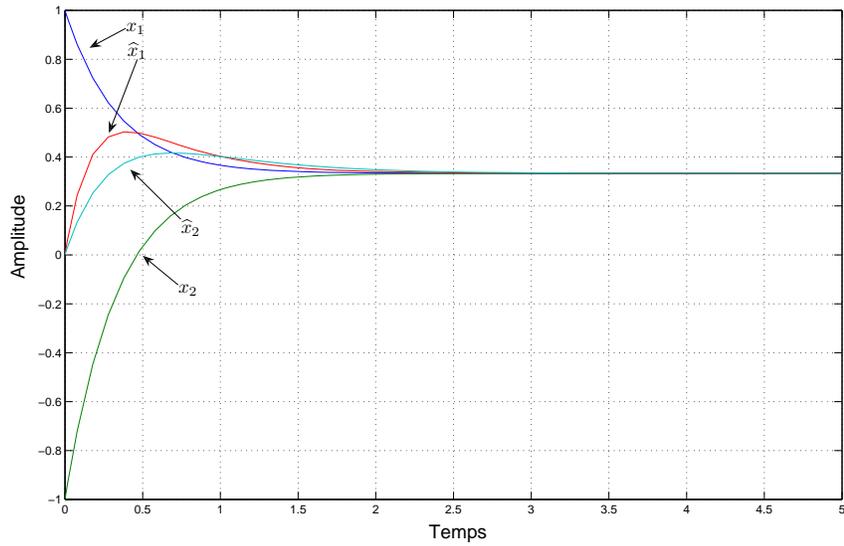


Figure 13: Evolution temporelle des états $x_1(t), x_2(t)$ du système et $\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)$ de l'observateur

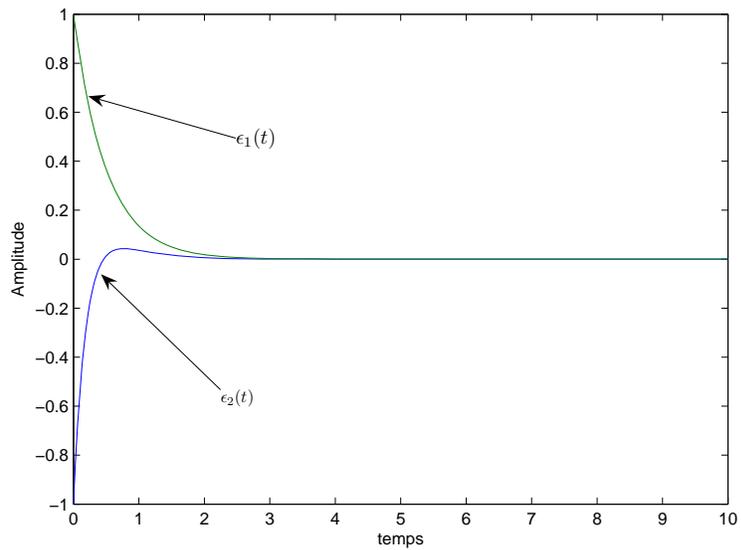


Figure 14: Evolution temporelle de l'erreur $\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

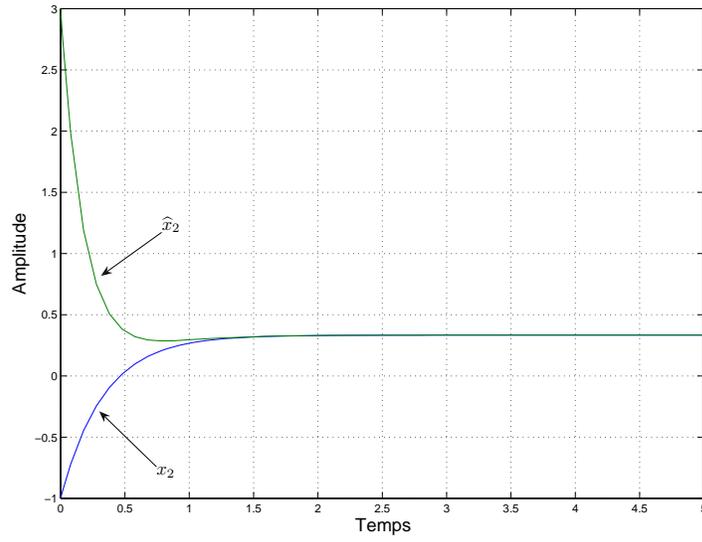


Figure 15: Evolution temporelle des états $x_2(t)$ du système et $\hat{x}_2(t)$ de l'observateur

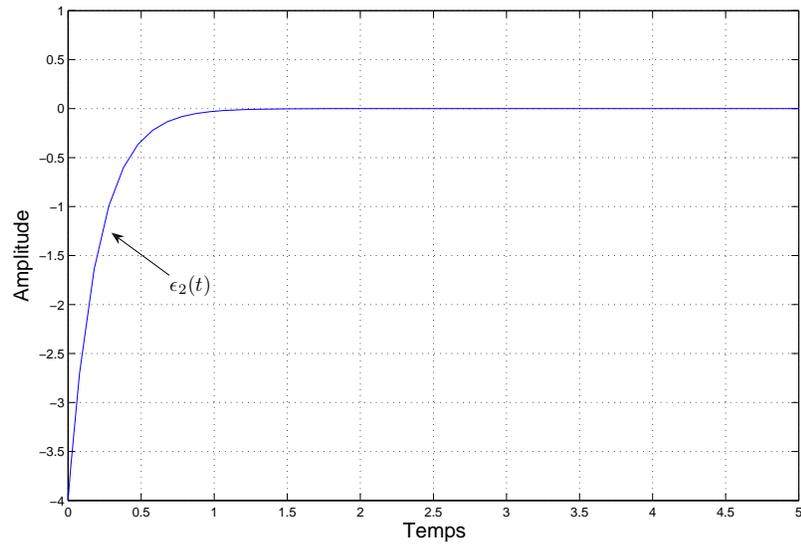


Figure 16: Evolution temporelle de l'erreur $\epsilon_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

5 Commande par retour d'état et observateur identité

On suppose dans cette partie que l'état n'est pas accessible par une mesure. Nous avons seulement la connaissance de $y(t)$. Nous proposons une commande par retour d'état estimé du type :

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + v(t)$$

où $\hat{x}(t)$ est la sortie du système dynamique observateur identité et $v(t)$ une nouvelle entrée pour le système bouclé (eventuellement la consigne). Le théorème suivant nous justifie le choix de cette structure de commande:

Théorème 2 *Les pôles du système augmenté (dont l'état généralisé est $\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$) asservi par le retour d'état et l'observateur est l'union des pôles de $A-BK$ et des pôles de $A-GC$.*

La preuve n'est pas compliquée, il suffit de réécrire la dynamique du système bouclé:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B \overbrace{(-K\hat{x}(t) + v(t))}^{u(t)} \\ \dot{\epsilon}(t) &= (A - GC)\epsilon(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

On obtient ainsi:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

En d'autres termes, les dynamiques du systèmes en boucle fermée sont les dynamiques du système bouclé par un retour d'état auxquelles nous ajoutons les dynamiques de l'observateur. C'est pourquoi, les dynamiques de l'observateur sont en général choisies beaucoup plus rapides que les dynamiques du système bouclé par le retour d'état.