

# Les modes d'un système dynamique

F.Gouaisbaut

## Résumé

Une très brève explication de la notion de modes, très utile en automatique

## 1 Une généralisation

La notion de modes permet d'appréhender le régime transitoire de la réponse temporelle d'un système dynamique au travers le calcul de ses pôles et certaines caractéristiques comme les constantes de temps et les amortissements. On généralise ainsi les notions de rapidité et d'oscillations qui ont déjà été définis de manière exhaustive pour les systèmes du premier et du second ordre.

## 2 Réponse aux conditions initiales

On considère un système dynamique **SISO**<sup>1</sup> modélisé par une équation différentielle ordinaire

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad (1)$$

ou de manière équivalente, par sa fonction de transfert

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (2)$$

Les conditions initiales du système dynamique sont données par les valeurs  $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ , telles que  $y(0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$ . On supposera par la suite que cette modélisation définit un système stable, c'est-à-dire que tous les pôles du système sont à parties réelles strictement négatives. Effectivement, dans le cas contraire, la réponse aux conditions initiales diverge et il est inutile, en général, de considérer les caractéristiques du régime transitoire.

---

<sup>1</sup>Single Input, Single Output, acronyme anglais pour signifier que le système admet une seule entrée et une seule sortie.

En prenant en compte les conditions initiales, le calcul de la réponse du système dynamique s'effectue facilement en utilisant la transformée de Laplace :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} U(p) - \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j b_j u^{(i-1)}(0) p^{j-i}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{\text{réponse dépendante de } u(t) = \text{réponse forcée}} + \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_j y^{(i-1)}(0) p^{j-i}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{\text{réponse libre soumise aux C.I.}} .$$

La dernière partie de la solution fournit la réponse aux conditions initiales et permet de définir la notion de modes :

$$Y_l(p) = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_j y^{(i-1)}(0) p^{j-i}}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

Afin de calculer la réponse temporelle, nous devons alors appliquer la transformée de Laplace inverse à  $Y_l(p)$ . Au préalable, il faut décomposer la fraction rationnelle qui constitue  $Y_l(p)$  en une somme de fractions plus simples à utiliser. Supposons que le polynôme caractéristique de la fonction de transfert se factorise ainsi :

$$\mathbf{P}(p) = \prod_{i=1}^r (p - p_i)^{n_i} \prod_{q=1}^s (p^2 + 2\zeta_q \omega_{n_q} p + \omega_{n_q}^2)^{m_q},$$

avec  $\sum_{i=1}^r n_i + 2 \sum_{q=1}^s m_q = n$ ,  $|\zeta_q| < 1$ . La première partie correspond à des pôles  $p_i$  réels de multiplicité  $n_i$ . La seconde partie de la décomposition permet de considérer des pôles complexes conjugués de multiplicité  $m_q$  qui s'expriment ainsi :

$$p_{q1} = -\zeta_q \omega_{n_q} + j \sqrt{1 - \zeta_q^2},$$

$$p_{q2} = -\zeta_q \omega_{n_q} - j \sqrt{1 - \zeta_q^2},$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle permet donc d'écrire :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{n_i} \frac{K_{i,l}}{(p - p_i)^l} + \sum_{q=1}^s \sum_{k=1}^{m_q} \frac{A_{q,k} + B_{q,k} p}{(p^2 + 2\zeta_q \omega_{n_q} p + \omega_{n_q}^2)^k},$$

où les constantes  $K_{i,l}$ ,  $A_{q,k}$ ,  $B_{q,k}$ , ( $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $l \in \{1, \dots, n_i\}$ ,  $q \in \{1, \dots, s\}$ ,  $k \in \{1, \dots, m_q\}$ ) dépendent des conditions initiales.

La réponse est donc la somme de deux termes, le premier terme de la forme  $Y_{ap}(p) =$

$\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{n_i} \frac{K_{i,l}}{(p-p_i)^l}$  et le second terme de la forme  $Y_{pp}(p) = \sum_{q=1}^s \sum_{k=1}^{m_q} \frac{A_{q,k} + B_{q,k}p}{(p^2 + 2\zeta_q \omega_{n_q} p + \omega_{n_q}^2)^k}$ .

La transformée de Laplace inverse de  $Y_{ap}$  nous donne :

$$y_{ap}(t) = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{l=1}^{n_i} K_{i,l} \frac{t^l}{l!} \right) e^{p_i t}.$$

Cela correspond finalement à une somme d'exponentielles pondérées par des polynômes. La transformée de Laplace inverse de  $Y_{pp}(p)$  est plus compliquée à calculer et ne sera pas détaillée. Par contre, on peut montrer que sa transformée de Laplace inverse fait apparaître une somme pondérée de fonctions du type

$$e^{-\zeta_q \omega_{n_q} t} \sin(\omega_{n_q} \sqrt{1 - \zeta_q^2} t + \phi_q).$$

Finalement, cette phase élémentaire d'analyse montre que l'allure temporelle de la réponse dépend fondamentalement des racines du dénominateur de la fonction de transfert, c'est-à-dire des pôles du système.

### 3 Notions de modes

Les modes d'un système sont les contributions temporelles élémentaires à la réponse aux conditions initiales  $y_l(t)$  qui sont engendrées par chaque pôle réel distinct ou chaque paire de pôles complexes conjugués. Ainsi, nous pouvons classer les modes d'un système en deux catégories :

1. Les modes **apériodiques** : ce sont les pôles réels qui engendrent une réponse de type exponentielle décroissante <sup>2</sup>(voir l'illustration d'une réponse type dans la Figure 1).

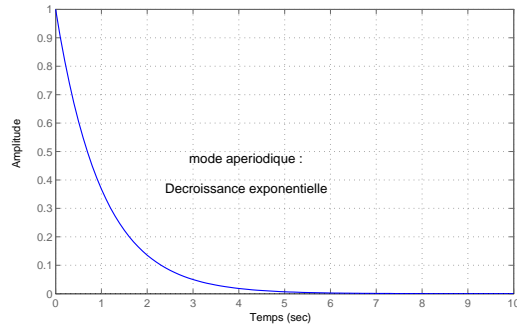


FIG. 1 – Réponse type d'un mode apériodique

2. Les modes **pseudo-périodiques** : ce sont les paires de pôles complexes conjugués qui engendrent une réponse de type sinusoïdale décroissante, une fonction pseudo-périodique encadrée par deux exponentielles décroissantes (voir la réponse type de la Figure 2).

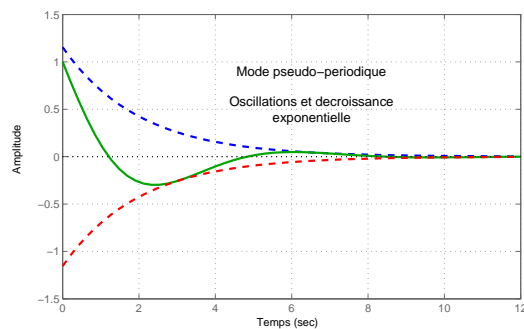


FIG. 2 – Réponse type d'un mode pseudo-périodique

---

<sup>2</sup>Rappelons que nous considérons uniquement des pôles stables à parties réelles négatives.

**Exemple 1** *Considérons un système modélisé par l'équation différentielle  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$ . Le calcul de la réponse temporelle du système à des conditions initiales  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$  donne :*

$$y(t) = (2y_0 + \dot{y}_0)e^{-t} - e^{-2t}(y_0 + \dot{y}_0),$$

*qui fait apparaître deux modes apériodiques  $(2y_0 + \dot{y}_0)e^{-t}$  et  $-e^{-2t}(y_0 + \dot{y}_0)$ .*

**Exemple 2** *Considérons un système modélisé par  $G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(p^2+p+1)}$ . Ce système admet trois modes, deux modes apériodiques (correspondant aux pôles  $-1$  et  $-2$ ) et un mode pseudo-périodique (correspondant aux pôles complexes conjugués  $\frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$ ).*

Une fois classifié les deux modes principaux, il est nécessaire de donner quelques caractéristiques essentiels pour chacun de ces modes.

### 3.1 Modes apériodiques

Les modes apériodiques correspondent à des pôles réels  $p_i$  qui engendrent une réponse de la forme  $y_{ap}(t) = P(t)e^{-p_i t}$  où  $P(t)$  est un polynôme dépendant des conditions initiales. A chaque mode apériodique, nous associons une seule caractéristique :

1. une **constante de temps**  $\tau_i = -\frac{1}{p_i}$  et un temps de réponse  $t_{r_i} = 3\tau_i$ .

Ce temps de réponse mesure, de manière approximative, le temps nécessaire pour que ce mode disparaisse de la réponse aux conditions initiales. Plus précisément, il mesure le temps que met le mode pour passer de  $P(0)$  (valeur à  $t = 0$ ) à 5% de  $P(0)$ . Cela permet également de classer les différents modes suivant leur rapidité comme le montre la Figure 3 dans le plan complexe. Plus la constante de temps d'un mode est faible (c'est-à-dire un pôle rapide), plus sa contribution à la réponse temporelle est négligeable (c'est-à-dire converge vers zéro rapidement). Ainsi sur la Figure 3 le mode le plus rapide correspond au pôle  $p_1$  tandis que le pôle  $p_3$  engendre le mode le plus lent.

**Exemple 3** *Considérons le système modélisé par l'équation différentielle  $\ddot{y}(t) + 16\dot{y}(t) + 65y(t) = u(t)$ . Le calcul de la réponse temporelle du système à des conditions initiales  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1, \ddot{y}(0) = 1$  donne :*

$$y(t) = -0.0667e^{-10t} - 0.35e^{-5t} + 1.41e^{-t}$$

*Cette réponse est constitué de trois modes que nous pouvons classer suivant leur rapidité respective :*

Modes	pôle	Constante de temps	Temps de réponse
3	-1	1	1
2	-5	1/5	3/5
1	-10	1/10	3/10

*Ces différents temps de réponse sont illustrés par la Figure 4. La réponse globale du système (qui est une combinaison linéaire des différents modes) est également tracée. On peut remarquer que cette réponse est aussi rapide que le mode 3, le plus lent des modes qui compose le système. Le mode le plus rapide (mode 1) est pratiquement négligeable.*

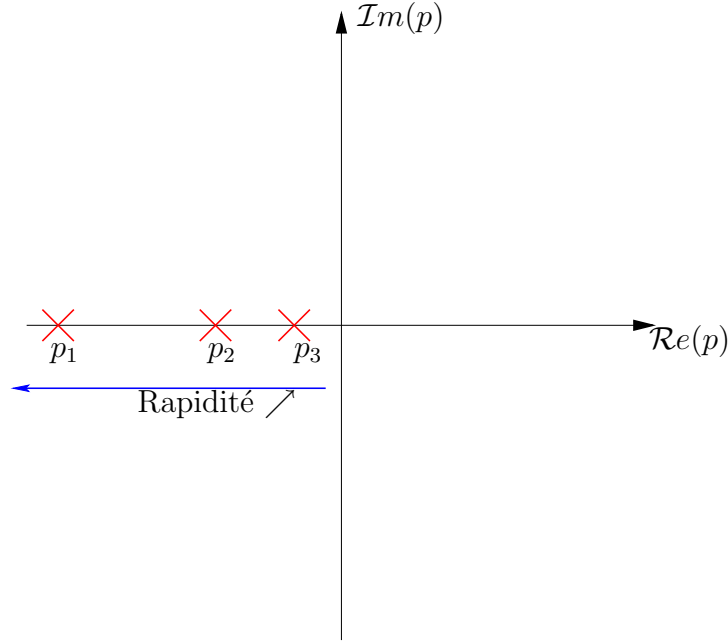


FIG. 3 – Modes apériodiques

### 3.2 Modes pseudo-périodiques

A un mode pseudo-périodique correspond une paire de pôles complexes  $p, \bar{p}$  qui peuvent s'écrire de manière normalisée (voir également la représentation des pôles dans le plan complexe de la Figure 5) :

$$p = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2},$$

$$\bar{p} = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2},$$

où  $\zeta$  représente l'amortissement du pôle et  $\omega_n$  la pulsation naturelle du pôle. Notons que  $\omega_n$  correspond au module de  $p$  et de  $\bar{p}$ . L'angle  $\psi$  indiqué sur la Figure 5 est tel que  $\sin \psi = \sqrt{1 - \zeta^2}$  et  $\cos \psi = \zeta$ .  $\psi$  est une fonction décroissante de  $\zeta$ . Lorsque  $\zeta$  décroît,  $\psi$  augmente et les pôles  $p, \bar{p}$  se rapprochent de l'axe imaginaire.

A chaque mode pseudo-périodique, nous associons deux caractéristiques :

1. **La constante de temps :**

La première, analogue à la définition de la rapidité pour les modes apériodiques, est la constante de temps définie par

$$\tau = -\frac{1}{\zeta\omega_n},$$

qui n'est rien d'autre que  $-1/\mathcal{R}e(p)$ . Cette constante de temps nous renseigne sur la rapidité de convergence du mode vers zéro. Plus cette constante de temps est petite, plus la contribution du mode pseudo-périodique à la réponse aux conditions initiales disparaît rapidement.

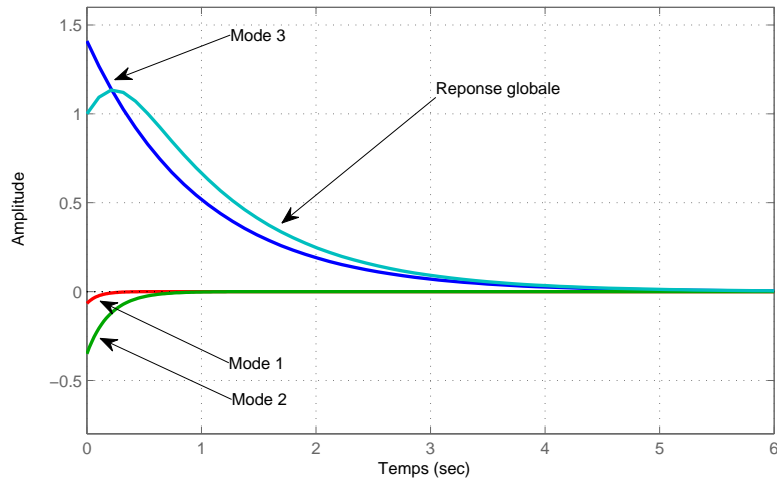


FIG. 4 – Visualisation des trois modes apériodiques et de la réponse globale

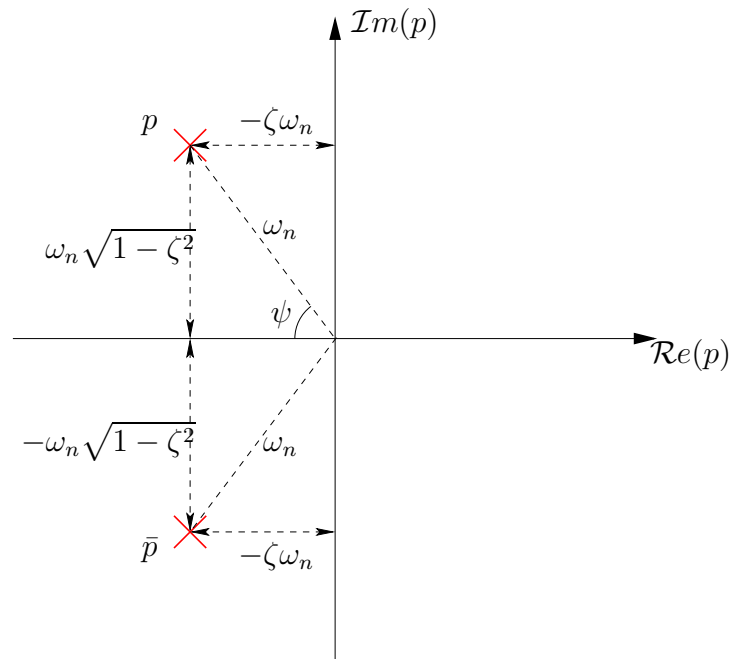


FIG. 5 – Modes apériodiques

## 2. Le coefficient d'amortissement $\zeta$ :

La seconde caractéristique est le coefficient d'amortissement  $\zeta$ . En effet, celui-ci nous renseigne sur le caractère oscillant de la réponse engendrée par les pôles complexes conjugués comme le montre les courbes de la Figure 2. Plus  $\zeta$  diminue, plus le mode

est oscillant.

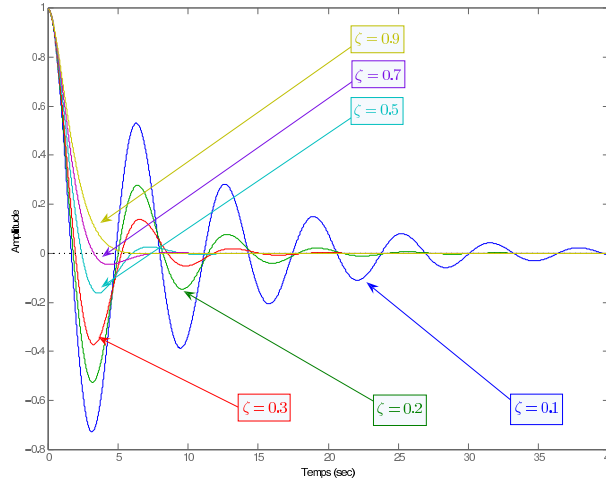


FIG. 6 – Evolution de la réponse en fonction de  $\zeta$ .

Ainsi, nous pouvons classer les différents modes (apériodiques et pseudo-périodiques) suivant leur rapidité et leur coefficient d'amortissement comme le résume la Figure 7. Ainsi, sur cette Figure, le pôle réel  $p_3$  engendre un mode apériodique le plus rapide.  $p_2$  et  $\bar{p}_2$  engendrent un mode pseudo-périodique qui admet moins d'oscillations que le mode engendré par  $p_3$  et  $\bar{p}_3$ . Il est néanmoins plus rapide.

### 3.3 Cas limites

Les cas limites correspondent aux pôles qui appartiennent à l'axe imaginaire c'est-à-dire de la forme  $p = \pm j\omega$ , voir, par exemple, le plan complexe de la Figure 8.

Ce sont des pôles instables mais que nous retrouvons régulièrement lors de la modélisation de systèmes dynamiques. On distingue deux cas :

- Le mode **intégrateur** correspond au cas  $p = 0$ .
- Le mode **périodique** correspond au cas  $p = \pm j\omega$ .

**Exemple 4** *Considérons le cas du système modélisé par*

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t). \quad (3)$$

*Le système admet un mode apériodique, correspondant au pôle  $p = -1$  et un mode intégrateur, correspondant au pôle  $p = 0$ . Calculons la réponse aux conditions initiales  $y(0) = y_0$  et  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . En utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons directement :*

$$Y(p) = \frac{y_0}{p} + \frac{\dot{y}_0}{p^2 + p},$$



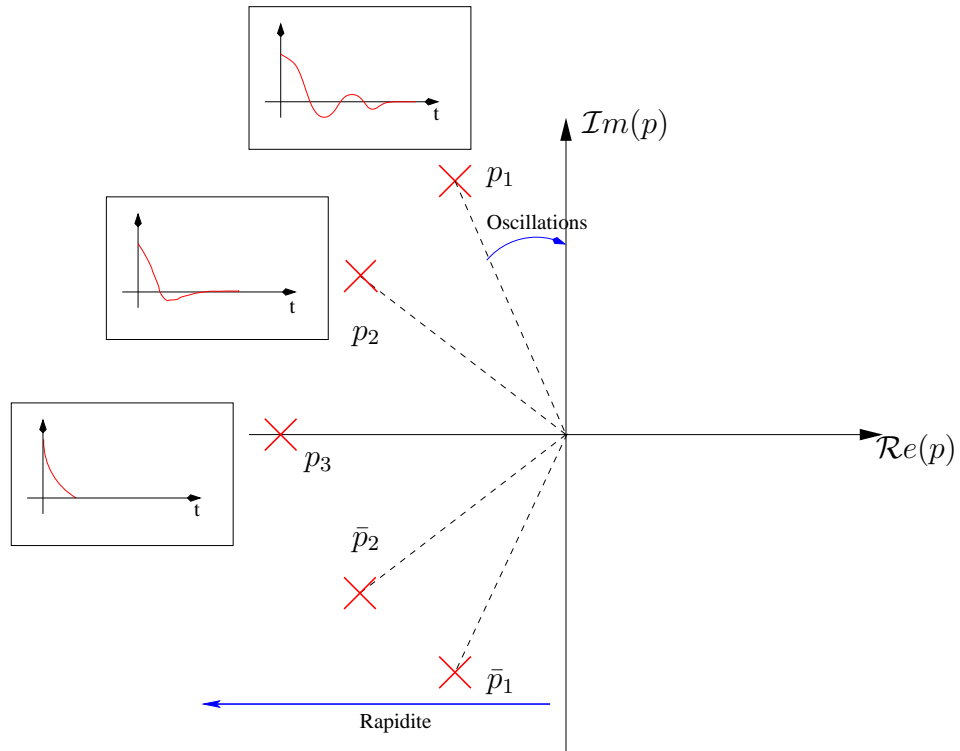


FIG. 7 – Visualisation de la rapidité et des oscillations dans le plan complexe

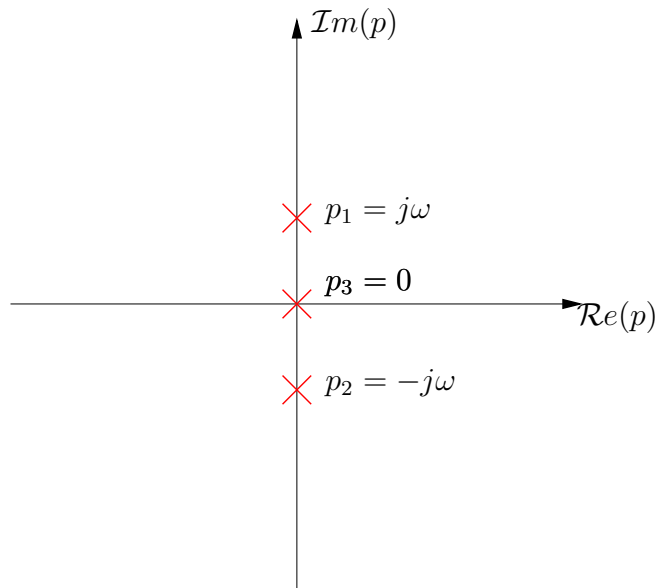


FIG. 8 – Modes périodiques et intégrateurs

et l'utilisation de la table des transformées de Laplace nous donne :

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0(1 - e^{-t}).$$

Le tracé de la réponse de la Figure (9) montre que le système intègre la condition initiale  $y_0$ .

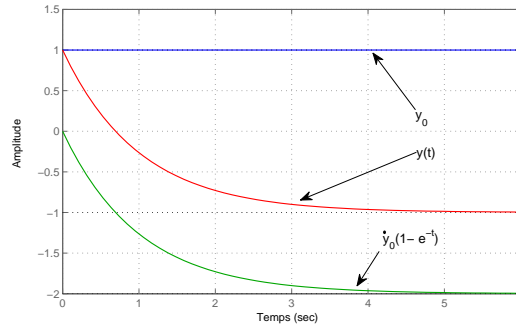


FIG. 9 – Réponse à une condition initiale  $y_0 = 1, \dot{y}_0 = -2$  pour le système (3)

**Exemple 5** Considérons le cas du système modélisé par

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = u(t). \quad (4)$$

Calculons la réponse aux conditions initiales  $y(0) = y_0$  et  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . En utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons directement :

$$Y(p) = \frac{\dot{y}_0 + py_0}{p^2 + 4},$$

et l'utilisation de la table des transformées de Laplace nous donne :

$$y(t) = y_0 \cos(2t) + \frac{1}{2}\dot{y}_0 \sin(2t).$$

La solution, tracée dans la Figure 10 est une fonction périodique de période  $\pi$ , ce qui justifie (au moins sur cet exemple) le nom du mode, **périodique**.

## 4 Quelques exemples instructifs

Considérons quelques exemples typiques :

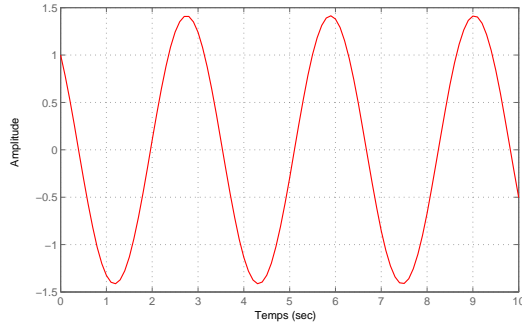


FIG. 10 – Réponse périodique à une condition initiale  $y_0 = -2, \dot{y}_0 = 1$  pour le système (4)

**Exemple 6** *Considérons le système modélisé par  $\ddot{y}(t) + 13.6\dot{y}(t) + 72y(t) + 360y(t) = u(t)$  avec  $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 1$ . Les pôles du système sont  $\{-10, -1.8 \pm j5.72\}$ . Deux modes vont engendrer la réponse, un mode apériodique rapide (de constante de temps égale à  $1/10$ ) et un mode pseudo-périodique lent et oscillant (de constante de temps  $1/1.8$  et d'amortissement égale à  $0.3$ ). La réponse à ces conditions initiales vaut :*

$$y(t) = 0.406e^{-10t} + e^{-1.8t} (1.07 \sin(5.72t) + 0.594 \cos(5.72t))$$

*Comme le montre la Figure 11, le mode apériodique correspondant au pôle en  $-10$  est un mode rapide et participe peu pour la réponse globale.*

**Exemple 7** *Considérons le système modélisé par  $\ddot{y}(t) + 2.1\dot{y}(t) + 50.2y(t) + 5y(t) = u(t)$  avec  $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 1$ . Les pôles du système sont  $\{-0.1, -1 \pm j7\}$ . Deux modes vont engendrer la réponse, un mode apériodique lent (de constante de temps égale à  $10$ ) et un mode pseudo-périodique rapide et très oscillant (de constante de temps  $1$  et d'amortissement égale à  $0.141$ ). La réponse à ces conditions initiales vaut :*

$$y(t) = 1.064e^{-0.1t} + e^{-t} (0.15 \sin(7t) - 0.06 \cos(7t))$$

*Comme le montre les Figures 12,13, le mode rapide participe à la réponse globale du système uniquement au début où des oscillations sont présentes. Ensuite, elles disparaissent de la réponse globale.*

**Remarque 1** *Considérons de nouveau le système modélisé par l'équation différentielle  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$ . Le calcul de la réponse temporelle du système à des conditions initiales  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$  donne :*

$$y(t) = (2y_0 + \dot{y}_0)e^{-t} - e^{-2t}(y_0 + \dot{y}_0),$$

*qui fait apparaître deux modes apériodiques  $(2y_0 + \dot{y}_0)e^{-t}$  et  $-e^{-2t}(y_0 + \dot{y}_0)$ . Si nous choisissons convenablement les conditions initiales, nous pouvons cacher un mode vis-à-vis de*

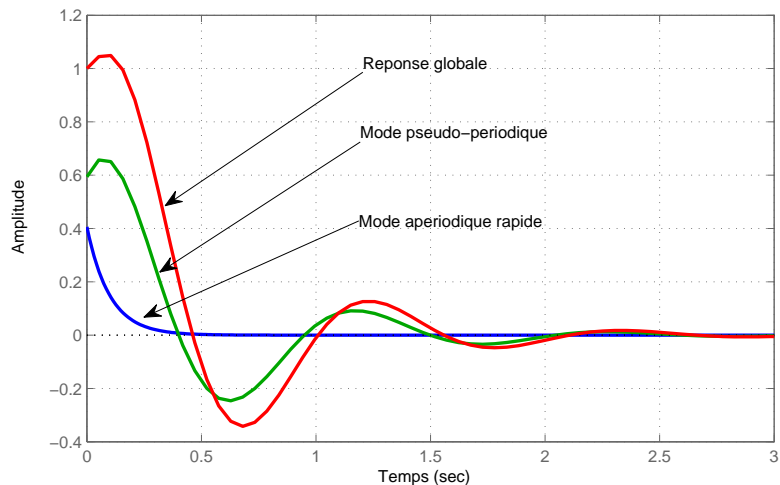


FIG. 11 – Visualisation du mode apériodique rapide, du mode pseudo-périodique et de la réponse globale

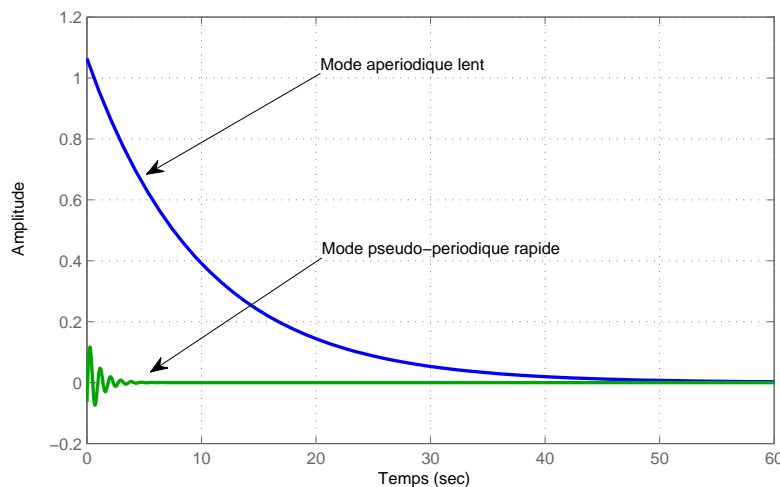


FIG. 12 – Visualisation du mode apériodique lent et du mode pseudo-périodique rapide

la sortie. Par exemple, si nous choisissons  $y_0 = -\dot{y}_0$ , le mode apériodique de constante de temps  $1/2$  disparaît. Cela ne veut pas dire que pour autant ce mode n'existe pas pour ce système. Il n'est seulement plus visualisable pour une configuration spéciale de ses conditions initiales.

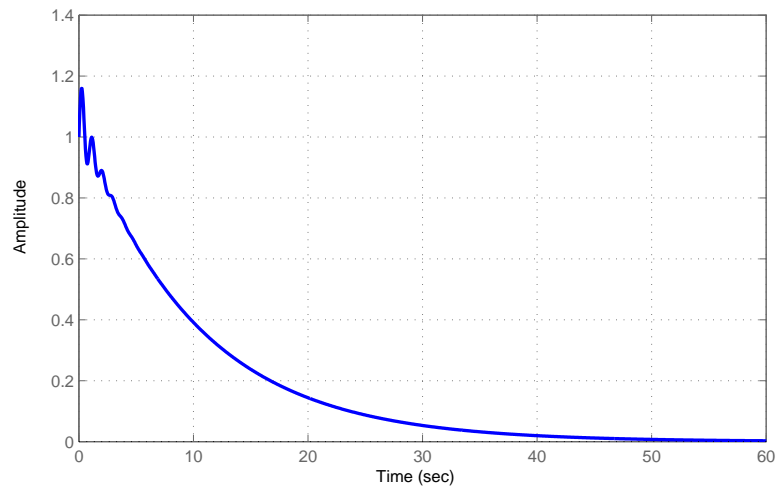


FIG. 13 – Visualisation de la réponse globale