Université Paul Sabatier, L2SDI

Examen d'Automatique

Le système de suspension d'un véhicule de masse M peut être modélisé par le schéma suivant :

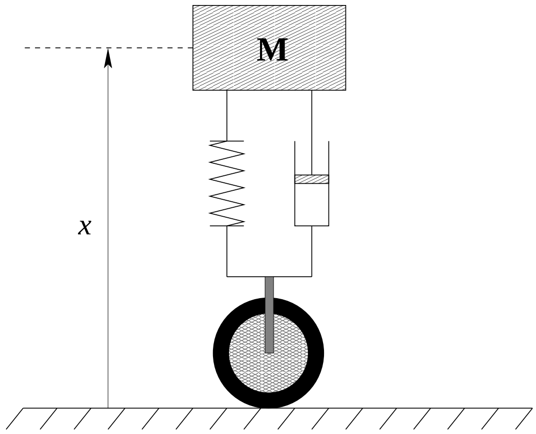

FIG. 1 – *Suspension passive*

Le système est constitué de :

– un ressort de constante de raideur k exerçant une force inversement proportionnelle à son élongation Δ_l :

$$F_r = -k\Delta_l$$

– un amortisseur entraînant une force de frottement :

$$F_f = -f\frac{dx}{dt}$$

1 Analyse du comportement dynamique du système

La hauteur du véhicule au repos est notée x_0. Une personne de masse m entre alors dans le véhicule. Nous nous intéressons à la variation de la hauteur $x(t)$ autour de x_0, notée $\Delta_x(t) = x(t) - x_0$, dont la valeur est fournie à tout instant par un capteur.

Le principe fondamental de la dynamique appliqueée la masse M seulement nous donne :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -Mg - f\dot{x} - k\Delta_l = -Mg - f\dot{x} - k(l - l^*) \\ &= -Mg - f\dot{x} - k(x - x^*) \end{aligned}$$

où l est la longueur du ressort et l^* la longueur du ressort à vide.

A l'équilibre, le système se stabilise à une hauteur x_0, on a :

$$Mg = -k(x - x^*) \quad \Rightarrow \quad kx^* = Mg + kx_0 \quad (1)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique au système de masse $m + M$:

$$(M + m)\ddot{x} = -(M + m)g - f\dot{x} - k(x - x^*)$$

soit :

$$\begin{aligned} &(M + m)\ddot{x} + f\dot{x} + kx = -(M + m)g + kx^* \\ &= -(M + m)g + Mg + kx_0 = mg + kx_0 \end{aligned}$$

Or, d'après (1), $kx^* = Mg + kx_0$. On obtient :

$$(M + m)\ddot{x} + f\dot{x} + kx = -mg + kx_0$$

En posant $\Delta_x(t) = x(t) - x_0$, on a :

$$(M + m)\ddot{\Delta}_x + f\dot{\Delta}_x + k\Delta_x = -mg$$

soit :

$$(1 + \frac{m}{M})\ddot{\Delta}_x + \frac{f}{M}\dot{\Delta}_x + \frac{k}{M}\Delta_x x = -\frac{1}{M}mg \quad (2)$$

1) En simplifiant cette équation en considérant que la dynamique du système est inchangée lorsque la masse m est négligée devant M ($\frac{m}{M} + 1 \approx 1$), dessiner un schéma-bloc de ce système en identifiant les entrées et les sorties.
2) Calculer la fonction de transfert associé au système ainsi défini.
3) Calculer les expressions littérales puis numériques de l'amortissement, et de la pulsation naturelle.
4) Calculer la valeur x_1 de la hauteur en régime permanent.
5)En déduire l'allure de la courbe de $x(t)$ et en donner le tracé.
Conclure sur l'amortissement de la voiture. *Application numérique :* $x_0 = 0.3m$, $M = 400kg$, $m = 20kg$, $k = 8000N.m^{-1}$, $f = 1000N.s.m^{-1}$.

2 Commande passive

5) Sur quel paramètre est-il possible de jouer afin d'ajuster la hauteur finale de la voiture ? Calculer sa valeur pour que la hauteur finale de la voiture soit égale à 0.29.
6) Quel est alors l'amortissement du système ? Tracer l'allure de la réponse correspondante.
7) Calculer les valeurs de k et f pour obtenir une réponse du type :
et en déduire l'expression analytique de $x(t)$.

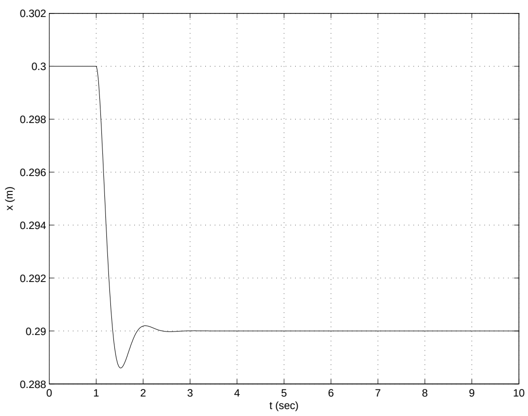

FIG. 2 – *Variation de la hauteur $x(t)$ en réponse à la montée dún passager de masse m à* <u>$t = 1$ *sec*</u>

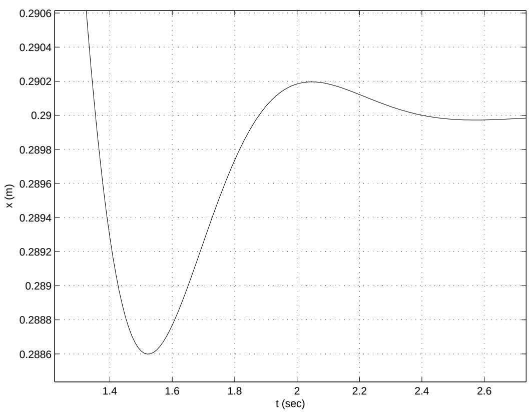

FIG. 3 – *Détail de la figure 2*

3 Commande active

Un vérin est ajouté au système de suspension qui peut alors être représenté par le schéma suivant :

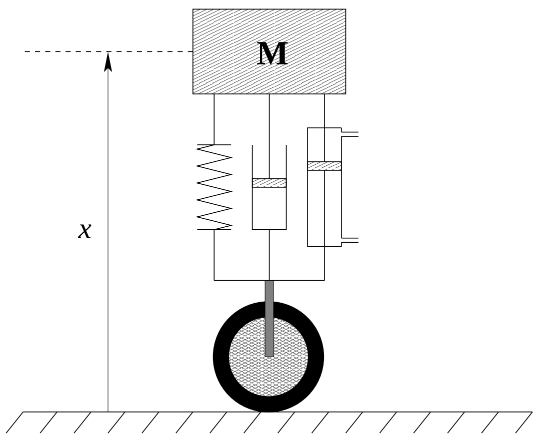

FIG. 4 – *Suspension active*

Ce vérin exerce une force $F_v(t)$ dont la valeur peut être ajustée. La nouvelle équation différentielle est (avec $\Delta_{x_d} = x_d - x_0 = 0$) :

$$\ddot{\Delta}_x + \frac{f}{M}\dot{\Delta}_x + \frac{k}{M}\Delta_x = -\frac{1}{M}F_m + \frac{1}{M}F_v \qquad (3)$$

avec $F_m = mg$.

8) Dessiner le schéma-bloc du système en boucle fermée en faisant apparaître les nouvelles entrées-sorties.

9) Quel choix simple de $F_v(t)$ permet d'annuler l'erreur en régime permanent ? Quel est l'inconvénient de cette approche ?

On cherche à présent à asservir la hauteur $x(t)$ à une hauteur désirée $x_d = x_0$. Considérons deux types de structure de commande :

Commande proportionnelle :

$$F_v(t) = k_1(\Delta_{x_d}(t) - \Delta_x(t))$$

Commande intégrale :

$$F_v(t) = k_2 \int_0^t (\Delta_{x_d}(t) - \Delta_x(t))dt$$

10) Donner la nouvelle équation différentielle décrivant l'évolution de $\Delta_x(t)$ au cours du temps pour les deux structures de commandes.

11) Dessiner le schéma-bloc du système commandé en mettant en évidence les fonctions de transfert utilisées.

12) Calculer pour chacune des deux structures de commande :

a) La fonction de transfert entre $\Delta_x(p)$ et $\Delta_{x_d}(p)$ lorsque $F_m = 0$.

b) La fonction de transfert entre $\Delta_x(p)$ et $F_m(p)$ lorsque $\Delta_{x_d}(p) = 0$.

c) En déduire la relation entre $\Delta_x(p)$ et les différentes entrées du système en boucle fermée.

13)Établir l'expression de l'erreur entre la consigne et la sortie du système. En déduire l'erreur en régime permanent. Est-il possible d'annuler cette erreur ? Conclure sur l'apport de l'effet de l'effet intégral.

4 Questions de cours

14) Donner la définition d'une fonction de transfert.

15) Quelles sont les avantages et les désavantages d'un structure de commande en boucle fermée.

Quelques formules utiles

Calcul du dépassement :

$$D = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Solution d'une équation du second ordre sans second membre :

$$x^0(t) = Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_p t + \varphi)$$

avec $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.