Examen d'automatique

Systèmes linéaires continus

Exercice : Etude des zéros d'un système (15 min)
On considère un système modélisé par la fonction de transfert suivant :

$$G(p) = \frac{ap+1}{\tau p+1}$$

1. On considère $a = 0$. Calculez la réponse indicielle du système (notée $y_1(t)$) pour une condition initiale $y(0) = 0$.
2. On considère $a \neq 0$. Calculer la réponse temporelle à un echelon unitaire (notée $y(t)$) du système en montrant que
$$y(t) = y_1(t) + a\dot{y}_1(t)$$
3. Application numérique : Tracer l'allure de la réponse indicielle pour $\tau = 1$ et $a = 1$ puis $a = -2$.
4. Que peut-on dire sur le rôle des zéros d'un système.

Problème : Etude d'un système en boucle fermée
On considère l'asservissement d'un système Σ modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

où $u(t)$ représente l'entrée du système, et $y(t)$ la sortie du système. τ est une constante caractéristique du système étudié.

On désire réaliser un asservissement permettant d'assurer les spécifications suivantes :

- Erreur de position nulle.
- Régime transitoire sans oscillations.

Première partie (35 min)
On considère l'asservissement suivant $u(t) = k(y_r(t) - y(t))$.

1. Comment s'appelle cet asservissement?
2. Calculez la fonction de transfert du système Σ.
3. Tracer le schéma bloc de l'asservissement.
4. Calculez l'erreur de position en régime permanent en fonction de k. Peut-on obtenir une erreur de position nulle.

Seconde partie (30 min)
On considère l'asservissement suivant $u(t) = k\int_0^t (y_r(t) - y(t))dt$.

1. Calculez la fonction de transfert du bloc de commande $\frac{U(p)}{Y_r(p)-Y(p)}$.
2. Tracer le schéma bloc de l'asservissement.
3. Calculez la fonction de transfert de l'asservissement complet.

4. Calculez l'erreur de position en régime permanent.

Pour la suite, on prendra $\tau = 1$.

1. Déterminez k afin de respecter la seconde spécification.
2. Tracer sa réponse indicielle le plus précisemment possible. Calculez son temps de réponse ainsi que la valeur du premier dépassement.

Question de cours (10 min)

1. Donnez la définition d'un système linéaire. Donnez un exemple et un contre-exemple.
2. Donnez la définition d'un pôle d'un système.

Quelques formules utiles

Tables des transformées de Laplace

Echelon	$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
Rampe	$u(t) = t$	$U(p) = \frac{1}{p^2}$
Impulsion	$u(t) = \delta(t)$	$U(p) = 1$
	$u(t) = e^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{p+a}$
	$u(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))$	$U(p) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$
	$u(t) = 1 - e^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{p(p+a)}$
	$u(t) = te^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$

Quelques formules :

- Pulsation propre : $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ Période des oscillation : $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Enveloppe d'amortissement donnée par $e^{-\omega_n t}$
- Temps d'établissement à 2% : $T_e \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n}$
- Temps de réponse à 5% : $T_r \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$
- Temps de montée : $T_m = \frac{\pi}{2\omega_p} = \frac{T}{4}$
- Premier dépassement : $D_1 = 100.e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ (en %) intervient à $\frac{T}{2}$