Examen d'automatique - janvier 2009

Systèmes linéaires continus

1 Commande proportionnelle

On considère un système linéaire dont l'entrée $v(t)$ et la sortie $\theta_s(t)$ sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$0.25\ \ddot{\theta}_s(t) + \dot{\theta}_s(t) = 10\ v(t), \quad \text{conditions initiales nulles.}$$

On souhaite commander ce système en boucle fermée par une correction proportionnelle de la forme

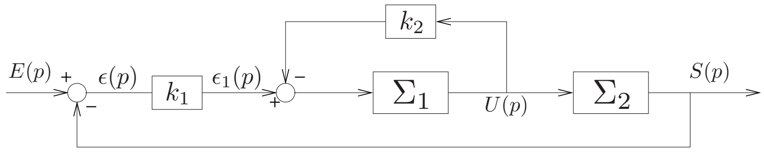
$$v(t) = k_p(\theta_r(t) - \theta_s(t)),$$

où $\theta_r(t)$ est la consigne et k_p un gain à régler.

1. Déterminer l'équation différentielle régissant la dynamique du système bouclé par la commande $v(t)$.
2. A partir de la forme canonique des équations différentielles du 2^{nd} ordre, donner le coefficient d'amortissement ζ, la pulsation propre non amortie ω_n et le gain statique K de l'équation liant $\theta_r(t)$ et $\theta_s(t)$ en fonction de k_p.
3. En précisant votre démarche, calculer le gain k_p correspondant à un dépassement maximum de 25%.
4. **On choisit $\mathbf{k_p = 0.5}$**, estimer le temps de montée T_m du système asservi.
5. Comment évolue la rapidité du système asservi (en terme de temps de montée) lorsqu'on agit sur le gain k_p ?
6. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_r(p)}$ et tracer le schéma-bloc de l'asservissement.
7. Calculer la réponse $\theta_s(t)$ à une entrée de type échelon $\theta_r(t) = 4$.

2 Système à double boucle

On s'intéresse à la régulation d'un système complexe représenté par le schéma-bloc ci-dessous. Ce dernier est constitué de deux boucles de contrôle. Une première, dite *boucle intérieure*, sert à la régulation du sous-système $\Sigma_1(p)$ modélisant l'actionneur. La seconde, dite *boucle extérieure*, permet la régulation du système $\Sigma_2(p)$ à commander tenant compte de *l'actionneur asservi* (= boucle interne) qui génère la commande $U(p)$.



on a :

$$\Sigma_1(p) = \frac{2}{p+1} \quad \text{et} \quad \Sigma_2(p) = \frac{4}{p+6}. \tag{1}$$

2.1 Boucle interne

1. Exprimer la fonction de transfert $\Sigma_3(p) = \frac{U(p)}{\epsilon_1(p)}$ représentant l'asservissement de l'actionneur.
2. Dans un premier temps $k_2 = 0$ (*i.e.* pas de bouclage), le système Σ_3 est-il stable ? Quel est son temps de réponse ?
3. Régler le gain k_2 de tel sorte que Σ_3 ait son pôle à -5.
4. Quelle est la nouvelle valeur du temps de réponse ? Conclure sur l'effet de k_2 sur la rapidité du système.

Dans la suite du problème, **on fixera $\mathbf{k_2 = 3}$**.

2.2 Boucle externe

Dans la partie précédente, la dynamique de l'actionneur a été modifiée (grâce au choix de k_2) de façon à augmenter sa rapidité de réponse. Maintenant, compte tenu d'un actionneur plus performant, on s'intéresse à la régulation globale du procédé. *La boucle interne peut être maintenant remplacée par un simple bloc de fonction de transfert $\Sigma_3(p)$ (= actionneur performant).*

1. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$. Quel est l'ordre du système ?
2. Identifier les paramètres caractéristiques ζ, ω_n et K de $F(p)$ en fonction de k_1.
3. Calculer le gain k_1 fixant l'amortissement $\zeta = 0.4$ (assurant un dépassement max de 25%)
4. Exprimer l'erreur d'asservissement $\epsilon(p)$ en fonction de la consigne $E(p)$.
5. Calculer l'erreur de position lorsque la consigne est un échelon $e(t) = e_0$.
6. Calculer la valeur du gain k_1 qui assurerait une erreur de position égale à 5% de la consigne e_0.
7. Conclure sur le compromis *précision-amortissement* à résoudre lors du réglage de k_1.

3 Questions de cours

1. Donner la définition d'un système linéaire. Donner un exemple et un contre-exemple.
2. Enoncer le théorème de la valeur finale.
3. Quel est l'intérêt de la contre-réaction *i.e.* le principe de la boucle fermée ?

4 Quelques formules utiles

Table des transformées de Laplace

Echelon	$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
Rampe	$u(t) = t$	$U(p) = \frac{1}{p^2}$
Impulsion	$u(t) = \delta(t)$	$U(p) = 1$
Exponentielle	$u(t) = e^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{p+a}$

Solution de l'équation homogène pour les équations différentielles du 2^{nd} ordre :

Cas $\|\zeta\| > 1$:	cas $\|\zeta\| = 1$:	cas $\|\zeta\| < 1$:
$y(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$	$y(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$	$y(t) = A_1 e^{-\zeta\omega_n t} cos(\omega_p t) + A_2 e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_p t)$

où, A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer. p_1, p_2 et p sont les pôles correspondant au système étudié.

Quelques formules, pour $\zeta < 1$:

- Pulsation propre : $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, Période des oscillations : $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Enveloppe d'amortissement donnée par $e^{-\omega_n t}$
- Temps d'établissement à 2% : $T_e \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n}$
- Temps de réponse à 5% : $T_r \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$
- Temps de montée : $T_m = \frac{\pi}{2\omega_p} = \frac{T}{4}$
- Premier dépassement : $D_1 = 100.e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ (en %) et intervient à $\frac{T}{2}$