Examen d'automatique

Systèmes linéaires continus

On envisage d'étudier la commande d'un système modélisé par sa fonction de transfert

$$G(p) = \frac{2}{2p+1} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

où $y(t)$ représente la sortie et $u(t)$ l'entrée de commande du système.

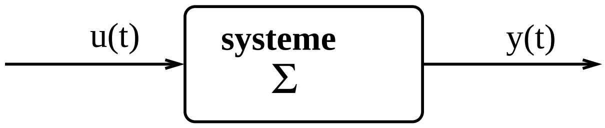

Figure 1: système étudié

Première partie : Etude en boucle ouverte (15 min)

1. Déterminer la stabilité du système en boucle ouverte.
2. Déterminer la constante de temps du système ainsi que son gain statique.
3. Tracer la réponse indicielle (pour $u(t) = 1$) du système en boucle ouverte pour $y(0) = 0$.

Seconde partie : Asservissement proportionnel (30 min)
On considère maintenant l'asservissement suivant $u(t) = k(y_r(t) - y(t)) = k\epsilon(t)$ où k est un gain pouvant être choisi et $y_r(t)$ la consigne.

On désire respecter les spécifications suivantes :

- Erreur de position nulle.
- Le dépassement de consigne ainsi que les oscillations ne sont pas autorisées.

1. Tracer le schéma bloc associé à l'asservissement.
2. Déterminer la fonction de transfert du système en boucle fermée.
3. Déterminer pour quelles valeurs de k le système en boucle fermée est stable.
4. Calculer l'erreur de position et conclure sur le respect de la première et la seconde spécification.

Trosième partie : Asservissement amélioré (30 min)
On envisage une commande en boucle fermée de la forme :

$$U(p) = \frac{k_i}{p}\epsilon(p) \tag{1}$$

où $\epsilon(t)$ représente l'erreur entre la consigne $y_r(t)$ et la sortie du système $y(t)$

1. Justifier le terme commande intégrale pour l'équation (1).
2. Déterminer la fonction de transfert du système en boucle fermée.
3. Déterminer pour quelles valeurs de k_i le système en boucle fermée est stable.

4. Calculer l'erreur de position et conclure sur le respect de la première spécification.
5. Calculer le gain k_i permettant de respecter la seconde spécification.
6. Calculer le temps de réponse du système en boucle fermée et tracer l'allure de la réponse indicielle du système en boucle fermée pour une valeur de k déterminée à la question précédente.

Question de cours (15 min)

1. Donnez la définition d'un système linéaire. Donnez un contre-exemple.
2. Donnez la définition du temps de réponse.

Quelques formules utiles

Tables des transformées de laplace

Echelon	$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
Rampe	$u(t) = t$	$U(p) = \frac{1}{p^2}$
Impulsion	$u(t) = \delta(t)$	$U(p) = 1$
	$u(t) = e^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{p+a}$
	$u(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t))$	$U(p) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$
	$u(t) = 1 - e^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{p(p+a)}$
	$u(t) = te^{-at}$	$U(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$

quelques formules :

- Pulsation propre : $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ Période des oscillation : $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Enveloppe d'amortissement donnée par $e^{-\omega_n t}$
- Temps d'établissement à 2% : $T_e \simeq \frac{4}{\zeta\omega_n}$
- Temps de réponse à 5% : $T_r \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$
- Temps de montée : $T_m = \frac{\pi}{2\omega_p} = \frac{T}{4}$
- Premier dépassement : $D_1 = 100.e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ (en %)
  intervient à $\frac{T}{2}$