Part VIII

Construction de correcteurs

Sommaire

Thanks to Yassine Ariba, Doctorant groupe Mac

Synthèse d'un correcteur

Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés :

- la stabilité du système asservi,
- la qualité du régime transitoire (Rapidité, dépassement),
- la précision en régime permanent,
- la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

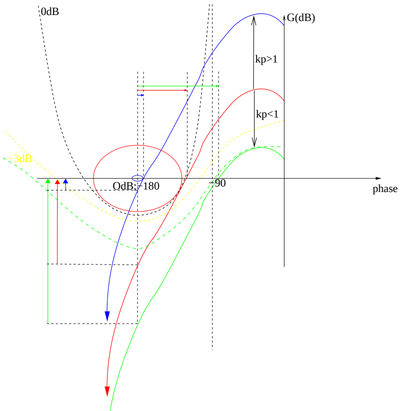
Plusieurs techniques développées :

1. Techniques directes reservées aux ordres petits,
2. Techniques fréquentielles,
3. Techniques Espace d'état.
   1. Utilisation des modèles Espace d'état,
   2. Utilisation des variables d'état pour construire des correcteurs élaborés.

Action proportionnelle

Ce type de correcteur est un simple amplificateur de gain réglable:

$$u(t) = k_p \epsilon(t) \quad \Rightarrow \quad K(p) = k_p.$$



Avantages et Inconvénients:

- La BP $\nearrow$, La rapidité de la BF $\nearrow$,
- Si $k_p > 1$, $G_{bf}(0) \nearrow$, l'erreur de position diminue,
- Si $k_p > 1$, M_g, M_ϕ $\searrow$ (jusqu'à déstabiliser le système),
- Si $k_p > 1$, Oscillations dépassement possibles,
- Si $k_p < 1$, agit en atténuateur: stabilité du système améliorée mais réponse temporelle dégradée.

Action proportionnelle: exemple

Soit le système à commander $\Sigma(p) = \frac{1}{p^2+p+1}$ et le système de commande $K(p) = k_p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

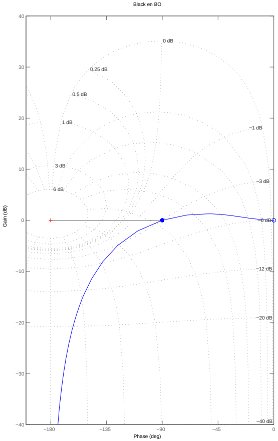
$$\Sigma_{bf}(p) = \frac{k_p}{p^2 + p + 1 + k_p}.$$

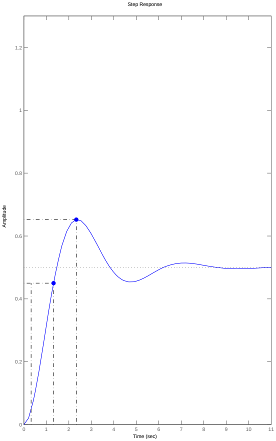
Cette nouvelle fonction de transfert est caractérisée par

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1+k}}.$$

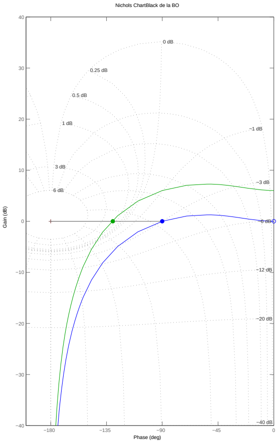
Donc si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, les marges $\searrow$ et l'erreur de position $\epsilon_p = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

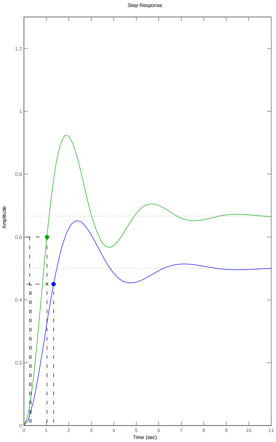
Simulations de la réponse fréquentielle et temporelle



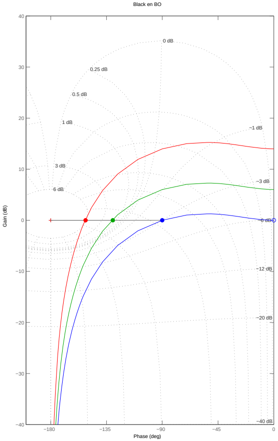


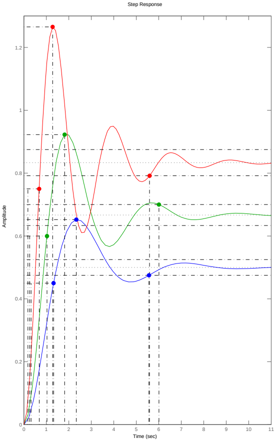
Simulations de la réponse fréquentielle et temporelle





Simulations de la réponse fréquentielle et temporelle

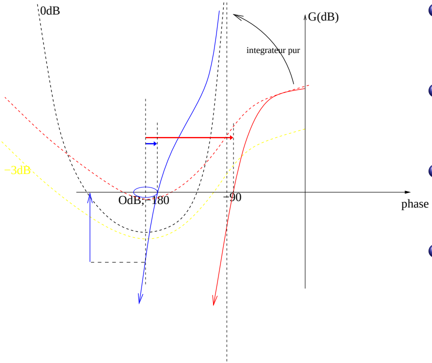




Action intégrale

Ce correcteur introduit un intégrateur qui ajoute un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte:

$$u(t) = \int_0^t \epsilon(t)dt \quad \Rightarrow \quad K(p) = \frac{1}{p}.$$



Avantages et Inconvénients:

- Gain statique $\nearrow$, erreur de position nulle en BF,
- Diagramme de phase décalé de $-90°$: marges de stabilités dégradées,
- Peut provoquer des oscillations et du dépassement,
- Rapidité $\searrow$ en général.

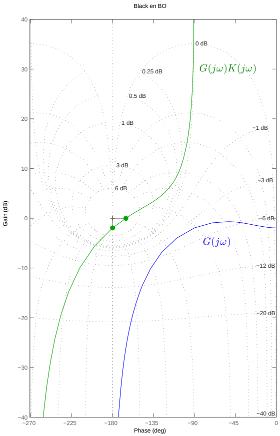
Action intégrale: exemple

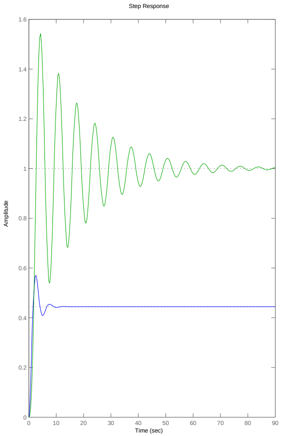
Soit le système à commander $\Sigma(p) = \frac{0.8}{p^2+p+1}$ et le système de commande $K(p) = 1/p$. Le système en boucle fermée s'exprime par

$$\Sigma_{bf}(p) = \frac{0.8}{p^3 + p^2 + p + 0.8}.$$

- Σ_{bf} est un ordre 3: la marge de gain est finie,
- Déphasage de $-\pi/2$, marges dégradées $\rightarrow$ oscillations et dépassement,
- Phénomène de surtension en boucle fermée (voir bode de Σ_{bf}),
- 1 intgrateur $\rightarrow$ Pas d'erreur de position.

Simulations de la réponse fréquentielle et temporelle

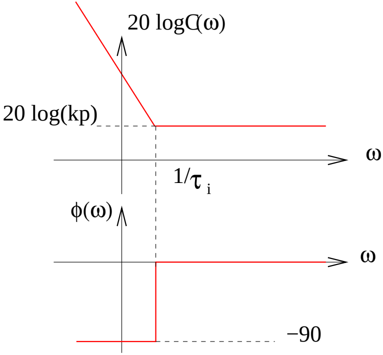




Correcteur PI (Proportionnel Intégral)

Ce correcteur a pour objectif de tirer profit des avantages de l'effet de **I** sans ses inconvénients:

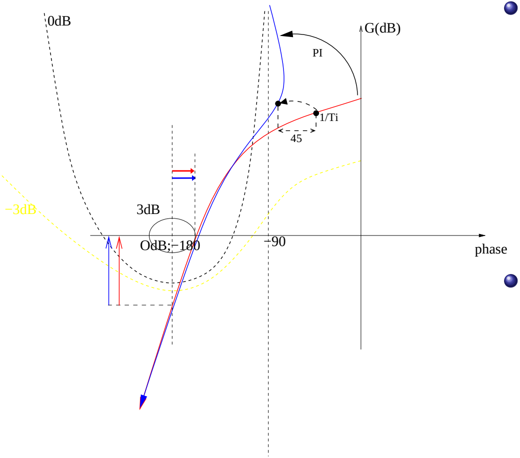
$$K(p) = k_p \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}.$$



Idée du correcteur:

- Utiliser l'avantage de l'intégrateur en basses fréquences: précision $\nearrow$,
- L'action intégrale ne doit plus avoir d'effet dans les fréquences élevées, en particulier dans la région du point critique,

Correcteur PI

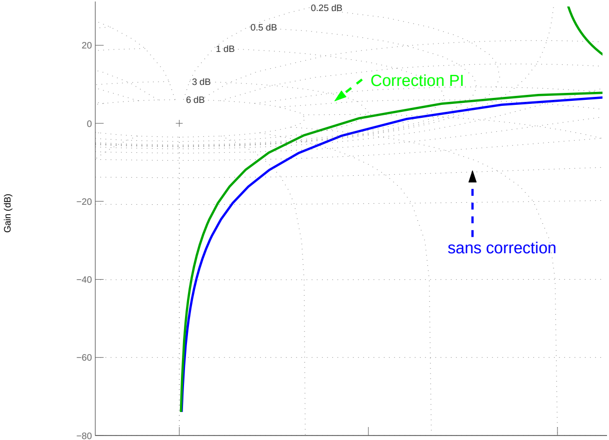


Réglage intuitif du correcteur:

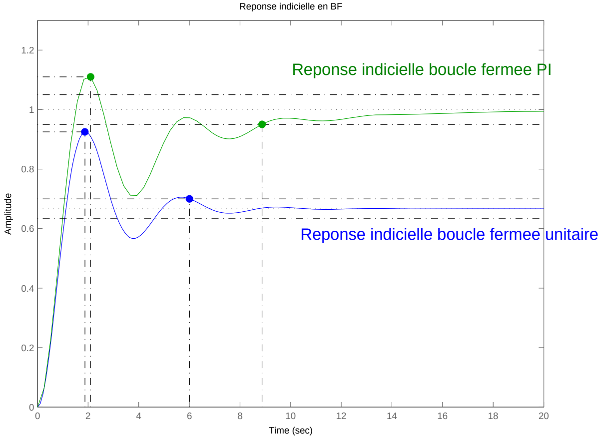
- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction:
  - le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
  - l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.

Correcteur PI: exemple

Soit le système $G(p) = \frac{2}{p^2+p+1}$. On peut calculer sa marge de phase $M_\phi \simeq 49.35$ avec $\omega_0 = 1.52 rad/sec$. Afin d'effectuer la correction seulement en basses fréquences, on choisit $1/\tau_i \simeq 1.52/5.5$. On obtient ainsi le correcteur $K(p) = \frac{1+5p}{5p}$.



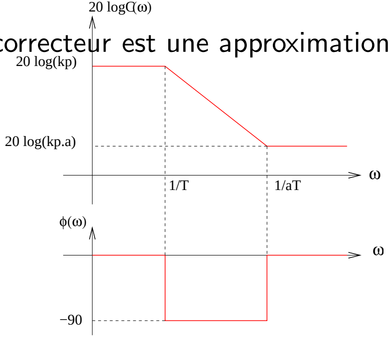
Simulations temporelles



- 1 intégrateur → Erreur de position nulle
- Oscillations et dépassement → diminuer le gain du correcteur.

Correcteur à retard de phase

Ce correcteur est une approximation du PI $K(p) = k_p \frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a < 1.$



Idée du correcteur:

- Ce correcteur a donc le même objectif que le PI,
- Généralement, il n'a pas la capacité d'annuler l'erreur en régime permanent.

Méthode de réglage du correcteur:

- Ajuster les paramètres pour régler la marge de phase,
- Calculer k_p en fonction de la précision souhaitée (réglage du gain statique),
- Choisir T afin que la phase négative du correcteur n'intervienne pas au niveau du point critique ($1/aT \ll \omega_{0db}$).

Correcteur à retard de phase: exemple

Soit la fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(1+\frac{p}{10})^3}$. On souhaite que le système en boucle fermée ait une erreur $\epsilon_p = 5\%$ et une marge de phase $\Delta\phi = 45°$:

- On régle $k_p a$ pour satisfaire la condition sur la M_ϕ

$$M\phi = \pi - 3arctan\frac{\omega_{0db}}{10} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \omega_{0db} = 10rad/s$$
$$G(\omega_{0db}) = \frac{k_p a}{\left(\sqrt{1+\frac{\omega_{0db}^2}{100}}\right)^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_p a = 2.8$$

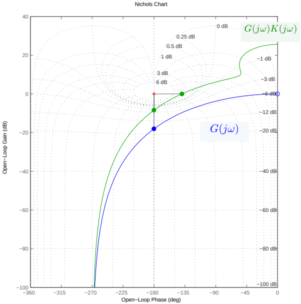
- On règle k_p pour satisfaire la condition sur la précision

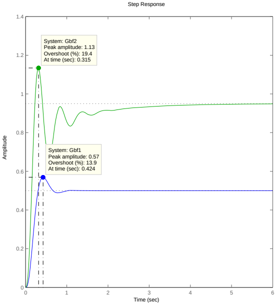
$$\epsilon_p = \frac{1}{1+k_p} = 0.05 \quad \Rightarrow \quad k_p = 19 \quad \Rightarrow \quad a = 0.147$$

- Choix de T assez grand pour que l'apport de gain $20log(k_p)$ ne soit effectif qu'en bf

$$1/aT \ll \omega_{0db} \quad \Rightarrow \quad T = 6.8$$

Correcteur à retard de phase: exemple



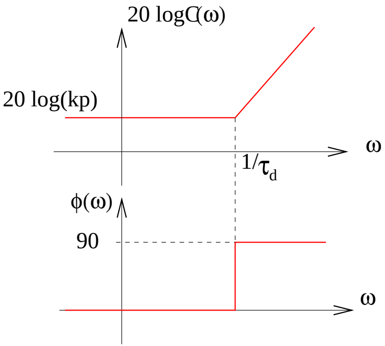


- Présence d'oscillations (marge de phase trop faible).
- Le temps de montée est diminué mais le temps de réponse est plus grand.

Correcteur PD (Proportionnel Dérivée)

Ce correcteur a pour objectif d'apporter du gain et de la phase dans les moyennes et hautes fréquences:

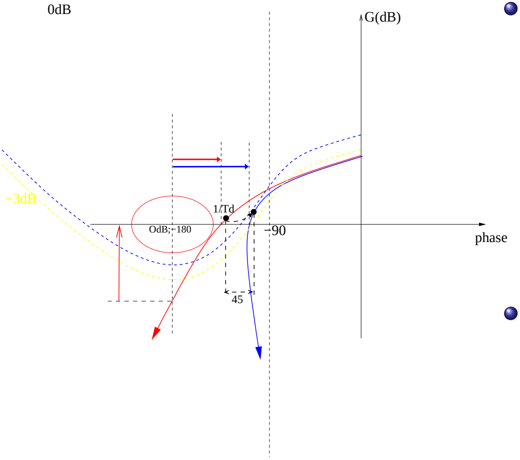
$$K(p) = k_p(1 + \tau_d p).$$



Idée du correcteur:

- Accroît le degré de stabilité (marges de gain et de phase),
- Améliore le comportement transitoire (oscillations, dépassement et rapidité),
- Problèmes: correcteur non propre, amplification du bruit (gain très grand en hf).

Correcteur PD



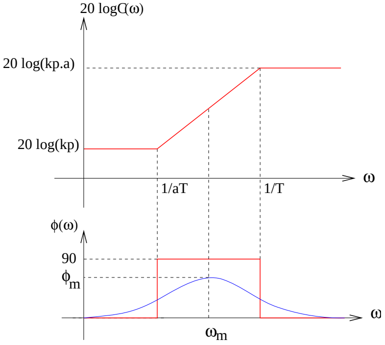
Réglage intuitif du correcteur:

- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction:
  - le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
  - l'augmenter pour améliorer la rapidité du système et/ou la précision.
- Ensuite, la partie D est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_d$ de façon à ce que la correction ne se fasse que dans la région du point critique.

Correcteur à avance de phase

Ce correcteur est une approximation du PD et peut être réalisé physiquement

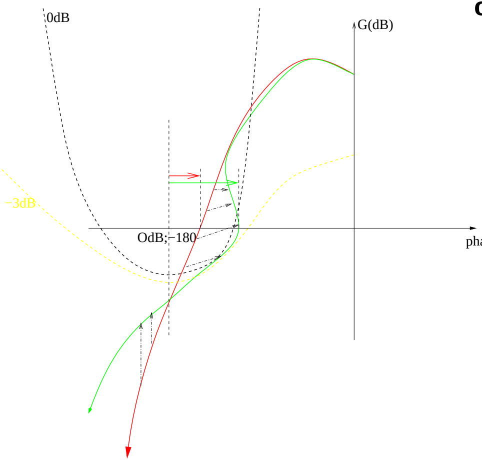
$$K(p) = k_p \frac{1 + aTp}{1 + Tp}, \quad a > 1.$$



Idée du correcteur:

- Ce correcteur a donc le même objectif que le PD,
- Ajoute de la phase près du point critique ($M\phi \nearrow$).

Correcteur à avance de phase



Méthode de réglage du correcteur:

- Ajuster le paramètre k_p pour la précision et/ou la rapidité,
- Calculer a en fonction de la quantité de phase à apporter $a = \frac{1+sin\phi_m}{1-sin\phi_m}$,
- Calculer T de sorte que ω_m coïncide avec ω_{0db} ($\omega_m = 1/T\sqrt{a}$).

Correcteur à avance de phase: exemple

Soit la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{100}{(1+p)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45°$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{0db} = 9.95 rad/s$$
$$M\phi = \pi - 2 arctan \omega_{0db} = 11°$$

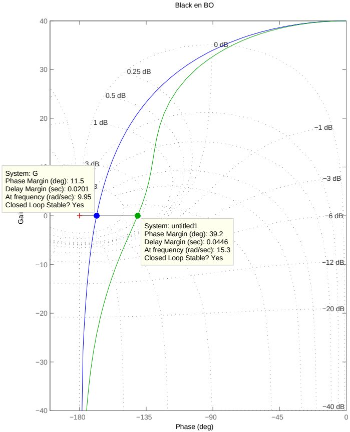
- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34°$ à la pulsation ω_{0db}

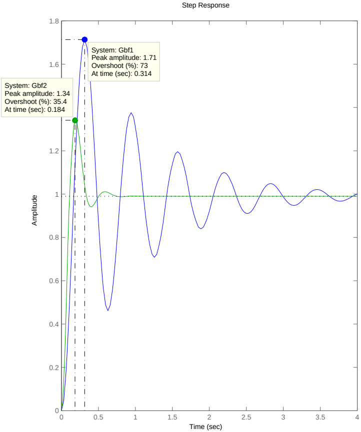
$$a = \frac{1 + sin\phi_m}{1 - sin\phi_m} = \frac{1 + sin34°}{1 - sin34°} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \quad \Rightarrow \quad T = 0.053$$

Correcteur à avance de phase: exemple

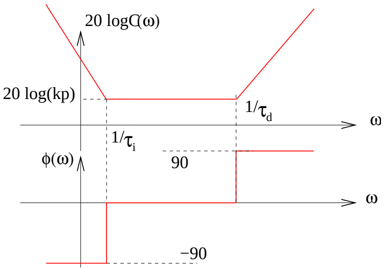




Correcteur PID

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD

$$K(p) = k_p \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) (1 + T_d p).$$



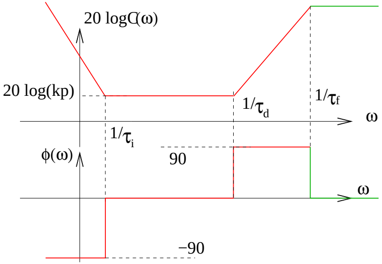
Idée du correcteur:

- Ajouter du gain en bf (précision $\nearrow$),
- Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi \nearrow$).

Correcteur PID filtré

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD + un filtre

$$K(p) = k_p \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) (1 + T_d p) \frac{1}{(1 + T_f p)}.$$



Idée du correcteur:

- Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).
- Le correcteur est causal,
- Atténuer l'effet du bruit (moins de gain en hf).

Correcteur PID

Méthode de réglage du correcteur:

- Etudier le système en BO et ses caractéristiques (marges, précision, rapidité...),
- Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant (en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité),
- Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf (pour ne pas pénaliser les marges),
- Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique (pour ne pas pénaliser la précision).

Correcteur PID filtré

Méthode de réglage du correcteur:

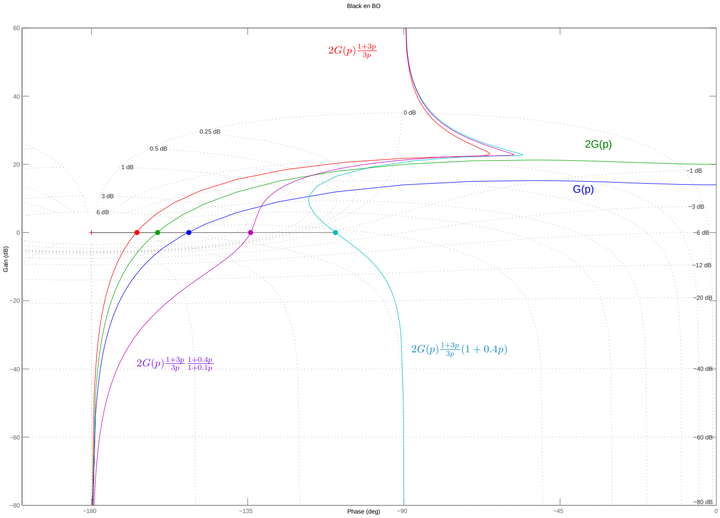
- Etudier le système en BO et ses caractéristiques (marges, précision, rapidité...),
- Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant (en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité),
- Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf (pour ne pas pénaliser les marges),
- Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique (pour ne pas pénaliser la précision).
- Régler la constante de temps du filtre de sorte qu'il n'enlève pas de phase près du point critique,
- L'ordre du filtre peut être augmenté afin de mieux atténuer le bruit en hf.

Correcteur PID: exemple

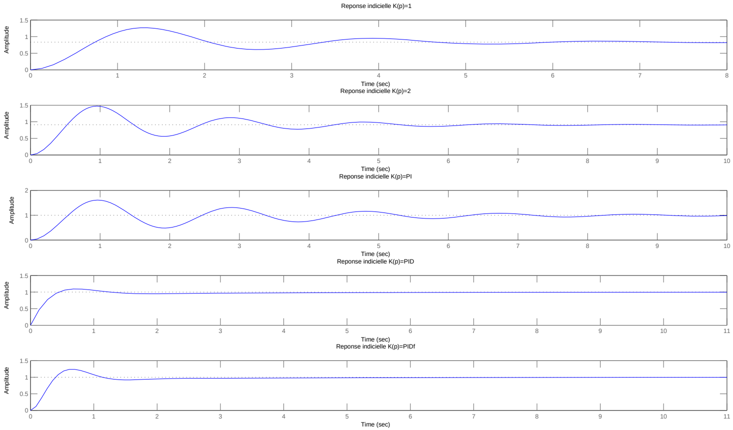
Soit le système $G(p) = \frac{5}{p^2+p+1}$.

- **Première étude:** stable en BF, une erreur de position $\epsilon_p = 16.7\%$, un dépassement de 51% et une marge de phase $M_\phi = 27.8^\circ$ à $\omega_{0db} = 2.33 rad/s$.
- **Correcteur P** afin de baisser l'erreur et accélérer le système: on prend $k_p = 2$ pour avoir une erreur de 9%. Nouvelle marge de phase $M_\phi = 18.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.23 rad/s$ et un dépassement de 61.9%.
- Choix de la constante de temps du **I** avant le point critique $T_i = 3 \gg 1/3.23$. Le correcteur $C(p) = 2\frac{1+3p}{3p}$.
- ϵ_p est maintenant nulle mais nouvelle marge de phase de $M_\phi = 12.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.24 rad/s$. Il s'agit ensuite de placer la constante de temps de la partie D avant le point critique de façon à laisser le temps au correcteur de remonter la phase jusqu'a obtenir une marge satisfaisante: $T_i \gg T_d = 0.4 > 1/3.24$. On obtient $M_\phi = 70.4^\circ$.
- Ajout du Filtre avec une constante de temps relativement faible $T_f = 0.1 < 1/3.24$. Il en résulte $M_\phi = 45.9^\circ$, ce qui reste satisfaisant.

Simulations fréquentielles



Réponses temporelles de la BF

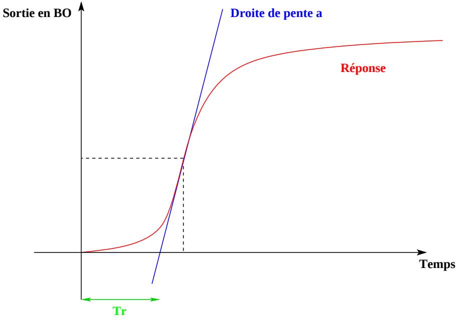


D'autre types de réglages automatiques sont possibles.

- Réglage par essai erreurs.
- Méthode de Ziegler-Nichols.
- Méthode d'oscillations par relais.

Méthode de Ziegler-nichols

Ziegler et NIchols ont calculé les différents paramètres de la commande PID en minimisant le critère intégral $J = \int_0^\infty |\epsilon(t)| dt$



- On applique un échelon au processus en boucle ouverte (sans le régulateur).
- On trace la tangente au point d'inflexion .
- On mesure le temps T_r ainsi que la pente a de la droite d'inflexion.

Méthode de Ziegler-nichols

On obtient la valeur du correcteur en utilisant le tableau suivant :

Régulateur $K(p)$	Essai indiciel (T_r, a)
k_p	$k_p = \frac{1}{aT_r}$
$k_p(1 + \frac{1}{\tau_i p})$	$k_p = \frac{0.9}{aT_r}$, $\tau_i = 3.3T_r$
$k_p(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p)$	$k_p = \frac{1.2}{aT_r}$, $\tau_i = 2T_r$, $\tau_d = 0.5T_r$