Résolution des Equations Différentielles Ordinaires

Frédéric Gouaisbaut *
Ver 1.2

4 septembre 2009

*LAAS-CNRS, Université de Toulouse, UPS

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Une première partie de cette note résume brièvement les différentes techniques qui permettent la résolution des équations différentielles ordinaires. La seconde et la troisième partie s'intéressent plus spécifiquement au cas des équations différentielles d'ordre 1 et 2. Nous introduisons également dans ces sections un certains nombre d'outils permettant de comprendre l'allure de ces solutions. Enfin, la quatrième partie partie introduit la notion de transformée de Laplce permettant de résoudre de manière très efficace les équations différentielles linéaires ordinaires. Les objectifs sont donc les suivants :

Objectifs

1. Comprendre la méthodologie de résolution des équations différentielles ordinaires.
2. Résoudre les équations différentielles du premier et second ordre.
3. Savoir analyser les solutions des équations différentielles du premier et second ordre.
4. Utiliser le formalisme de Laplace afin de résoudre les équations différentielles ordinaires.

1 Généralités sur la résolution

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la méthode générale de la résolution d'une équation différentielle donnée par l'équation suivante :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad (1)$$

dont les conditions initiales sont par ailleurs fixées par n constantes $y_0, \dot{y}_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$, telles que $y(0) = y_0 \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$.
Le problème est donc le suivant : étant donnée une fonction $t \mapsto u(t)$ suffisamment régulière[1], comment détermine-t-on la fonction $t \mapsto y(t)$ vérifiant (1) et satisfaisant les conditions initiales . Cependant, les développements théoriques sur l'existence d'une solution maximale (**problème de Cauchy**) ne seront pas abordés. Seules les techniques pour calculer effectivement les solutions y seront abordées.

Par la suite, on appellera ordre de l'équation différentielle, le degré de dérivation le plus élevé, ici n si $a_n \neq 0$.

1.1 Une première méthode de résolution

Une première méthode de résolution peut être résumée en quatre points :

1. Résoudre l'équation sans second membre appelée **équation homogène**[2]. Nous noterons la solution $\mathbf{y_l(t)}$. Celle-ci vérifie donc l'équation :

$$a_n y_l^{(n)}(t) + a_{n-1} y_l^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}_l(t) + a_0 y_l(t) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

et dépend d'un certain nombre de constantes qui seront déterminées au point 4.

2. Détermination d'**une** solution particulière de l'équation avec second membre. Nous noterons cette solution $\mathbf{y_p(t)}$. Celle-ci vérifie donc l'équation :

$$a_n y_p^{(n)}(t) + a_{n-1} y_p^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}_p(t) + a_0 y_p(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad (3)$$

3. La solution générale est alors donnée par la somme des deux solutions

$$\mathbf{y_g(t)} = \mathbf{y_l(t)} + \mathbf{y_p(t)}$$

.

[1]On appelle une fonction suffisamment régulière une fonction suffisamment continue et dérivable sur son domaine de définition, par exemple une fonction $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^+)$

[2]c'est à dire que $u(t) \equiv 0, \forall t$

4. En dernier lieu, afin de résoudre complétement l'équation différentielle, il convient d'utiliser les conditions initiales ($y(0), \dot{y}(0)$ ...) pour déterminer les constantes issues de la résolution de l'équation sans second membre. Ces constantes sont déterminées en résolvant le système suivant d'équations linéaires :

$$\begin{cases} y_g(0) = y_0, \\ \dot{y}_g(0) = \dot{y}_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

1.2 Résolution de l'équation sans second membre ou équation homogène

Nous nous intéressons à la résolution de l'équation sans second membre c'est-à-dire :

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{4}$$

Afin de déterminer l'ensemble des solutions possibles de l'équation sans second membre (4), introduisons la notion de polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle.

Définition 1 (polynôme caractéristique) *On appelle polynôme caractéristique de l'équation différentielle (4) le polynôme*

$$\mathbf{P}(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \tag{5}$$

Ce polynôme est de degré n. On introduit également la notion de pôles de l'équation différentielle qui sont les racines du polynôme caractéristique associé à (4).

Définition 2 (pôles de l'équation différentielle) *Les* ***pôles*** *de l'équation différentielle (4) sont les racines du polynôme caractéristique, $p_1, \ldots, p_r$, de multiplicités respectives sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Le polynôme caractéristique peut donc être factorisé ainsi :*

$$\mathbf{P}(p) = (p-p_1)^{\alpha_1}(p-p_2)^{\alpha_2}\ldots(p-p_r)^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r}(p-p_i)^{\alpha_i}, \; \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = n$$

Les solutions de l'équation homogène s'expriment alors aisement à l'aide des pôles de la manière suivante :

Théorème 1 (solution de l'équation sans second membre) *Les solutions de l'équation différentielle sans second membre sont de la forme :*

$$\mathbf{y_l(t)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{r}} \mathbf{q_i(t) e^{p_i t}}$$

où q_i sont des polynômes quelconques de degré $\alpha_i - 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est $p+1$, dont la racine évidente est -1. La solution de l'équation est donc de la forme $y_l(t) = q_1(t)e^{-t}$ avec $q_1(t)$ un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante.

$$y_l(t) = \alpha e^{-t},$$

où α est une constante à déterminer.

Exemple 2 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est p^2+2p+1*, dont la racine double est* -1*. La solution de l'équation est donc de la forme* $y_l(t) = q_1(t)e^{-t}$ *avec* $q_1(t)$ *un polynôme de degré 1, c'est à dire* $y(t) = (at+b)e^{-t}$*, avec* a *et* b *deux constantes à déterminer.*

Exemple 3 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 2y(t) = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est $p^3 + 4p^2 + 5p + 2$*, dont les racines évidentes sont* $-1, -1, -2$*. La solution de l'équation est donc de la forme* $y(t) = q_1(t)e^{-t} + q_2(t)e^{-2t}$ *avec* $q_1(t)$ *un polynôme de degré 1 et* $q_2(t)$ *un polynôme de degré 0,c'est-à-dire une constante.*

$$y_l(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t} + \gamma e^{-2t},$$

où α, β, γ *sont des constantes à déterminer.*

Exemple 4 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$$

Le polynôme caractéristique associé est $p^2 + 1$*, dont les racines sont* $-j, j$*. La solution de l'équation est donc de la forme* $y_l(t) = q_1(t)e^{-jt} + q_2(t)e^{jt}$ *avec* $q_1(t)$ *et* $q_2(t)$ *deux polynômes de degré 0, c'est-à-dire deux constantes.*
Si nous cherchons des solutions réelles (ce qui est très souvent le cas en Physique), nous pouvons également réécrire la solution en exhibant des fonctions trigonométriques. $y(t)$ *est une fonction réelle et vérifie donc* $\bar{y}_l(t) = y_l(t)$*, ce qui implique les relations suivantes*

$$\bar{q}_1(t)e^{jt} + \bar{q}_2(t)e^{-jt} = q_1(t)e^{-jt} + q_2(t)e^{jt},$$

et donc $\bar{q}_1 = q_2$*. Comme* $e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$ *et* $e^{-jt} = \cos(t) - j\sin(t)$*, nous obtenons facilement une nouvelle réécriture de la solution*

$$y_l(t) = 2\Re(q_1(t))\cos(t) + 2\Im(q_1(t))\sin(t).$$

1.3 Recherche de la solution particulière et solution complète

Pour résoudre l'équation complète, il faut trouver une solution particulière que l'on ajoutera à la solution de l'équation homogène. Il existe plusieurs méthodes. Une première méthode appelée méthode de la variation de la constante suppose que les constantes de la solution homogène sont désormais des fonctions du temps. En supposant que la fonction ainsi constituée est solution de l'équation différentielle avec second membre, cela permet bien souvent de déterminer une solution particulière. Cette technique sera developpée lors de la résolution des équations différentielles d'ordre 1 et 2. Une seconde technique consiste à "deviner la structure" de la solution particulière grâce à la forme du second membre (c.f. plus loin pour des exemples).
Les deux prochaines sections sont consacrées plus spécialement à l'étude des équations linéaires du premier et du second ordre.

2 Résolution de l'équation différentielle du premier ordre

Une équation du différentielle du premier ordre est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où y_0 représente la condition initiale de l'équation différentielle.
Puisque $a_1 \neq 0$, nous pouvons transformer cette dernière équation en une forme dite **forme canonique** décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

τ est appelée la **constante de temps** du système et est homogène à un temps. K est appelé le **gain statique**.

2.1 Résolution de l'équation sans second membre

En suivant la procédure décrite dans la première partie, il nous faut calculer le polynôme caractéristique. Celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{P}(p) = \tau p + 1 \,\text{et}\, \mathbf{P}(p) = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{\tau}.$$

La solution de l'équation homogène s'écrit donc :

$$y_l(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

où A est une constante qui sera déterminée ultérieurement.

2.2 Utilité de la solution homogène : effet des conditions initiales

Lorsque nous voulons calculer l'effet des conditions initiales sur la solution d'une équation différentielle, on s'intéresse à l'équation homogène, c'est-à dire sans second membre. Cette solution, soumise finalement uniquement aux conditions initiales, est appelée en général **solution libre** de l'équation différentielle.

$$\begin{cases} \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \\ y(0) = \mathbf{y_0}. \end{cases}$$

D'après la section précédente, la solution de l'équation homogène s'écrit donc :

$$y_l(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Pour $t = 0$, la condition initiale s'écrit $y(0) = A = y_0$ et la solution devient :

$$\mathbf{y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}.$$

Remarque 1 (Rapidité de convergence/divergence) *Il est à noter que lorsque $\tau > 0$, la solution de l'équation différentielle tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$. On dit que la solution converge vers zéro. Par contre, lorsque $\tau < 0$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \pm\infty$. On dit que la solution de l'équation différentielle diverge.*

Remarque 2 (A propos des modes) *Comme $\tau \in \mathcal{R}$, le pôle du polynôme caractéristique est également réel. On dit alors que la solution admet un* ***mode apériodique***[3] *de constante de temps τ. Lorsque cette constante de temps est positive, elle donne une indication sur la rapidité de convergence de la réponse. Ainsi, plus cette constante de temps est grande, plus la réponse est lente pour converger comme le montre la Figure 1.*

[3] Cette dénomination nous apparaîtra plus clairement dans les sections suivantes

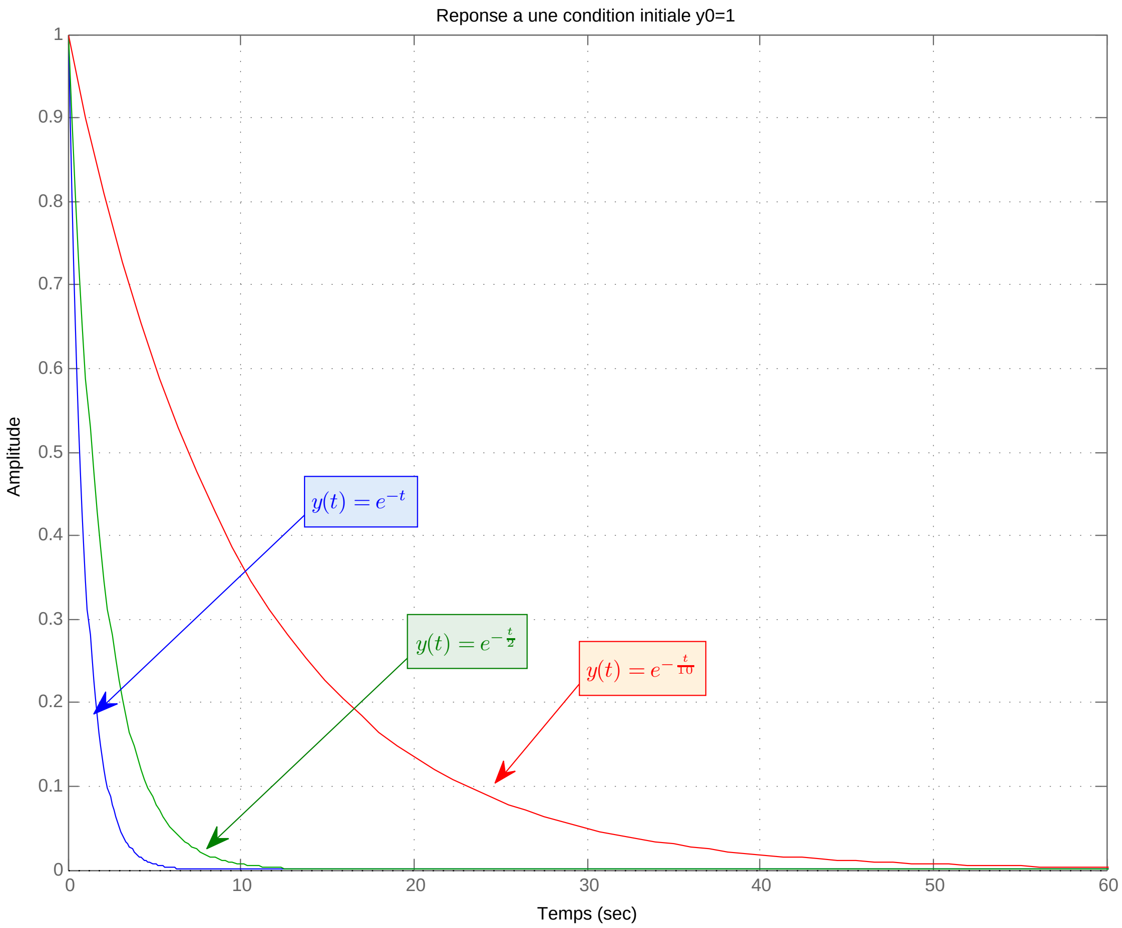

FIG. 1 – Réponse à une condition initiale $y_0 = 1$ pour différentes valeurs de τ.

2.3 Résolution de l'équation avec second membre

2.3.1 Méthodes de la variation de la constante

Nous supposerons pour le moment que $u(t)$ n'admet pas de structure particulière. Dans la section précédente, nous avons vu que la solution de l'équation homogène s'écrit

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Afin de résoudre l'équation différentielle avec le second membre, il nous faut déterminer une solution particulière. La démarche adoptée est celle de la méthode dite de la variation de la constante. Nous allons supposer qu'une solution particulière s'écrit à l'aide de la solution $y_l(t)$ et est décrite par :

$$y_p(t) = A(\mathbf{t})e^{-\frac{t}{\tau}},$$

où $t \mapsto A(t)$ est désormais une fonction à déterminer. Cette dernière solution particulière doit bien évidemment satisfaire l'équation différentielle (6) reproduite ici.

$$\tau \tfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t).$$

Un simple calcul nous donne alors :

$$\tau\left(\frac{dA(t)}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}A(t)e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + A(t)e^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t),$$

$$\tau\frac{dA(t)}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ku(t),$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{K}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}u(t).$$

Une solution est alors donnée par

$$A(t) = \int_0^t \frac{K}{\tau}e^{\frac{s}{\tau}}u(s)ds + C,$$

où C est une constante **choisie** égale par exemple à la valeur de la fonction $t \mapsto A(t)$ en zéro (A(0)=C). Une solution particulière s'écrit alors :

$$y_p(t) = \int_0^t \frac{K}{\tau}e^{-\frac{t-s}{\tau}}u(s)ds + Ce^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Exemple 5 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + 2y(t) = 1, \forall t > 0 \\ y(0) = y_0 = 1 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit $p+2=0$. La solution homogène de l'équation différentielle est définie par $y_l(t) = Ae^{-2t}$. Recherchons une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose donc $y_p(t) = A(t)e^{-2t}$.

$$\begin{array}{l} \dot{y}_p(t) + 2y_p(t) = 1, \\ \dot{A}(t)e^{-2t} - 2A(t)e^{-2t} + 2A(t)e^{-2t} = 1, \\ \dot{A}(t) = e^{2t} \\ A(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array}$$

On en déduit donc $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \times e^{-2t} = \frac{1}{2}$. Remarquons que le second membre $u(t)$ est également une constante. Nous aurions pu deviner la forme de la solution en posant $y_p(t) = \alpha$. Il vient alors :

$$\begin{array}{l} \dot{y}_p(t) + 2y_p(t) = 1, \\ 2\alpha = 1, \\ y_p(t) = \frac{1}{2}, \end{array}$$

Cette démarche a l'avantage de la simplicité si on devine juste ! La solution générale s'écrit donc $y_g(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2}$, qui dépend d'une constante A. Celle ci est déterminée à l'aide la condition initiale. Si on suppose que $y_g(0) = y_0 = \mathbf{1}$, alors la constante A est entièrement déterminée par l'équation :

$$y_g(0) = A + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

La solution générale est donc $y_g(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$.

Exemple 6 *Reprenons le même exemple mais changons le second membre :*

$$\left\{ \dot{y}(t) + 2y(t) = \cos(t), \forall t > 0 y(0) = y_0 = 1 \right.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit $p+2=0$. *La solution homogène de l'équation différentielle est définie par* $y_l(t) = Ae^{-2t}$. *Recherchons une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose donc* $y_p(t) = A(t)e^{-2t}$.

$$\begin{array}{l} \dot{y}_p(t) + 2y_p(t) = \cos(t), \\ \dot{A}(t)e^{-2t} - 2A(t)e^{-2t} + 2A(t)e^{-2t} = \cos(t), \\ \dot{A}(t) = e^{2t}\cos(t) \end{array}$$

En utilisant la formule d'Euler $\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right)$, *on obtient alors :*

$$\begin{array}{l} \dot{A}(t) = e^{2t}\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{(2+j)t} + e^{(2-j)t}\right) \\ A(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+j}e^{(2+j)t} + \frac{1}{2-j}e^{(2-j)t}\right) y_p(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+j}e^{jt} + \frac{1}{2-j}e^{-jt}\right) \end{array}$$

En simplifiant les expressions complexes, on trouve alors $y_p(t) = \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$ *une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques. Remarquons que le second membre* $u(t)$ *est également une fonction trigonométrique. Nous aurions pu deviner la forme de la solution en posant* $y_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. *Il vient alors :*

$$\begin{array}{l} \dot{y}_p(t) + 2y_p(t) = \cos(t), \\ -a\sin(t) + b\cos(t) + 2a\cos(t) + 2b\sin(t) = \cos(t). \end{array}$$

On résoud ainsi un système linéaires d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a + 2b & = & 0, \\ 2a + b & = & 1, \end{array} \right.$$

ce qui conduit à $a = \frac{2}{5}$ *et* $b = \frac{1}{5}$. *La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors* $y_g(t) = Ae^{-2t} + \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$. *Si* $y(0) = y_0 = 1$, *alors la constante* A *est entièrement déterminée par l'équation :*

$$y_g(0) = A + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{3}{5}.$$

La solution générale est donc $y_g(t) = \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$.

2.3.2 Un cas important : calcul et tracé de la réponse indicielle

On suppose dans cette sous-partie que $u(t) = e_0$[4]. le calcul de $A(t)$ s'effectue alors ainsi :

$$A(t) = Ke_0\left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1\right) + C.$$

En choisissant $C = Ke_0$, on obtient $A(t) = Ke_0e^{\frac{t}{\tau}}$. Dans ce cas, une solution particulière s'écrit

$$y_p(t) = Ke_0.$$

La solution générale est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + Ke_0, \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

La constante A est déterminée à la condition initiale y_0. Nous obtenons alors finalement la solution de l'équation différentielle complète :

$$y(t) = y_0e^{-\frac{t}{\tau}} + Ke_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

[4]On appellera par la suite réponse indicielle la solution d'une équation différentielle lorsque $u(t)$ est une constante $u(t) = e_0, \forall t > 0$.

Remarque 3 (A propos de la solution particulière) *La technique dite de la méthode de la variation de la constante peut être simplifiée si nous pouvons "imaginer" une solution particulière suivant le type de fonction $u(t)$. Ainsi, si la fonction $u(t)$ est une fonction polynômiale, une solution particulière est également une fonction polynômiale. De la même manière, une fonction $u(t)$ trigonométrique impliquera le choix d'une fonction particulière trigonométrique.*
Ainsi, lorsque $u(t)$ est une constante, on peut rechercher une solution particulière polynômiale. Des calculs simples montrent alors $y(t) = Ke_0$ est solution de l'équation différentielle (6).

Lorsque nous traçons la solution de l'équation, deux cas sont à distinguer suivant la valeur du pôle. Dans le cas d'un pôle négatif, $p < 0$, nous pouvons ainsi tracer la courbe de la réponse indicielle (pour $y_0 = 0$) et ceci pour différentes valeurs de τ (voir figure 2).
Dans le cas d'un pôle positif, $p > 0$, nous avons $\lim_{t \longrightarrow +\infty} y(t) = -\infty$ comme le montre la figure 3.

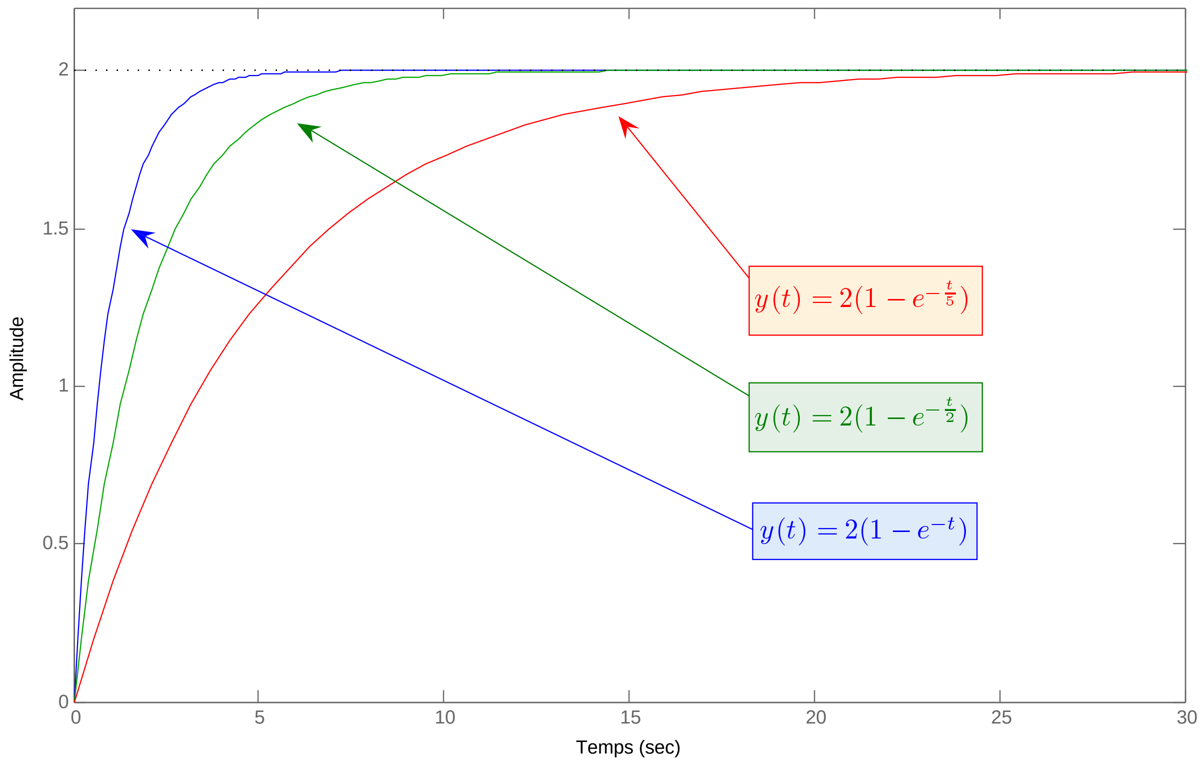

FIG. 2 – Solution à un échelon pour une condition initiale $y_0 = 0$.

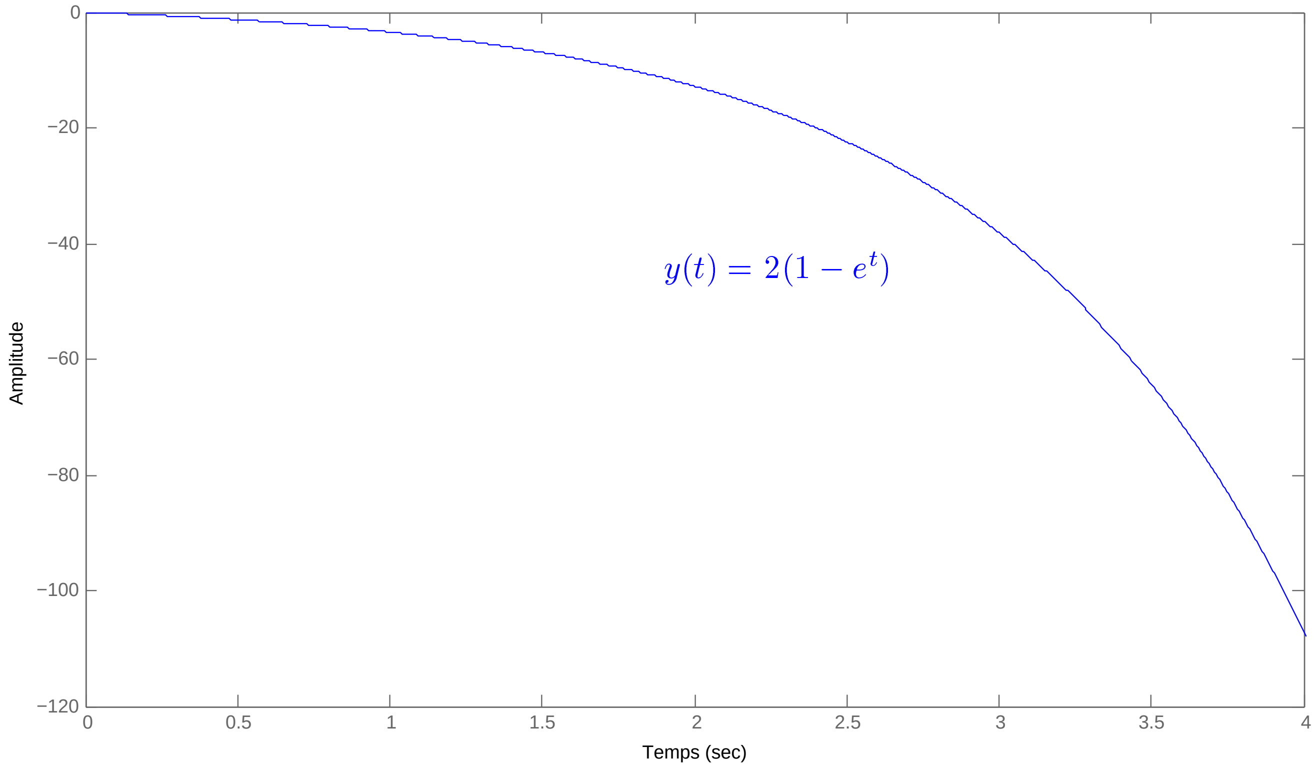

FIG. 3 – Solution de $-\dot{y}(t) + y(t) = 2$ pour une condition initiale $y_0 = 0$.

3 Résolution de l' équation différentielle du second ordre

Une équation du différentielle du second ordre est décrite par l'équation différentielle suivante [5] :

$$\begin{cases} a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{cases} \tag{7}$$

y_0 et $\dot{y}_0$ représentent les conditions initiales de l'équation différentielle. Puisque $a_0 \neq 0$, nous pouvons transformer cette dernière équation en une forme dite **forme canonique** décrite par l'équation suivante[6] :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t), \tag{8}$$

où

- ζ est le **coefficient d'amortissement**.
- ω_n est la **pulsation naturelle** du système.
- K est le **gain statique**.

Nous allons alors examiner les solutions de l'équation différentielle du second ordre à l'aune de ces coefficients canoniques en suivant le plan de la première section consacrée à la résolution de l'équation différentielle du premier ordre.

[5]On supposera que le second membre de l'équation différentielle n'admet pas de dérivée première.
[6]On supposera également que a_0 et a_2 sont de même signe.

3.1 Résolution de l'équation sans second membre

En suivant la procédure décrite dans la première partie, il nous faut calculer le polynôme caractéristique. Celui-ci s'écrit

$$\mathbf{P}(p) = p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2. \tag{9}$$

Afin de déterminer la solution de l'équation sans second membre, il nous faut calculer les pôles de (9). Le calcul du discriminant de (9) nous donne :

$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1).$$

Suivant le signe de Δ, ils existent plusieurs possibilités pour la solution examinées dans les paragraphes suivants.

3.1.1 Résolution pour un discriminant $\Delta > 0 \Longleftrightarrow |\zeta| > 1$

Dans ce cas, les deux pôles du système sont réels et valent :

$$\begin{cases} p_1 = -\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right), \\ p_2 = -\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right). \end{cases}$$

Posons $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$ deux **constantes de temps**[7]. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit donc :

$$y(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

où A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer qui dépendent des conditions initiales.

Remarque 4 (A propos des modes) *Les pôles du polynôme caractéristique sont réels de constante de temps τ_1 et τ_2. On dit alors que la solution admet deux* ***modes apériodiques*** *de constantes de temps τ_1 et τ_2. Par extension, on dit alors que la réponse est de type apériodique.*

3.1.2 Résolution pour un discriminant $\Delta = 0 \Longleftrightarrow |\zeta| = 1$

Dans ce cas, nous obtenons un pôle double qui s'écrit $p = -\omega_n\zeta = -\frac{1}{\tau}$. La solution générale de l'équation sans second membre est donc de la forme :

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{t}{\tau}},$$

où A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer dépendantes des conditions initiales.

Remarque 5 (A propos des modes) *Les pôles du polynôme caractéristique sont réels, doubles de constante de temps τ. On dit alors que la solution admet deux* ***modes apériodiques*** *de constantes de temps τ. Par contre, on dit alors que la réponse est de type* ***critique****.*

3.1.3 Résolution pour un discriminant $\Delta < 0 \Longleftrightarrow |\zeta| < 1$

Dans ce cas, les deux pôles du système sont complexes et valent :

$$\begin{cases} p_1 = -\omega_n \left(\zeta + j\sqrt{1 - \zeta^2}\right), \\ p_2 = -\omega_n \left(\zeta - j\sqrt{1 - \zeta^2}\right). \end{cases}$$

On peut réécrire les pôles sous la forme :

$$\begin{cases} p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_p, \\ p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_p = \overline{p_1}, \end{cases}$$

[7] Attention, à l'instar de l'EDO du premier ordre, ces constantes de temps peuvent être positives ou négatives. Plus précisément, si $\zeta < 0$, alors les deux constantes de temps sont négatives.

où $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ est appelée la **pulsation propre** de la réponse. La solution de l'équation différentielle sans second membre s'écrit alors :

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t},$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes complexes à déterminer. En posant $f_1(t) = \frac{e^{p_1 t}+e^{p_2 t}}{2}$ et $f_1(t) = \frac{e^{p_1 t}-e^{p_2 t}}{2j}$, on montre également que la solution peut s'écrire :

$$y(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t),$$

où A_1 et A_2 sont des constantes à déterminer dépendant des conditions initiales. Or, on peut écrire :

$$f_1(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_p t)$$

$$f_2(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_p t)$$

La solution de l'équation différentielle peut alors s'écrire :

$$y_l(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_p t) + A_2 e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_p t)$$

où $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$ est appelée la **constante de temps** de la réponse et ω_p est appelée la **pulsation propre** de la réponse. En continuant de manipuler cette dernière équation, $y_l(t)$ peut également s'écrire :

$$y_l(t) = \underbrace{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}_{B}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\underbrace{\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}}_{\alpha_1}\cos(\omega_p t) + \underbrace{\frac{A_2}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}}_{\alpha_2}\sin(\omega_p t) \right).$$

Comme $|\alpha_1| \leq 1$, $|\alpha_2| \leq 1$ et $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, on peut poser $\alpha_1 = \sin(\phi)$ et $\alpha_2 = \cos(\phi)$ pour obtenir :

$$y_l(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}\left(\sin(\phi)\cos(\omega_p t) + \cos(\phi)\sin(\omega_p t)\right)$$

cette dernière solution peut alors également s'écrire :

$$y_l(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_p t + \phi),$$

où B, ϕ sont deux constantes à déterminer.

Remarque 6 (A propos des modes) *Les pôles du polynôme caractéristique sont complexes conjuguées de constante de temps τ et de pulsation propre ω_p. On dit alors que la solution admet un* ***mode pseudo-périodique*** *de constante de temps τ et de pulsation propre ω_p. Par extension, on dit alors que la réponse est de type* ***pseudo-périodique****.*

Remarque 7 (Modes, convergence et vitesse de convergence) *Lorsque les pôles sont à partie réelles négatives, les constantes de temps sont positives et les solutions libres de l'équation différentielle converge vers zéro. Dans le cas contraire, les solutions divergent et tendent vers $\pm\infty$.*

Lorsque l'équation différentielle est du premier degré, il est assez facile d'évaluer la vitesse de convergence vers 0 de la réponse à une condition initiale en fonction de la constante de temps positive. Plus cette constante de temps est petite et positive (c'est-à-dire admettant un pôle très négatif), plus la solution converge rapidement vers zéro.

Dans le cas des équations du second ordre, cette relation est légèrement plus compliquée à établir. Effectivement, les deux constantes de temps entrent en jeu. On peut tout de même établir quelques heuristiques bien utiles pour comprendre comment évolue la vitesse de convergence en fonction de ces paramètres canoniques. En premier lieu, dans le cas d'un solution critique ou pseudo-périodique, il existe une seule constante de temps qui va définir la rapidité de convergence [8]. Effectivement, l'exponentielle $e^{-t/\tau}$ va

[8]Elle définira également de manière analogue la rapidité de divergence si cette constante de temps est négative.

Equations différentielles	**Pôles**	**Constantes de temps**
$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 10y(t) = 0$	$\{-5; -2\}$	$\{\tau_1 = 1/5; \tau_2 = 1/2\}$
$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0$	$\{-1; -2\}$	$\{\tau_1 = 1; \tau_2 = 1/2\}$
$\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 10y(t) = 0$	$\{-10; -1\}$	$\{\tau_1 = 1/10; \tau_2 = 1\}$

TAB. 1 – Les différents pôles des tracés de la figure 4

dominer la fonction polynomiale (cas critique) ou sinusoidale (cas pseudo-périodique). Dans le cas apériodique, il est évident que la vitesse de convergence dépend essentiellement de la manière dont convergent les exponentielles $e^{p_1 t}, e^{p_2 t}$ et plus particulièrement les constantes de temps. Plus les pôles sont négatifs (plus les constantes de temps sont petites), plus la convergence est rapide. Par contre, cette rapidité de convergence est limitée par la plus grande valeur des deux constantes de temps qui "imposera sa dynamique". Ainsi, la réponse à une condition initiale d'une équation différentielle qui admet les constantes de temps $\tau_{11} = 1, \tau_{12} = 1/10$ aura une convergence plus lente qu'une réponse à une condition initiale d'une équation différentielle qui a les constantes de temps $\tau_{21} = 1/5, \tau_{22} = 1/4$. Effectivement, la constante de temps τ_{11} limite la vitesse de convergence. On dit alors que cette constante de temps correspond à un ***mode dominant*** *(ou* ***pôle dominant****).*

3.2 Effet des conditions initiales

Supposons que l'entrée est identiquement nulle ($u(t) \equiv 0, \forall t > 0$), on dit que l'équation différentielle est seulement soumise à ses conditions initiales. Cette solution s'appellent en général **solution libre** de l'équation différentielle. Trois cas sont à distinguer suivant la valeur du discriminant.

3.2.1 Effet des C.I. pour un discriminant $\Delta > 0 \Longleftrightarrow |\zeta| > 1$

En supposant que y_0 et $\dot{y}_0$ représentent les conditions initiales de l'équation différentielle, nous devons résoudre les équations suivantes $y(0) = A_1 + A_2 = y_0$ et $\dot{y}(0) = -\frac{1}{\tau_1}A_1 - \frac{1}{\tau_2}A_2 = \dot{y}_0$. Ces deux équations se ramènent à la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

La résolution de l'équation matricielle conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} y_0 - \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \dot{y}_0, \\ A_2 = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} y_0 + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \dot{y}_0. \end{array} \right.$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre soumis uniquement aux conditions initiales $y_0, \dot{y}_0$ s'écrit alors :

$$y_l(t) = \frac{y_0}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \dot{y}_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

Le tracé de la réponse pour différentes valeurs des pôles est donné par les courbes de la figure 4.

Remarque 8 (Vitesse de convergence des courbes de la Figure 4) *La vitesse de convergence est donnée par les constantes de temps des différentes équations différentielles. Nous pouvons ainsi dresser le tableau 1 qui énumère les pôles et les constantes de temps des trois équations différentielles.*

On peut ainsi en déduire que la courbe bleue converge le plus rapidement et correspond effectivement aux pôles $\{-5; -2\}$, tandis que la courbe "la plus lente", la courbe verte correspond aux pôles $\{-10; -1\}$. Effectivement, le pôle en -1 joue le rôle de dynamique dominante pour la réponse aux conditions initiales de $\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 10y(t) = 0$.

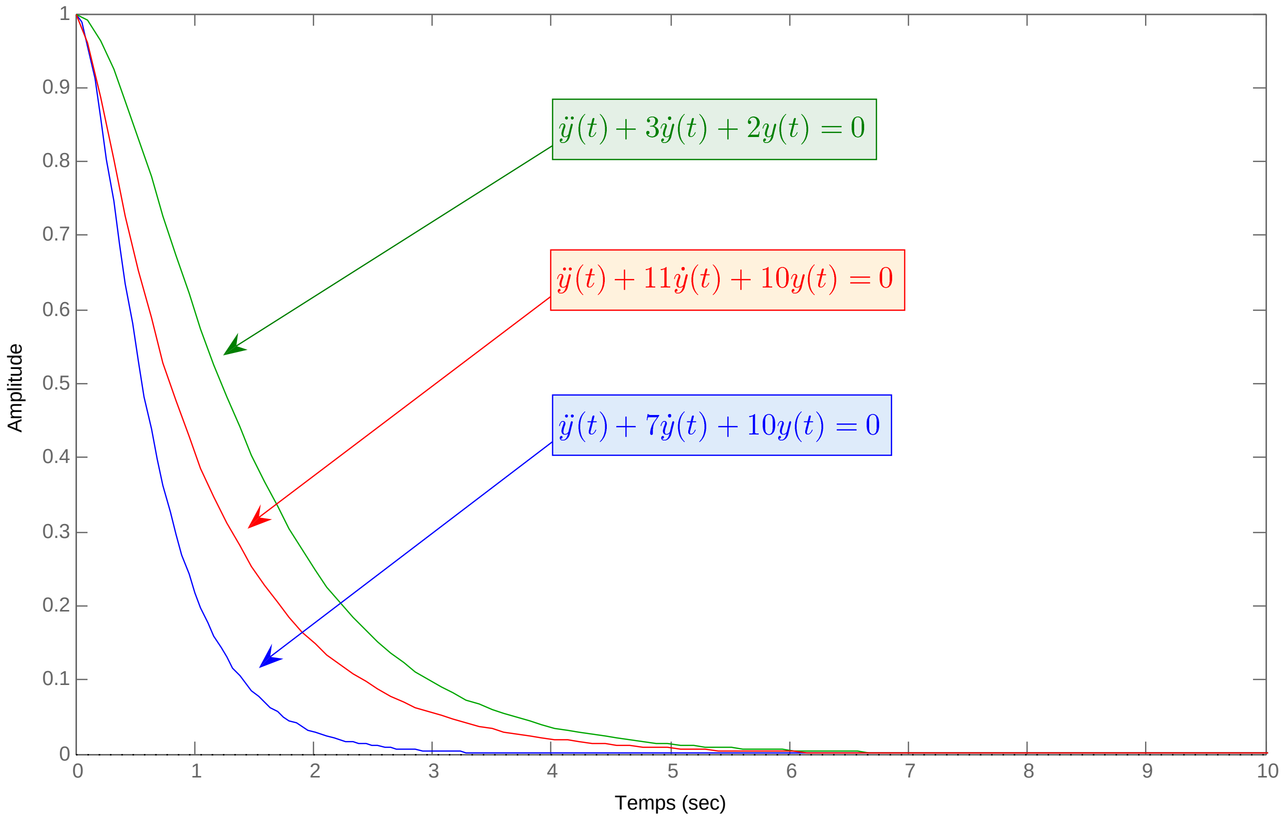

FIG. 4 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes apériodiques pour une condition initiale $y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0$.

3.2.2 Effet des C.I. pour un discriminant $\Delta = 0 \Longleftrightarrow |\zeta| = 1$

En supposant que y_0 et $\dot{y}_0$ représentent les conditions initiales de l'équation différentielle, nous devons résoudre les équations suivantes $y(0) = A_1 = y_0$ et $\dot{y}(0) = -\frac{1}{\tau}A_1 + A_2 = \dot{y}_0$. Ces deux équations se ramènent à la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\tau} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

La résolution de l'équation matricielle conduit à :

$$\begin{cases} A_1 = y_0 \\ A_2 = \frac{1}{\tau}y_0 + \dot{y}_0 \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre soumise uniquement aux conditions initiales $y_0, \dot{y}_0$ s'écrit alors :

$$y_l(t) = \dot{y}_0 t e^{-\frac{t}{\tau}} + y_0 \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le tracé de la réponse pour différentes valeurs des pôles est donné par les courbes de la figure 5.

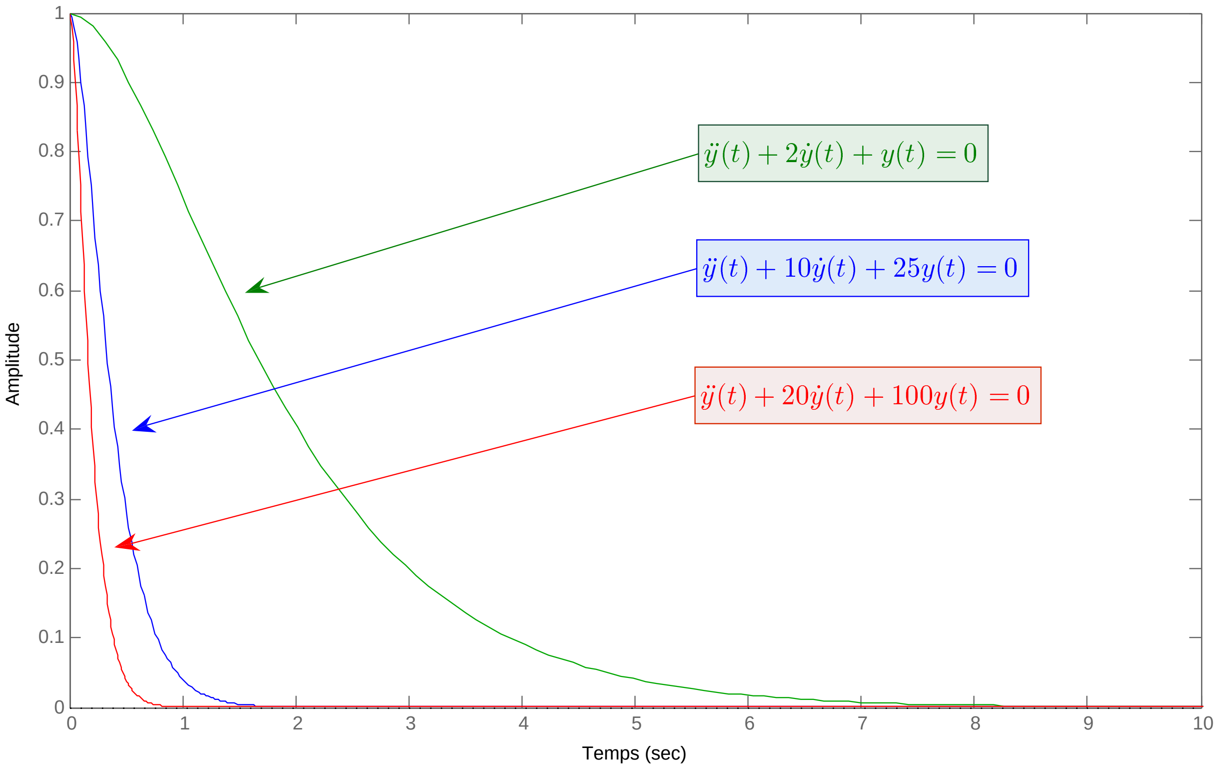

FIG. 5 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes apériodiques doubles pour une condition initiale $y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0$.

Remarque 9 (Vitesse de convergence des courbes de la Figure 5) *La vitesse de convergence est donnée par les constantes de temps des différentes équations différentielles. Comme les pôles sont doubles et valent -5 pour la courbe bleue, -1 pour la courbe verte et -10 pour la courbe rouge, il est clair que la courbe rouge est la plus rapide à converger tandis que la courbe vert est la plus lente.*

3.2.3 Effet des C.I. pour un discriminant $\Delta < 0 \Longleftrightarrow |\zeta| < 1$

En supposant que y_0 et $\dot{y}_0$ représentent les conditions initiales de l'équation différentielle, nous devons résoudre les équations suivantes $y(0) = A_1 = y_0$ et $\dot{y}(0) = -\frac{1}{\tau}A_1 + \omega_p A_2 = \dot{y}_0$. Ces deux équations se ramènent à la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\tau} & \omega_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

La résolution de l'équation matricelle conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = y_0, \\ A_2 = \frac{1}{\tau\omega_p} y_0 + \frac{1}{\omega_p}\dot{y}_0. \end{array} \right.$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre soumis uniquement aux conditions initiales $y_0, \dot{y}_0$ s'écrit alors :

$$y_l(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_p t) + \left(\frac{1}{\tau \omega_p} y_0 + \frac{1}{\omega_p} \dot{y}_0 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_p t),\ \tau = \frac{1}{\zeta \omega_n}.$$

Le tracé de la réponse pour différentes valeurs de ζ est donné par les courbes de la figure 6. La pulsation naturelle ω_n est choisie égale à 1 ainsi que le gain statique K.

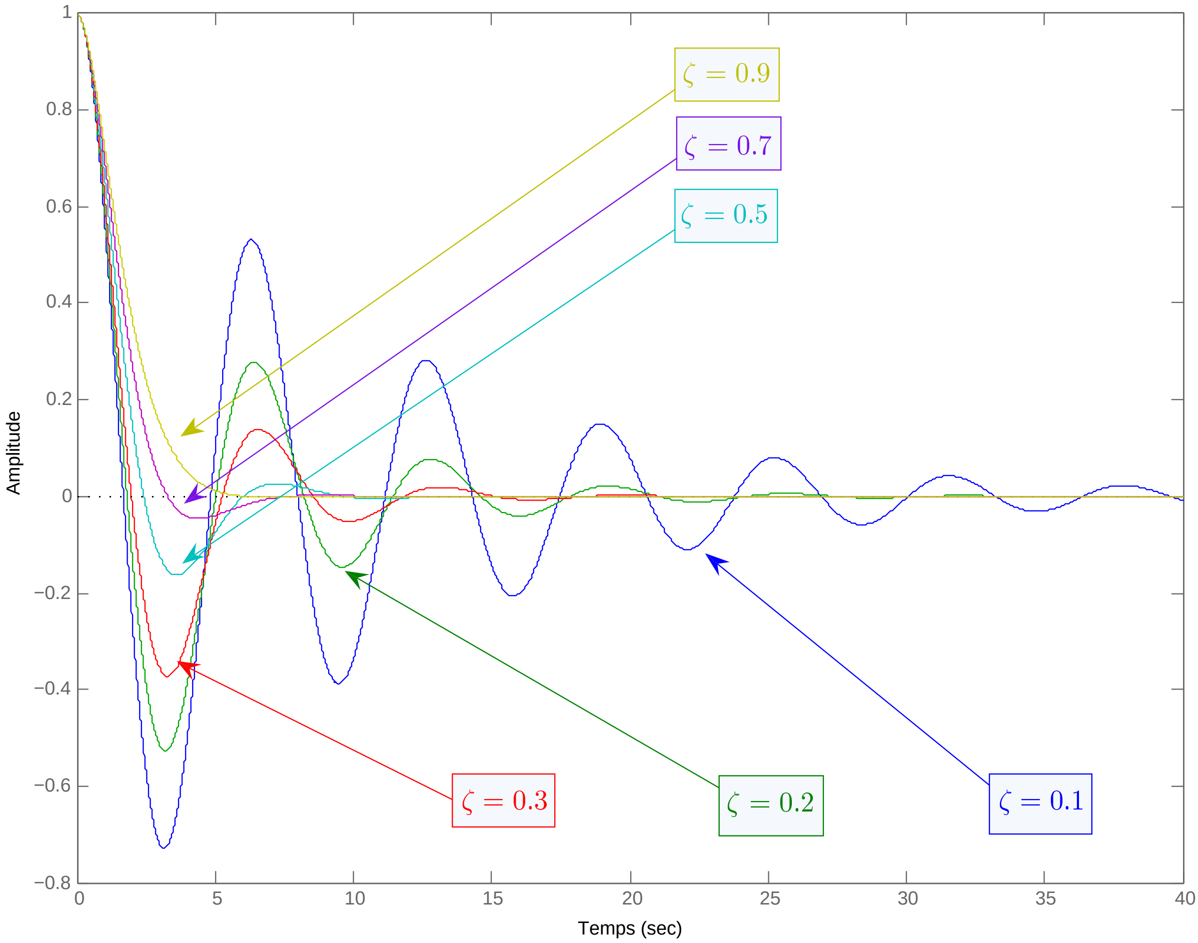

Fig. 6 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes pseudo-périodiques pour une condition initiale $y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0$.

Remarque 10 (Modes et phénomènes oscillants) *Les dernières courbes de la figure 6 montre que plus ζ diminue, plus les oscillations deviennent importantes. On peut ainsi* ***classer*** *les différentes solutions d'équations différentielles suivant ce phénomène d'oscillations et donc suivant l'amortissement ζ. Notons que seul un amortissement inférieur à 1 permet d'obtenir un régime* ***pseudo-oscillant*** *ou* ***pseudo-périodique***[9]*. Effectivement, dans le cas contraire, la solution est la somme d'exponentielles et n'admet*

[9]Cette dénomination est désormais justifée. Effectivement, lorsque $0 < \zeta < 1$, la solution converge vers zéro en oscillant.

pas de phénomènes oscillants. Pour $0.7 < \zeta < 1$, *le tracé de la solution ne montre pas d'oscillations même si la solution admet des cosinus et des sinus.*

3.3 Résolution de l'équation complète

3.3.1 Méthodes de la variation de la constante

La technique de la variation de la constante peut être appliquée au cas des équations différentielles du second ordre mais en apportant une petite modification. Nous avons vu que la résolution de l'équation différentielle sans second membre mène finalement à l'expression de la solution décrite ainsi :

$$y_l(t) = A_1\phi_1(t) + A_2\phi_2(t)$$

où $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$ sont deux fonctions dépendantes de l'amortissement ζ :

Amortissement ζ	**Type**	**Fonction** $\phi_1(t)$	**Fonction** $\phi_2(t)$
$\lvert\zeta\rvert > 1$	Apériodique	$e^{p_1 t}$	$e^{p_2 t}$
$\lvert\zeta\rvert < 1$	Pseudo-périodique	$e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_p t)$	$e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_p t)$
$\zeta = 1$	Critique	$e^{-\omega_n t}$	$te^{-\omega_n t}$

(10)

Dans ce cas, nous allons chercher une solution particulière qui vérifie les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} y_p(t) = A_1(t)\phi(t) + A_2(t)\phi(t), \\ \dot{y}_p(t) = A_1(t)\dot{\phi}_1(t) + A_2(t)\dot{\phi}_2(t). \end{cases} \tag{11}$$

Or la dérivée de $y_p(t)$ s'écrit :

$$\dot{y}_p(t) = A_1(t)\dot{\phi}_1(t) + A_2(t)\dot{\phi}_2(t) + \dot{A}_1(t)\phi(t) + \dot{A}_2(t)\phi(t).$$

La dernière équation impose alors la relation suivante :

$$\dot{A}_1(t)\phi(t) + \dot{A}_2(t)\phi(t) = 0.$$

A l'aide de cette equation, il est aisé d'obtenir un système de deux équations à deux inconnus $\dot{A}_1(t)$ et $\dot{A}_2(t)$. La résolution de l'équation et l'intégration des solutions donnent alors $A_1(t)$ et $A_2(t)$ et donc une solution particulière.

Exemple 7 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = t. \tag{12}$$

Le polynôme caractéristique associé est $\mathbf{P} = p^2 + 3p + 2$, *dont les racines sont* $p = -1, p = -2$. *La solution de l'équation sans second membre est donc :*

$$y_l(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}.$$

Nous recherchons une solution particulière de la forme :

$$\begin{cases} y_p(t) = A_1(t)e^{-t} + A_2(t)e^{-2t}, \\ \dot{y}_p(t) = -A_1(t)e^{-t} - 2A_2(t)e^{-2t}. \end{cases} \tag{13}$$

La dérivée seconde de $y_p(t)$ *s'écrit alors :*

$$\ddot{y}_p(t) = -\dot{A}_1(t)e^{-t} - 2\dot{A}_2(t)e^{-2t} + A_1(t)e^{-t} + 4A_2(t)e^{-2t}.$$

En replaçant l'expression de $y_p(t)$, $\dot{y}_p(t)$ *et* $\ddot{y}_p(t)$ *dans l'équation (12), on obtient :*

$$-\dot{A}_1(t)e^{-t} - 2\dot{A}_2(t)e^{-2t} = t.$$

On ajoute à cette équation, la seconde équation $\dot{A}_1(t)e^{-t} + \dot{A}_2(t)e^{-2t} = 0$*, pour obtenir le système :*

$$\begin{cases} -\dot{A}_1(t)e^{-t} - 2\dot{A}_2(t)e^{-2t} = t, \\ \dot{A}_1(t)e^{-t} + \dot{A}_2(t)e^{-2t} = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues nous donne :

$$\begin{cases} \dot{A}_2(t) = -e^{2t}t & \Rightarrow \quad A_2(t) = -\frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}\left(e^{2t} - 1\right) + C_2, \\ \dot{A}_1(t) = te^{t} & \Rightarrow \quad A_1(t) = te^{t} - e^{t} + 1 + C_1, \end{cases}$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes, respectivement les valeurs des fonctions* $t \mapsto A_1(t)$ *et* $t \mapsto A_2(t)$ *en zéro. En choisissant finalement* $C_1 = -1$ *et* $C_2 = \frac{1}{4}$*, on obtient alors* $y_p(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$*.*

Remarque 11 (Une démarche plus intuitive ...) *On peut déterminer une solution particulière d'une manière un peu différente en remarquant que le second membre de l'équation différentielle est un polynôme de degré 1. On recherche alors comme solution un polynôme d'ordre 1,* $y_p(t) = at + b$*. En replaçant l'expression de* $y_p(t)$ *et ses dérivées successives dans l'équation (12), on obtient aisément* $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = -\frac{3}{4}$*.*

Exemple 8 *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 1y(t) = \sin(t). \tag{14}$$

La solution libre s'écrit $y_l(t) = A_1(t)e^{-t} + A_2(t)te^{-t}$*. Nous recherchons donc une solution de la forme :*

$$\begin{cases} y_p(t) = A_1(t)e^{-t} + A_2(t)e^{-2t}, \\ \dot{y}_p(t) = -A_1(t)e^{-t} + A_2(t)e^{-t}(1-t). \end{cases} \tag{15}$$

En calculant la quantité $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+1y(t) = \sin(t)$*, les termes en* $A_1(t)$ *et* $A_2(t)$ *s'éliminent pour obtenir :*

$$-\dot{A}_1(t)e^{-t} + \dot{A}_2(t)e^{-t}(1-t) = \sin(t),$$

En ajoutant la seconde contrainte du système d'équations (11), on obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} -\dot{A}_1(t)e^{-t} + \dot{A}_2(t)e^{-t}(1-t) = \sin(t), \\ \dot{A}_1(t)e^{-t} + \dot{A}_2(t)te^{-t} = 0. \end{cases}$$

On en conclut aisement que :

$$\begin{cases} \dot{A}_2(t) = e^{t}\sin(t) & \Rightarrow \quad A_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}(\sin(t) - \cos(t)) + C_2 \\ \dot{A}_1(t) = -t\dot{A}_2(t) = -te^{t}\sin(t) & \Rightarrow \quad A_1(t) = -\frac{1}{2}e^{t}(-t\cos(t) + \cos(t) + t\sin(t)) + C_1 \end{cases}$$

Une solution particulière s'écrit donc :

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$$

Remarquons que le terme $C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$ *est en fait un terme solution de l'équation différentielle sans second membre... Une solution particulière est donc*

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}\cos(t)$$

Dans les sections qui suivent, nous nous intéresserons seulement au cas d'une entrée constante $u(t) = e_0$. Une solution particulière est alors aisément calculable $y_p(t) = Ke_0$. Pour simplifier les calculs, nous supposerons aussi que les **conditions initiales sont nulles**.

3.3.2 Résolution pour un discriminant $\Delta > 0$ et une entrée constante

La solution générale s'écrit : $y(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + K e_0$, avec $y(0) = y_0 = \mathbf{0}$ et $\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = \mathbf{0}$. De petits calculs nous mènent à l'expression suivante :

$$\mathbf{y(t) = Ke_0} \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\tau_1}}{\boldsymbol{\tau_2 - \tau_1}} \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{t}}{\boldsymbol{\tau_1}}} + \frac{\boldsymbol{\tau_2}}{\boldsymbol{\tau_2 - \tau_1}} \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{t}}{\boldsymbol{\tau_2}}} \right)$$

Suivant la valeur des pôles, nous obtenons ainsi deux types de courbes assez différentes : Lorsque $\zeta > 1$, c'est-à-dire lorsque la partie réelle des pôles est négative, nous obtenons les courbes de la figure 7 qui reportent le tracé de la réponse pour différentes valeurs des pôles.

Lorsque $\zeta < -1$, un pôle au moins est à partie réelle positive, nous obtenons la courbe de la figure 8. Remarquons que puisque $\zeta < -1$, $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \pm\infty$.

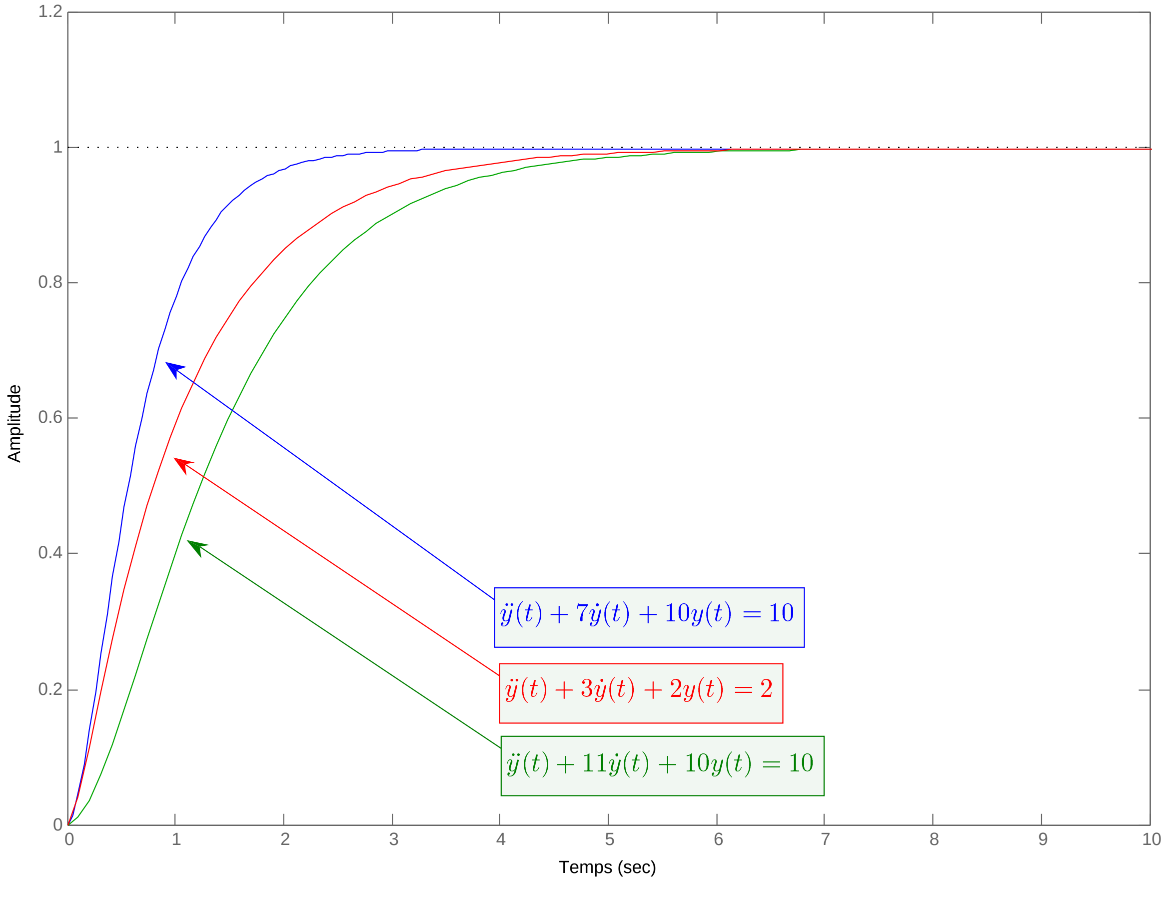

FIG. 7 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes apériodiques pour une condition initiale $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$.

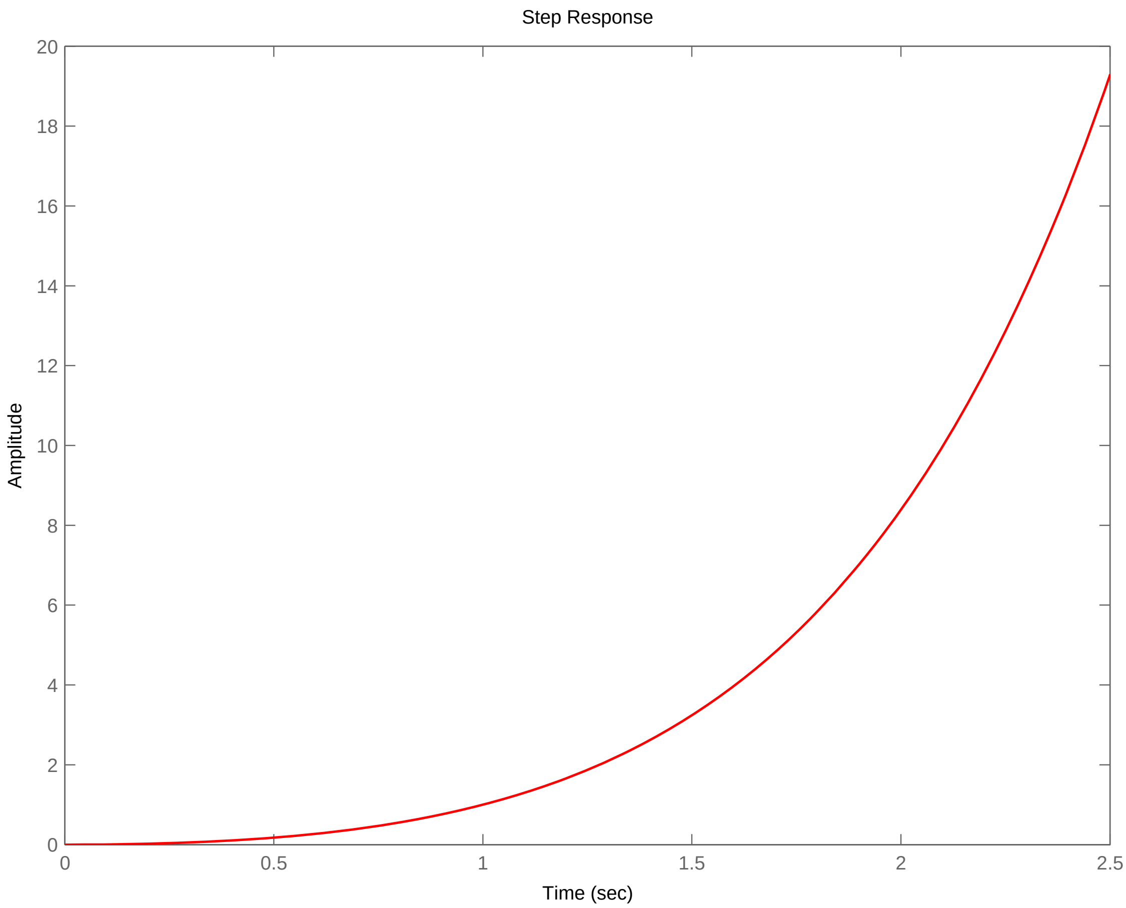

FIG. 8 – Tracé de la solution d'une équation différentielle admettant un pôle positif $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$.

3.3.3 Résolution pour un discriminant $\Delta = 0$ et une entrée constante

De petits calculs nous mènent à l'expression suivante :

$$\mathbf{y(t) = Ke_0 \left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right)}$$

Le tracé de la réponse pour différentes valeurs du pôle double est donné par les courbes de la figure 9.

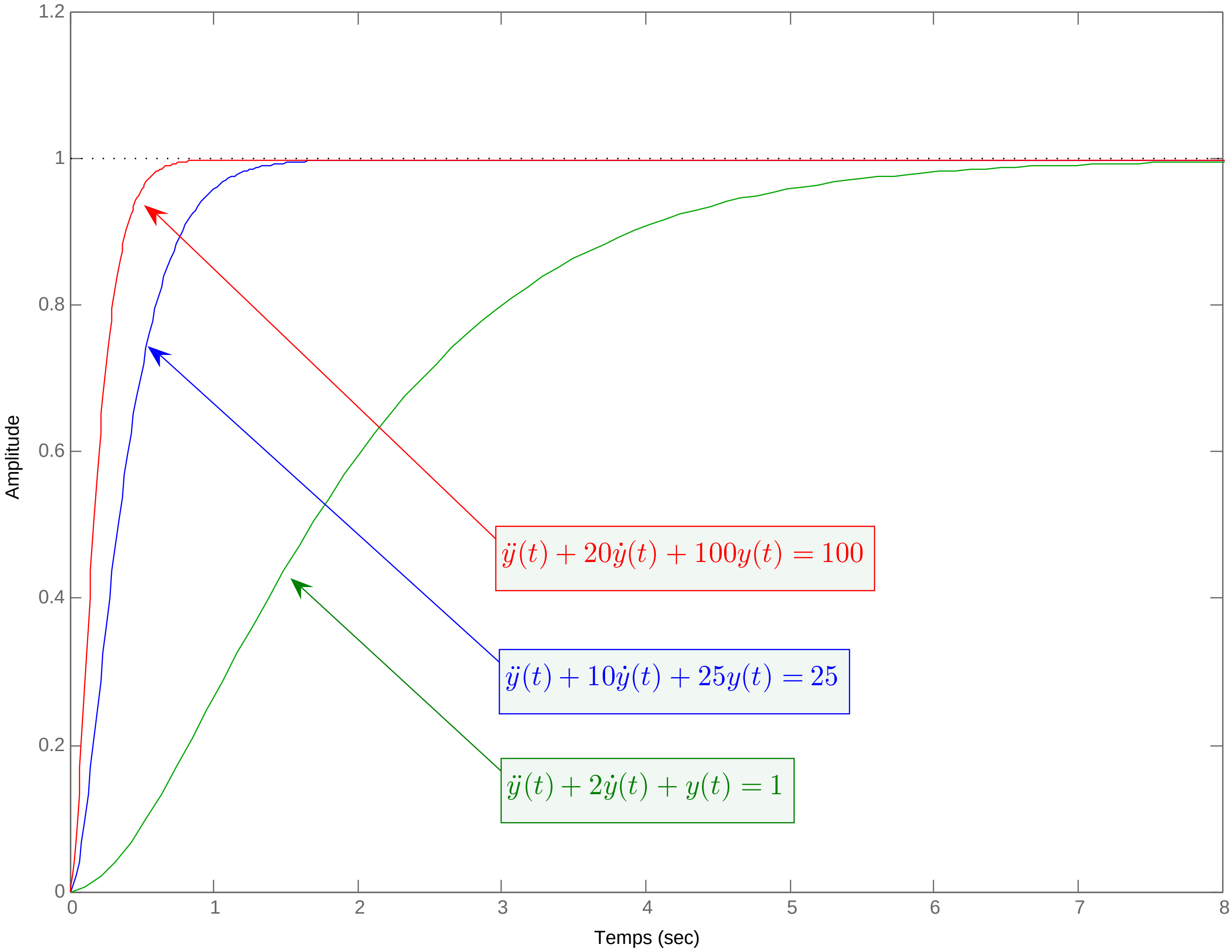

FIG. 9 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes apériodiques critiques pour une condition initiale $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$.

3.3.4 Résolution pour un discriminant $\Delta < 0$ et une entrée constante

De petits calculs nous mènent à l'expression suivante :

$$\mathbf{y(t) = Ke_0}\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{e^{-\omega_n \zeta t}}}{\sqrt{\mathbf{1-\zeta^2}}}\sin(\omega_{\mathbf{n}}\sqrt{\mathbf{1-\zeta^2}}\mathbf{t}+\varphi)\right]$$

avec $\varphi = \text{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$.Le tracé de la réponse pour différentes valeurs de ζ est donné par les courbes de la figure 10. La pulsation naturelle ω_n est égale à 1 ainsi que le gain statique. Nous pouvons également tracer les réponses pour différentes valeurs de la pulsation naturelle ω_n, voir la figure 11.

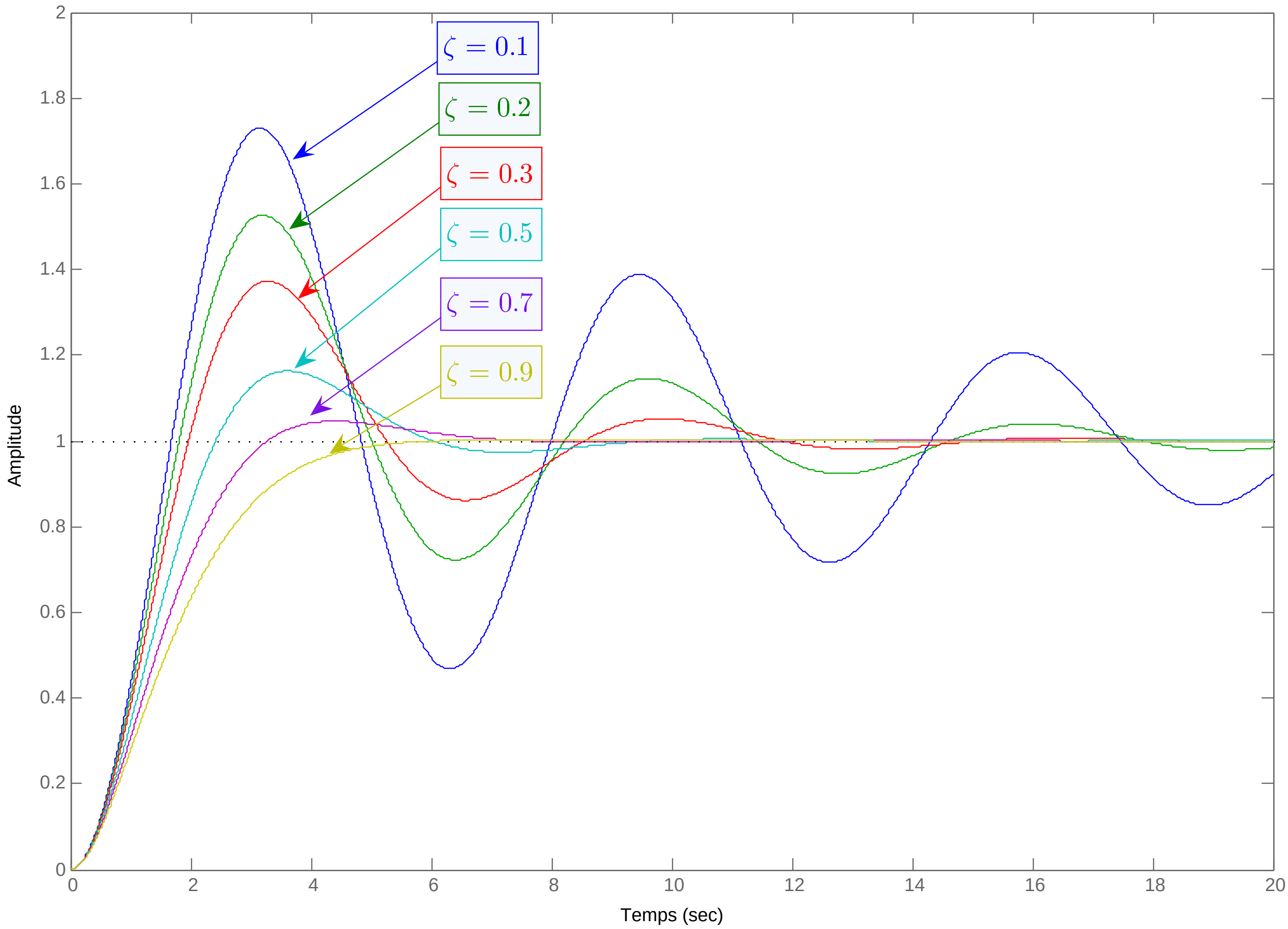

FIG. 10 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes pseudo-périodiques pour une condition initiale $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$.

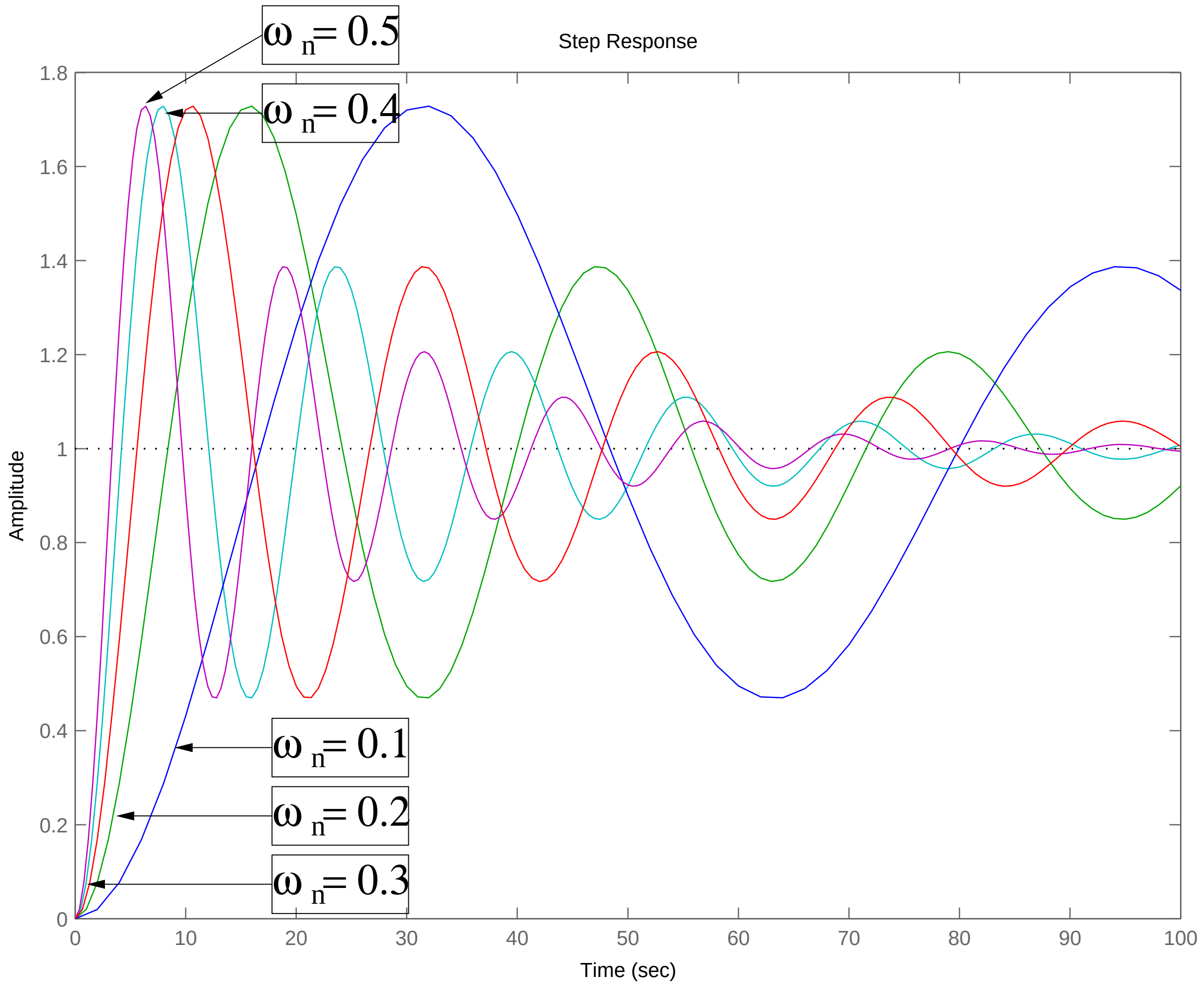

FIG. 11 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes pseudo-périodiques pour une condition initiale $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$.

Remarque 12 *Lorsque $-1 < \zeta < 0$ alors la partie rélle des pôles est positive, $Re(p_i) > 0$ et nous avons donc $\lim_{t \longrightarrow +\infty} = \infty(-\infty)$ comme le montre la figure 12.*

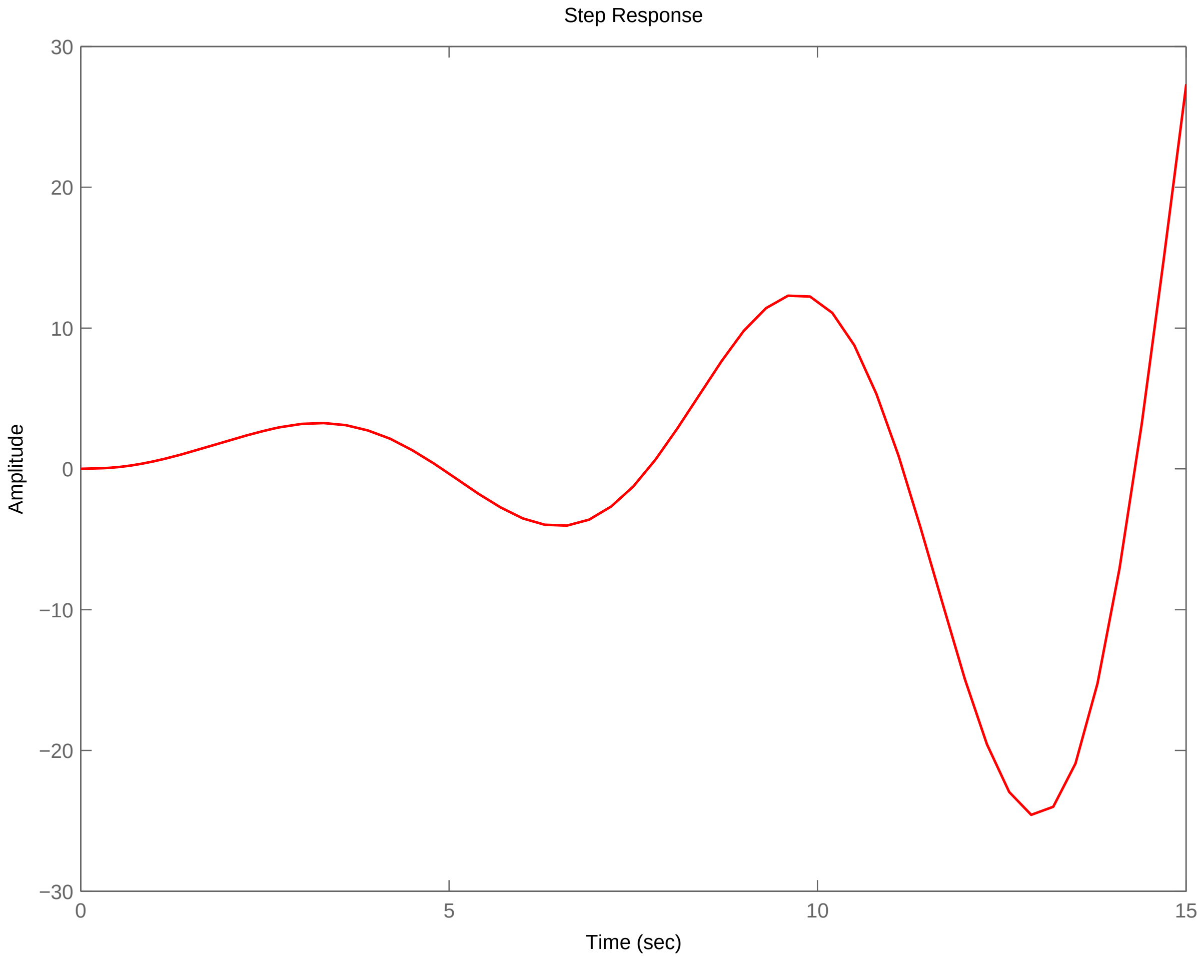

FIG. 12 – Tracé de la solution d'équations différentielles admettant deux modes pseudo-périodiques pour une condition initiale $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$.

4 La transformée de Laplace pour la résolution des équation différentielles

4.1 Rappel sur la transformée de Laplace

Cette sous-section est une petite piqûre de rappel sur la transformée de Laplace mais en aucun cas un cours ni même un résumé sur le calcul opérationnel de Laplace. Nous rappelerons dans le cadre de ce cours uniquement la définition de la transformée de Laplace unilatére et des diverses propriétés utiles pour la résolution des équations différentielles ordinaires.

Définition 3 (Opérateur de Laplace) *La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe p (appelée variable de Laplace)*

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{e}^{-\mathbf{p}\mathbf{t}}\mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{d}\mathbf{t}..$$

On note la transformée de Laplace par $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ et la transformée de Laplace inverse par $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$

Ainsi, à chaque fonction temporelle $t \mapsto f(t)$ est associée une fonction dans le domaine opérationnel de Laplace $p \mapsto F(p)$.

Remarque 13 *Cette transformée de Laplace est appelée transformée de Laplace unilatère car elle est uniquement définie pour les temps positifs. Dans la suite, on supposera que toutes les fonctions que nous manipulerons seront nulles pour des temps négatifs c'est-à-dire $f(t) = 0$ pour $t < 0$*

Remarque 14 *Notons que la transformée de Laplace existe ssi l'intégrale est bien définie c'est-à-dire que $\lim\limits_{\nu \to \infty} \int_0^\nu e^{-pt} f(t)dt$ existe et vaut $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$.*

La transformée de Laplace est une transformation bijective et son inverse est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2 *Soit $F(p)$ une fonction de la variable complexe p. Soit c une constante réel supérieure à la plus grande des parties réelles des singularités* [10] *de $F(p)$. La transformée de Laplace inverse est :*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}dt$$

Les propriétés associés à la transformée de Laplace sont multiples et permettent de manipuler facilement des fonctions :

- **<u>Linéarité :</u>** $(Kf(t)) = K\mathcal{L}(f(t))$.

$$\int_0^\infty e^{-pt}(Kf(t))dt = K \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = KF(p)$$

- **<u>Additivité :</u>** $(f(t) + g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t))$.

$$\int_0^\infty e^{-pt}(f(t) + g(t))dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-pt} g(t)dt = F(p) + G(p)$$

- **<u>Retard :</u>** $\mathcal{L}(f(t-T)) = e^{-Tp}F(p)$ **pour** $T > 0$ **et** $f(t = 0), \forall t < 0$.

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t-T)dt = e^{-pT} \int_{-T}^\infty e^{-pu} f(u)du = \underbrace{e^{-pT} \int_{-T}^0 e^{-pu} f(u)du}_{=0 \text{ car } f(t)=0, \forall t<0} + e^{-pT} \int_0^\infty e^{-pu} f(u)du$$

- **<u>Dérivation :</u>** $\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = pF(p) - f(0^+)$.

$$\int_0^\infty e^{-pt} \dot{f}(t)dt = \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = pF(p) - f(0^+)$$

  Cette propriéte se généralise aisemment :

$$\frac{d^{(n)} f(t)}{dt^n} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

- **<u>Intégration :</u>** $\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{p}F(p)$.

$$\int_0^\infty e^{-pt} \int\limits_0^t f(\tau)d\tau dt = \underbrace{-\left[\frac{e^{-pt}}{p} \int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

[10] Ce sont les racines du dénominateur de la fonction $F(p)$.

– **Convolution :** $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) = \left(\int_0^\infty e^{-pt}g(t)dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-pt}g(t)dt\right) = F(p)G(p)$.
Remarquons tout d'abord que $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) &= \int\limits_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt = \int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau \\
&= \int\limits_0^\infty f(\tau)\left(\int\limits_0^\infty e^{-pt}g(t-\tau)dt\right)d\tau = \int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\left(\int\limits_0^\infty e^{-pu}g(u)du\right)d\tau \\
&= \left(\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right)\left(\int\limits_0^\infty e^{-pu}g(u)du\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

– **Valeur finale :** $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty)$.
Cette égalité provient de

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-pt}\dot{f}(t)dt = \int_0^\infty \dot{f}(t)dt = f(+\infty) - f(0^+)$$

Or cette dernière quantité est également égale à $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) - f(0^+)$, ce qui conclut la preuve.

– **Valeur initiale :** $\lim\limits_{p\to +\infty} pF(p) = f(0^+)$.
Cette égalité provient de

$$\lim_{p\to +\infty}\int_0^\infty e^{-pt}\dot{f}(t)dt = 0$$

Or cette dernière quantité est également égale à $\lim\limits_{p\to +\infty} pF(p) - f(0^+)$, ce qui conclut la preuve.

Linéarité	$\mathcal{L}(Kf(t)) = K\mathcal{L}(f(t)) = K$
Additivité	$\mathcal{L}(f(t)+g(t)) = F(p)+G(p)$
Retard	$\mathcal{L}(f(t-T)) = e^{-Tp}F(p),\quad T>0, f(t)=0\ \ \forall t<0$
Dérivation	$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^-)$
Généralisation	$£\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n} = p^nF(p) - p^{n-1}F(0) - p^{n-2}F^{(1)}(0) - \quad ... - F^{(n-1)}(0)$
Intégration	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{p}F(p)$
Convolution	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) = F(p)G(p)$
Valeur initiale	$f(0) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$
Valeur finale	$f(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$

TAB. 2 – Propriétés de la transformée de Laplace

Toutes ces propriétés sont résumées dans le tableau 2. Ainsi, à l'aide de la définition de la transformée et de ces propriétés élementaires, il est relativement facile de calculer la transformée de Laplace de fonctions usuelles comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 9 *Soit la fonction $f_0(t) = \boldsymbol{1}$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :*

$$F_0(p) = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{1} e^{-pt}dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Exemple 10 (On itère ...) *Soit la fonction $f_1(t) = t$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :*

$$F_1(p) = \mathcal{L}(\int_0^t f_0(\tau)d\tau) = \frac{1}{p}F_0(p) = \frac{1}{p^2}$$

Une simple récurrence sur le degré du polynôme montre que la transformée de Laplace de la fonction $f_n(t) = \frac{1}{n!}t^n$ est égale à $F_n(p) = \frac{1}{p^n}$

Exemple 11 *Soit la fonction $f(t) = e^{-at}$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt = -\left.\frac{e^{-(p+a)t}}{p+a}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Ainsi il existe dans la littérature de nombreuses tables récapitulant la transformée de Laplace de fonctions plus ou moins classiques (voir la section 5 pour un extrait suffisant ... *en général*). Un autre problème consiste à calculer la fonction temporelle étant donnée la fonction dans le domaine de Laplace. Ce calcul fait appel au théorème 2 qui est relativement compliqué à utiliser. C'est pourquoi, en général, nous utiliserons les tables suffisamment complètes pour permettre de déterminer la fonction temporelle. Lorsque la fonction ne sera pas présente dans la table, il faudra alors essayer de décomposer la fonction en une somme de fonctions élémentaires dont la fonction temporelle est connue. En Automatique, dans le domaine de Laplace, les fonctions que nous allons manipuler seront presque toujours des fonctions rationnelles en p. Dans ce cadre, il existe un théorème très pratique permettant de décomposer une fraction rationnelle en une somme de fractions élementaires.

4.2 Un théorème important

Nous rappelons ici un théorème très utile pour le calcul de fonctions temporelles connaissant son expression dans le domaine de Laplace.

Soit la fraction rationnelle $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes en la variable p (la variable de Laplace par exemple). On suppose que $R(p)$ s'écrit de la manière suivante :

$$R(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0.$$

Nous désirons écrire la fraction rationnelle comme une somme de fractions rationnelles élementaires, c'est à dire en somme d'éléments simples. On rappelle qu'un élément simple d'une fraction rationnelle est une fraction rationnelle de la forme suivante :

Élément de première espèce : C'est un élément réel qui s'écrit $\frac{A}{(p-p_i)^k}$ avec A et p_i des nombres réels et k un entier. Le numérateur est une constante et le dénominateur est une puissance d'un polynôme $p - p_i$.

Élément de seconde espèce : C'est un élément complexe conjugué qui s'écrit $\frac{Ap+B}{(p^2+cp+d)^k}$ où A, B, c, d sont des réels, où k est un entier (avec $c^2 - 4d < 0$[11]).

On rappelle alors le théorème suivant :

Théorème 3 *Il existe* ***une et une seule*** *décomposition en éléments simples de* $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ *de la forme*

$$\frac{N(p)}{D(p)} \quad = \quad E(p) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_i} \frac{K_{i,l}}{(p-p_i)^l} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}+B_{j,k}p}{(p^2+c_jp+d_j)^k},$$

où E un polynôme nul ou de degré égal à deg(N) − deg(D) et $K_{i,l}, A_{j,k}$ et les $B_{j,k}$ sont des constantes réelles, appelés résidus.

Les sections suivantes précisent le calcul des résidus pour des cas simples. On suppose dans ce cas que $\deg(N) < \deg(D)$ et donc que $E(p) = 0$.

4.2.1 $G(p)$ admet des pôles simples

Si tous les pôles de $G(p)$ sont simples et réels alors celui-ci s'écrit :

$$G(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}.$$

On recherche une décomposition de la forme :

$$G(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{p-p_i}.$$

Les constantes K_i sont déterminés par les formules suivantes :

$$K_i = \left[(p-p_i)\frac{N(p)}{D(p)}\right]\Bigg|_{p=p_i}, \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

On calcule le coefficient K_i en multipliant par $(p - p_i)$ l'équation $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ et en choisissant $p = p_i$.

Exemple 12 *Soit* $G(p) = \frac{p+1}{p(p+2)}$*, celle ci peut être écrite de la manière suivante :*

$$G(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p+2},$$

avec

$$K_1 = \left[p\frac{p+1}{p(p+2)}\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{1}{2},$$

[11]On suppose que $c^2 - 4d < 0$. Effectivement, dans le cas contraire, cette fraction rationnelle peut se décomposer en la somme de deux fractions rationnelles de première espèce.

$$K_2 = \left[(p+2)\frac{p+1}{p(p+2)}\right]\Big|_{p=-2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$G(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right).$$

4.2.2 $G(p)$ admet des pôles d'ordres multiples

Supposons que $G(p)$ s'écrive :

$$G(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_{n-r})(p-p_l)^r},$$

alors $G(p)$ s'écrit de la manière suivante :

$$G(p) = \sum_{i=1}^{n-r}\frac{K_i}{p-p_i} + \sum_{j=1}^{r}\frac{A_j}{(p-p_l)^j}.$$

Les différents coefficients peuvent être calculés par les formules suivantes :

$$K_i = \left[(p-p_i)\frac{N(p)}{D(p)}\right]\Big|_{p=p_i}, \ \forall i \in \{1,\dots,n-r\},$$

$$\begin{array}{rcl}
A_r & = & \left[(p-p_l)^r\frac{N(p)}{D(p)}\right]\Big|_{p=p_l}, \\
A_{r-1} & = & \frac{d}{dp}\left[(p-p_l)^r\frac{N(p)}{D(p)}\right]\Big|_{p=p_l}, \\
A_{r-2} & = & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-p_l)^r\frac{N(p)}{D(p)}\right]\Big|_{p=p_l}, \\
 & \vdots & \\
A_1 & = & \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[(p-p_l)^r\frac{N(p)}{D(p)}\right]\Big|_{p=p_l}.
\end{array}$$

Exemple 13 *Soit $G(p) = \frac{p+1}{p(p+2)^2}$, la décomposition s'écrit :*

$$G(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{(p+2)^2},$$

avec

$$\begin{array}{rcl}
K_1 & = & \left[p\frac{p+1}{p(p+2)^2}\right]\Big|_{p=0} = \frac{1}{4}, \\
A_2 & = & \left[(p+2)^2\frac{p+1}{p(p+2)^2}\right]\Big|_{p=-2} = \frac{1}{2}, \\
A_1 & = & \frac{d}{dp}\left[(p+2)^2\frac{p+1}{p(p+2)^2}\right]\Big|_{p=-2} \\
 & = & \frac{d}{dp}\left[\frac{p+1}{p}\right]\Big|_{p=-2} \\
 & = & -\frac{1}{p^2}\Big|_{p=-2} = -\frac{1}{4}.
\end{array}$$

La décomposition s'écrit donc $G(p) = \frac{1}{4}\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2}$.

4.2.3 $G(p)$ admet des pôles complexes conjugués

Pour le calcul des résidus des éléments simples de seconde espèce ($\frac{Ap+B}{(p^2+cp+d)^k}$), on utilise essentiellement trois techniques :

– On écrit la forme à priori et on détermine les coefficients par un choix de valeurs pour p.
– On recherche la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(p)$ et on regroupe les éléments simples relatifs aux pôles simples comjuguées. En effet, tout élément de $\mathbb{C}(p)$ est scindé. Les éléments simples sont de la forme $(p+p_i)^k$.
– On procède par abaissement du degré de l'élement simple.

Exemple 14 *Soit $G(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}$, la décomposition en éléments simples est de la forme :*

$$G(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Nous avons les relations suivantes :

$$K_1 = \left[p\frac{1}{p(p^2+1)}\right]\Bigg|_{p=0} = 1,$$

$$\left[(p^2+1)\frac{1}{p(p^2+1)}\right]\Bigg|_{p=j} = -j = Cj + D,$$

On en déduit $C = -1, D = 0$ et

$$G(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Exemple 15 *Reprenons l'exemple précédent et cherchons une décomposition sur $\mathbb{C}(p)$. Celle-ci s'écrit*

$$G(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p+j} + \frac{K_3}{p-j}.$$

Le calcul des résidus s'effectue de la manière suivante

$$\begin{aligned} K_1 &= pG(p)|_{p=0} = 1, \\ K_2 &= (p+j)G(p)|_{p=-j} = -\tfrac{1}{2}, \\ K_3 &= (p-j)G(p)|_{p=j} = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

$G(p)$ s'écrit donc $G(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}(\frac{1}{p+j} + \frac{1}{p-j})$. En regroupant les deux derniers termes, on retrouve bien la décomposition sur $\mathbb{R}(p)$.

Exemple 16 *Soit $G(p) = \frac{1}{(p^2+p+1)(p^2-p+1)}$, les racines du dénominateur sont $\{p_1, \overline{p_1}, -p_1, -\overline{p_1}\}$ avec $p_1 = e^{j\frac{2\pi}{3}}$.La décomposition en éléments simples s'écrit dans $\mathbb{C}(p)$:*

$$G(p) = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-\overline{p_1}} + \frac{K_3}{p+p_1} + \frac{K_4}{p+\overline{p_1}}$$

En utilisant les règles précédentes, on obtient :

$$G(p) = \frac{1-p_1}{p-p_1} + \frac{1-\overline{p_1}}{p-\overline{p_1}} - \frac{1-p_1}{p+p_1} + \frac{1-\overline{p_1}}{p+\overline{p_1}}$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$G(p) = \frac{p+1}{2(p^2+p+1)} - \frac{p-1}{2(p^2-p+1)},$$

qui est la décomposition de $G(p)$ dans $\mathbb{R}(p)$

4.3 Utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre une EDO

Afin d'utiliser la transformée de Laplace pour résoudre une équation différentielle, nous allons procéder de la manière suivante :

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle en utilisant les propriétes de la transformée de Laplace et la table des transformées (voir la table 3).(attention aux conditions initiales).
2. Manipuler l'expression algébrique et trouver une solution $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ en fonction des entrées et des conditions initiales.
3. Calculer les résidus associés à chaque élements simples.
4. Utiliser de la table des transformées inverses pour obtenir la solution dans le domaine temporelle.

Revenons maintenant à la résolution d'une équation différentielle ordinaire :

4.4 La transformée de Laplace d'une équation différentielle ordinaire

Soit l'équation différentielle suivante à résoudre :

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t), \quad (17)$$

dont les conditions initiales sont par ailleurs fixées et donnés par $y(0), \cdots\ y^{(n-1)}(0)$.
Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, en utilisant les propriétés de linéarité d'additivité et de dérivation, nous obtenons alors la formule suivante :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i p^i\right) Y(p) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_j y^{(i-1)}(0)p^{j-i} \quad = \quad \left(\sum_{i=0}^{m} b_i p^i\right) U(p) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} b_j u^{(i-1)}(0)p^{j-i}.$$

Cette dernière équation peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} U(p) - \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j} b_j u^{(i-1)}(0)p^{j-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}}_{\text{réponse dépendante de u(t) =réponse forcée}} + \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_j y^{(i-1)}(0)p^{j-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}}_{\text{réponse libre soumise aux C.I.}}.$$

Nous avons ainsi calculer la transformée de Laplace de la solution de l'q̇uation différentielle. De l'équation précedente, nous voyons clairement que la réponse est constitué de la somme de deux réponses élémentaires, la réponse dite **forcée** due au second membre de l'équation différentielle ordianire et la réponse **libre** due aux conditions initiales. Connaissant alors $u(t)$, nous pouvons calculer sa transformée de laplace et en supposant, par exemple, que $U(p)$ est un polynôme en la variable p, il est alors clair que la transformée de laplace de la solution de léquation différentielle 1 est une fraction rationnelle en la variable p. L'utilisation du théoreme précédent nous permet alors de déterminer son expression temporelle. Nous allons voir dans la section suivante quelques exemples de résolution.

4.5 Exemples de résolution d'EDO

Exemple 17 *Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :*

$$\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ke(t).$$

Les conditions initiales sont $y(0) = y_0$ *et on suppose que* $e(t) = e_0, \forall t > 0$ *avec* e_0 *une constante. Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle pour obtenir :*

$$\tau pY(p) - \tau y(0) + Y(p) = K\frac{e_0}{p}$$

la solution s'écrit alors $Y(p) = \underbrace{\frac{Ke_0}{(\tau p+1)p} e_0}_{\text{Réponse forcée}} + \underbrace{\frac{\tau y_0}{\tau p+1}}_{\text{Réponse libre}}$ *La décomposition en élement simple de* $\frac{Ke_0}{(\tau p+1)p}$ *est évidente :*

$$\frac{Ke_0}{(\tau p+1)p} = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{\tau p+1},$$

La solution s'écrit donc $Y(p) = \frac{1}{p}e_0 - \frac{\tau}{\tau p+1}e_0 + \frac{\tau}{\tau p+1}y_0$*. En utilisant une table des transformées élementaires, la réponse* $Y(p)$ *s'exprime alors dans le domaine temporelle :*

$$y(t) = e_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Exemple 18 *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 1y(t) = t.$$

Les conditions initiales sont $y(0) = 1$ *et* $\dot{y}(0) = 0$*. Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle pour obtenir :*

$$p^2Y(p) + 2pY(p) + Y(p) - py(0) - 2y(0) = \frac{1}{p^2},$$

et donc $Y(p) = \frac{1}{(p^2+2p+1)p^2} + \frac{p+2}{p^2+2p+1}$*.En utilisant le théorème sur la décomposition en élements simples :*

$$\begin{cases} \frac{1}{p^2+2p+1} & = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} \\ \frac{p+2}{p^2+2p+1} & = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \end{cases}$$

La solution $Y(p)$ *s'écrit donc*

$$Y(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2},$$

et en utilisant la table des transformées de Laplace (voir la table 3), on obtient

$$y(t) = 2e^{-t} + te^{-t} - 2 + t + e^{-t} + te^{-t} = t - 2 + 3e^{-t} + 2te^{-t}$$

Exemple 19 *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 5e(t)$$

Les conditions initiales sont $y(0) = 1$ *et* $\dot{y}(0) = -2$ *et l'entrée vaut* $e(t) = e_0, \forall t > 0$*. On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle précédente :*

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 5pY(p) - 5y(0) + 6Y(p) = 5/p$$

On obtient alors la solution de l'équation différentielle dans le domaine opérationnel :

$$Y(p) = \frac{5}{p(p^2+5p+6)} + \frac{py(0) + \dot{y}(0) + 5y(0)}{p^2+5p+6} = \frac{p^2+3p+5}{p(p^2+5p+6)}$$

La décomposition nous donne :

$$Y(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p+2} + \frac{K_3}{p+3}$$

avec $K_1 = \frac{5}{6}$, $K_2 = -\frac{3}{2}$, $K_3 = \frac{5}{3}$*, c'est à dire :*

$$Y(p) = \frac{5}{6p} - \frac{3}{2(p+2)} + \frac{5}{3(p+3)}$$

En utilisant la table des transformées inverses, nous obtenons :

$$y(t) = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t}$$

Exemple 20 *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = e_0$$

avec $\dot{y}(0) = y(0) = 0$.

Dans le domaine de Laplace, nous avons :

$$Y(p) = \frac{e_0}{p(p^2+p+1)}$$

La decomposition en éléments simples nous donne :

$$Y(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+p+1}$$

Le calcul des résidus s'effectue de la manière suivante :

$$K_1 = \left[p\frac{e_0}{p(p^2+p+1)} \right]\Bigg|_{p=0} = e_0$$

De plus, nous avons $p^2+p+1 = (p+p_1)(p+\overline{p_1})$ *avec* $p_1 = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$.

Afin d'accélerer le calcul, déterminons la quantité

$$\left[(p^2+p+1)\frac{e_0}{p(p^2+p+1)} \right]\Bigg|_{p=p_1} = \frac{e_0}{p_1} = Cp_1 + D$$

Calculons la quantité suivante :

$$\left[p\frac{e_0}{p(p^2+p+1)} \right]\Bigg|_{p=+\infty} = 0$$

Or celle ci est égale aussi à :

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} K_1 + \frac{Cp^2+Dp}{p^2+p+1} = K_1 + C$$

On obtient alors $C = -e_0$ *et on en déduit* $D = -e_0$ *la décomposition en éléments simples s'écrit :*

$$Y(p) = e_0\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{p^2+p+1}\right)$$

En utilisant les tables de transformées de Laplace inverse, nous obtenons :

$$y(t) = e_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}}e^{-0.5t}\sin(\sqrt{1-0.5^2}t - \phi)\right)$$

avec $\phi = \arccos 0.5$.

Fonctions	**Domaine temporelle** $f(t)$	**Transformée de Laplace** $F(p) = \pounds f(t)$
Impulsion	$\delta(t)$	1
Echelon	$\mathcal{U}(t) = 1 \forall t > 0$	$\frac{1}{p}$
Rampe	$t\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
Exponentielle	$e^{-\alpha t}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
Exponentielle et puissance	$\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$
Approche exponentielle	$(1 - e^{-\alpha t})\mathcal{U}(t)$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
Somme d'exponentielles	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
Somme d'exponentielles	$\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t})\mathcal{U}(t)$	$\frac{s}{(p+\alpha)(p+\beta)}$
sinus	$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
sinus décalé	$\sin(\omega t + \phi)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p \sin\phi + \omega cos\phi}{p^2+\omega^2}$
sinus décalé	$\sqrt{\frac{\alpha^2+\omega^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)\mathcal{U}(t),$ $\phi = \arctan(\frac{\omega}{a})$	$\frac{p+\alpha}{p^2+\omega^2}$
sinus et exponentielle	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Cosinus et exponentielle	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
sinus et exponentielle	$\frac{1}{\omega_p}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_p t)\mathcal{U}(t)$ $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ \zeta < 1$	$\frac{1}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$

Tab. 3 – Table des Transformées de Laplace

5 Table des transformées de Laplace