Analyse et Commande des systèmes linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/ ∼ fgouaisb*

October 8, 2009

Sommaire

Sommaire

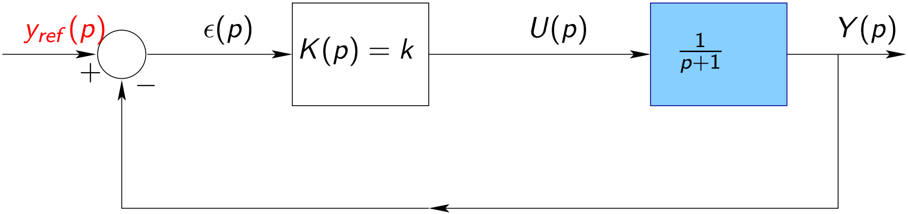
Commandes proportionnelles

La structure de commande est la suivante $u(t) = k\epsilon(t)$ ou $K(p) = k$.

Example

Soit le système suivant $G(p) = \frac{1}{p+1}$.
Le système en boucle fermée s'écrit $G_{bf}(p) = \frac{k}{p+k+1}$.

- Le gain statique en boucle fermée est $K_s = \frac{k}{k+1}$, la constante de temps $\tau_{bf} = \frac{1}{k+1}$.
- l'erreur de position est donc $\epsilon_p = \frac{1}{k+1}$
- Finalement $k \nearrow$, $t_r \searrow$, $\epsilon_p \searrow$.



Fonction de transfert en BF :

$$Y(p) = G(p)U(p) = kG(p)\epsilon(p)$$
$$\epsilon(p) = Y_{ref}(p) - Y(p)$$
$$\frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)} = \underbrace{\frac{kG(p)}{1 + kG(p)}}_{G_{bf}(p)}$$

Erreur en régime permanent:

$$\epsilon(p) = Y_{ref}(p) - Y(p)$$
$$\epsilon(p) = Y_{ref}(p) - kG(p)\epsilon(p)$$
$$\epsilon(p) = \frac{1}{1+kG(p)} Y_{ref}(p)$$
$$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\epsilon(p)$$

Erreur de position $\epsilon_p = \frac{1}{k+1}$

Erreur de vitesse $\epsilon_v = \infty$

Calcul de la réponse indicielle

En temporelle :

$\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

$\dot{y}(t) + y(t) = k(y_{ref}(t) - y(t))$

Résolution :

$\dot{y}(t) + (k+1)y(t) = ky_{ref}(t) = k\mathbf{1}$

- Solution homogène :
  $y_l(t) = Ae^{-(k+1)t}$
- Solution particulière :
  $y_p(t) = \frac{k}{k+1}.\mathbf{1}$
- solution générale:
  $y(t) = Ae^{-(k+1)t} + \frac{k}{k+1}.\mathbf{1}$
- Condition initiale $y(0) = 0$
  $A = -\frac{k}{k+1}$

$y(t) = \frac{k}{1+k}(\mathbf{1} - e^{-(1+k)t})$

En utilisant Laplace :

$Y(p) = G_{bf}(p)Y_{ref}(p)$

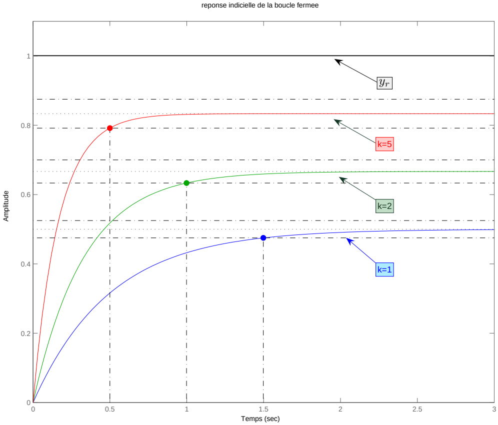
$Y(p) = k\frac{1}{p+1+k}\underbrace{Y_{ref}(p)}_{1/p}$

Décomposition :

$Y(p) = \left(\frac{k}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{p+1+k} + \frac{1}{p}\right)$

Laplace inverse :

$y(t) = \left(\frac{k}{k+1}\right)\left(-e^{-(1+k)t} + 1\right)$


reponse indicielle de la boucle fermee
Amplitude
Temps (sec)
y_r
k=5
k=2
k=1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

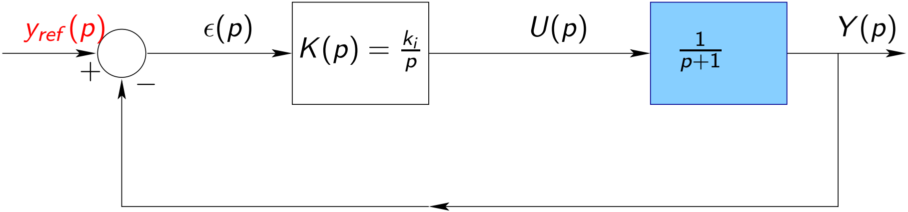
Commandes intégrales

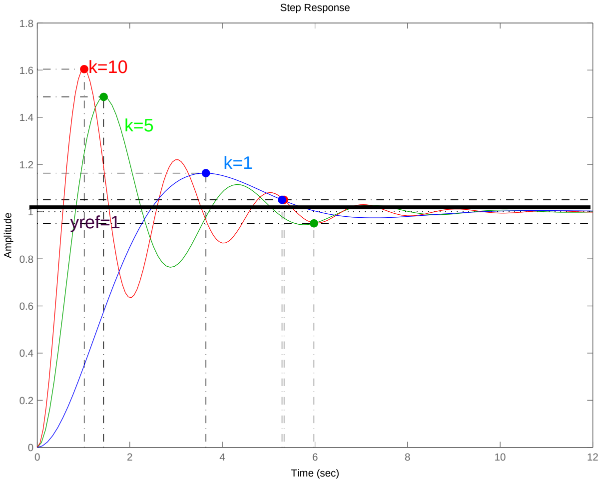
La structure de commande est la suivante $u(t) = k_i \int\limits_0^t \epsilon(t)dt$ ou $K(p) = \frac{k_i}{p}$.

Example

Soit le système suivant $G(p) = \frac{1}{p+1}$.
Le système en boucle fermée s'écrit $G_{bf}(p) = \frac{k_i}{p^2+p+k_i}$.

- Le gain statique est $K_s = 1$, $\omega_n = \sqrt{k_i}, \zeta = \frac{1}{2\sqrt{k_i}}$.
- l'erreur de position est donc nulle $\epsilon_p = 0$, car le gain statique est unitaire.
- Finalement $k_i \nearrow$, $\zeta \searrow$, les oscillations $\nearrow$, le dépassement $\nearrow$. La commande intégrale permet d'améliorer la précision du système, mais elle peut provoquer des oscillations.


$y_{ref}(p)$
$\epsilon(p)$
$K(p) = \frac{k_i}{p}$
$U(p)$
$\frac{1}{p+1}$
$Y(p)$
$+$
$-$


Step Response
k=10
k=5
k=1
yref=1
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
0
2
4
6
8
10
12

Commandes PI

La structure de commande est la suivante $u(t) = k\left(\frac{1}{\tau_i}\int_0^t \epsilon(t)dt + \epsilon(t)\right)$ ou $K(p) = k\left(\frac{1}{\tau_i p} + 1\right)$.
Elle permet de combiner les avantages des deux stratégies de commandes.

Commandes tachimétriques

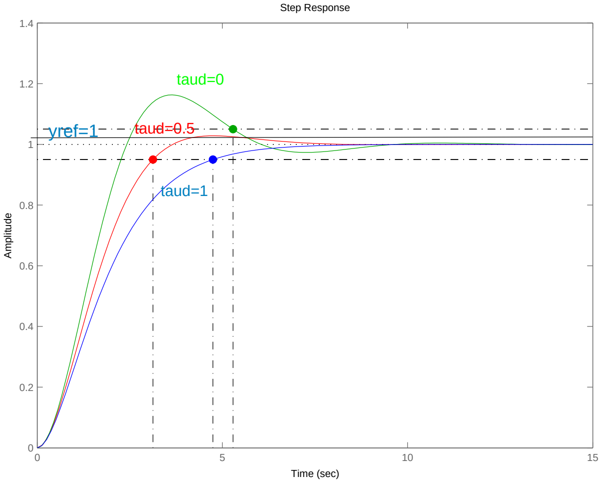
La structure de commande est la suivante $u(t) = k\left(\epsilon(t) - \tau_d \dot{y}(t)\right)$

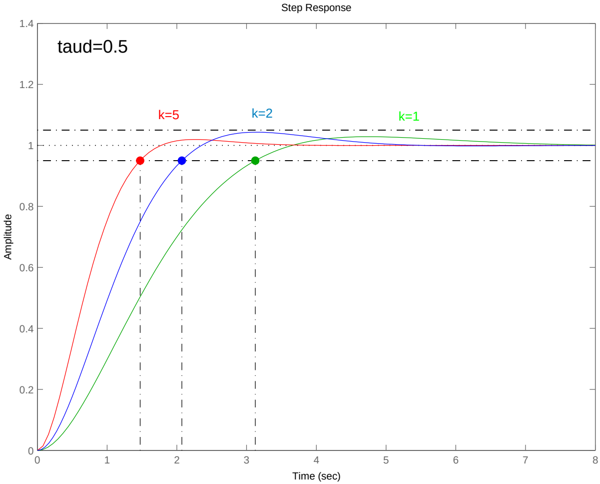
Example

Soit le système suivant $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$.
Le système en boucle fermée s'écrit $G_{bf}(p) = \frac{k}{p^2+p(1+k\tau_d)+k}$.

- Le gain statique est $K_s = 1$, $\omega_n = \sqrt{k}, \zeta = \frac{1+k\tau_d}{2\sqrt{k}}$.
- l'erreur de position est donc nulle $\epsilon_p = 0$, car le gain statique est unitaire. (ceci est du à l'intégrateur du système.)
- Finalement $\tau_d \nearrow$, $\zeta \nearrow$, les oscillations $\searrow$, le dépassement $\searrow$.

Le paramètre τ_d permet donc d'influencer sur les oscillations et le dépassement. Le paramètre k peut jouer sur la vitesse de convergence vers la référence.


Step Response
taud=0
taud=0.5
yref=1
taud=1
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
5
10
15


Step Response
taud=0.5
k=5
k=2
k=1
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Conclusion

- Automatique
  - Lié à la notion de systèmes dynamiques.
  - Notions de boucles ouvertes et de boucles fermées.
  - The **hidden science**...Application en électrotechnique (contrôle moteur), mais aussi en génie civil (contrôle des vibrations), en mécanique, (mécanique spatiale par exemple) , en médecine, en réseaux télécom, en finance (théorie des jeux, commande optimale), en musique (analyse et contrôle acoustique)...
- Définition de propriétés intrinsèques aux systèmes dynamiques (stabilité, précision, qualité du régime transitoire)
- Premières structures de commandes (proportionnelles, intégrales, tachimétrique ...).

La suite en **L3 EEA** , **M1 AITR** /SYGELEC/ISII,