Analyse et Commande des systèmes linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/* $\sim$ *fgouaisb*

October 8, 2009

Sommaire

1. Introduction à l'automatique et à la notion de systèmes.
2. Une première modélisation temporelle des systèmes linéaires.
3. Analyse temporelle des systèmes linéaires.
4. Une seconde modélisation des systèmes linéaires.
5. Analyse structurelle des systèmes linéaires.
6. Exemples de commande de systèmes bouclées.
7. Conclusion

Sommaire

1. Stabilité des systèmes linéaires
   - Définitions
   - Exemples
2. Analyse de la précision des systèmes bouclées
3. Analyse de la performance du système en boucle fermée

Une première définition

Soit le système Σ modélisé par une équation différentielle ou sa fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- Le comportement transitoire (la rapidité, dépassement ...) dépend de la nature des pôles du système.
- Une nouvelle notion : Capacité du système à ne pas exploser lorsqu'il est soumis à des sollicitations externes (entrées de commandes, perturbations), ou internes (conditions initiales)

Definition (Stabilité BIBO)

Un système au repos est stable au sens BIBO ssi pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

Un théorème fondamental

Theorem

Un système de fonction de transfert $F(p)$ est stable BIBO ssi

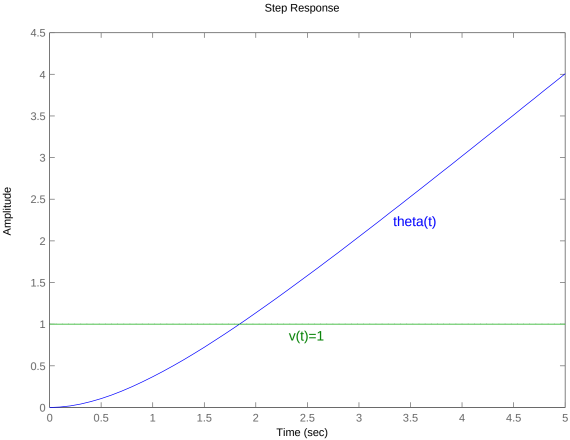
- *Tous les pôles du système appartiennent au demi-plan complexe gauche, i.e. les pôles du système sont à partie réelle négative.*
- *Les racines de l'équation caractéristique liée à l'équation différentielle modélisant le système sont à partie réelle négative.*

Example

Soit un moteur à courant continu modélisé par la fonction de transfert suivante $G(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{\theta(p)}{V(p)}$. Si l'entrée est un échelon $v(t) = 1$, $V(p) = \frac{1}{p}$, on obtient alors : $Y(p) = \frac{1}{p^2(1+p)}$. La méthode de décomposition en éléments simples nous donnent :

$$Y(p) = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

On obtient alors $y(t) = -1 + t + e^{-t}$. Pour une entrée bornée, la sortie n'est pas bornée. Le moteur n'est pas BIBO stable.


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
theta(t)
v(t)=1

Example

Soit un système modélisé par la fonction de transfert suivante $G(p) = \frac{1}{(p+1)} = \frac{\theta(p)}{V(p)}$. Les pôles du système sont $p = -1$. Le système est donc BIBO stable.

Example

Soit le système définie par sa fonction de transfert $G(p) = \frac{1}{(p+1)} = \frac{Y(p)}{U(p)}$. Nous implantons une loi de commande $u(t) = k(y_r(t) - y(t))$, où $y_r(t)$ est le signal de référence. Le système en boucle fermée est donc défini par la fonction de transfert en boucle fermée $G_{bf}(p) = \frac{k}{p+1+k} = \frac{Y(p)}{Y_r(p)}$. Celui-ci est stable ssi $1 + k > 0$.

Sommaire

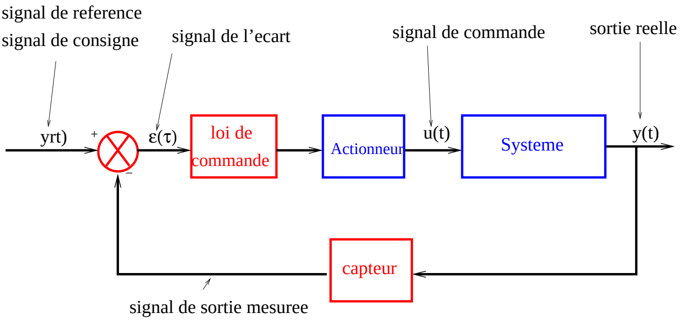
1 Stabilité des systèmes linéaires

2 Analyse de la précision des systèmes bouclées
- Introduction
- Analyse de la précision

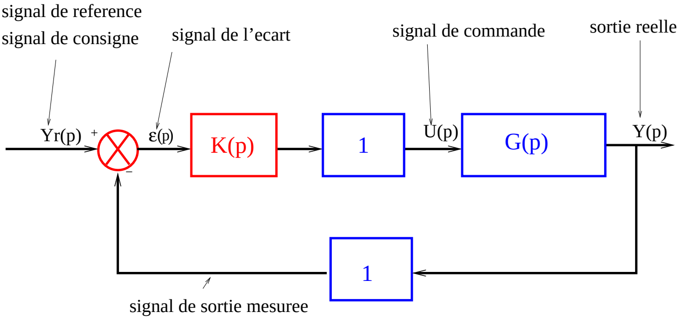
3 Analyse de la performance du système en boucle fermée

Le schéma bloc dans le domaine de Laplace

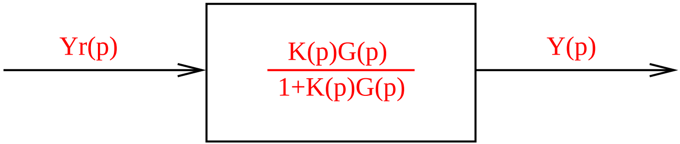
On considère le schéma fonctionnel suivant :



En utilisant la transformée de Laplace, celui ci est équivalent à :



On suppose que les fonctions de transfert des capteurs et actionneurs sont égales à 1. Le schéma bloc en boucle fermée devient :



Objectifs

Objectifs :

- Le système n'explose pas !! **Stabilité du système en boucle fermée**
- La sortie suit la consigne ($y(t) \to y_r(t)$).
- Objectifs sur le régime transitoire du système en boucle fermée.
- Établissement d'un cahier des charges (spécifications sur T_m, T_r...).
- On s'intéresse à la relation entre la consigne $y_r(t)$ et la sortie $y(t)$, c'est à dire (dans le domaine de Laplace) $\frac{Y(p)}{Y_r(p)} = G_{bf}(p) = \frac{K(p)G(p)}{1+K(p)G(p)}$.
- Le régime transitoire est donné par la valeur des caractéristiques du système en boucle fermée (constantes de temps, amortissements, pulsation naturelles).

Définitions

La précision d'un système bouclée est définie à partir de l'erreur $\epsilon(t)$ entre la grandeur de consigne et la grandeur de sortie. Dans le cours, nous nous focalisons sur l'évolution de $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \epsilon(t)$, c'est à dire l'erreur en régime permanent.

Utilisation de la transformée de Laplace et du théorème de la valeur finale :

$f(\infty) = \lim_{p \longrightarrow 0} pF(p)$

Expression de l'erreur dans le domaine de Laplace :

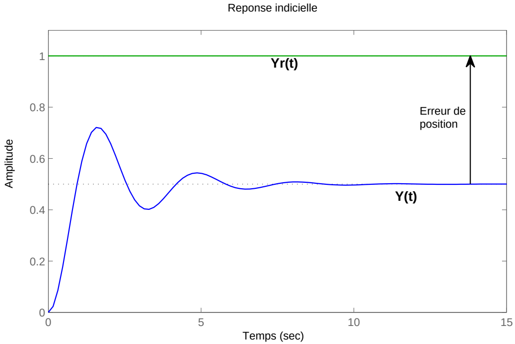
Definition (Erreur dans le domaine de Laplace)

$$\epsilon(p) = Y_{ref}(p) - Y(p)$$

$$\epsilon(p) = \frac{Y_{ref}(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

Représentation graphique des erreurs

Erreur de position :

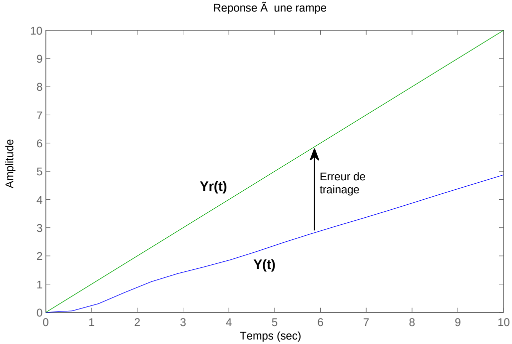


Erreur de position constante

$$\lim_{t \to +\infty} \epsilon_p(t) = \text{constante}$$

Représentation graphique des erreurs

Erreur de trainage ou erreur de vitesse :



Erreur de vitesse tendant vers l'infini

$$\lim_{t \to +\infty} \epsilon_v(t) = \infty$$

Un premier théorème utile

Theorem (Lois des intégrateurs)

Pour annuler l'erreur en régime permanent à une entrée transitoire $Y_{ref}(p)$, la boucle ouverte doit comprendre au moins autant d'intégrateurs que le signal $Y_{ref}(p)$ en contient. La précision d'un système bouclée est liée au nombre d'intégrateurs de la fonction de transfert en boucle ouverte (intégrateurs de la commande ou intégrateurs du système).

Definition (intégrateur)

On appelle intégrateur un système dont l'unique pôle est nul $G(p) = \frac{1}{p}$. Par extension, un système admet n intégrateurs ssi celui-ci possède n pôles en zéro.

Ainsi $G(p) = \frac{1}{p^2+p}$ possède un intégrateur, $G(p) = \frac{1}{p^2(1+\tau p)}$ possède 2 intégrateurs.

Exemples

Example

Soit $G(p) = \frac{k_g}{1+\tau p}$ et $K(p) = k_p$

Calcul de l'erreur de position :

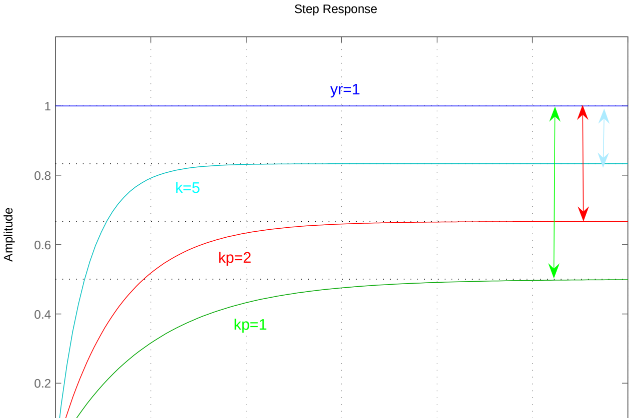
$$\lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\epsilon(p)$$

$$\lim_{p \to 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \to 0} \frac{pY_{ref}\,p}{1 + \frac{k_p k_g}{1+\tau p}}$$

$$\lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = \frac{1}{1 + k_p k_g}$$

remark

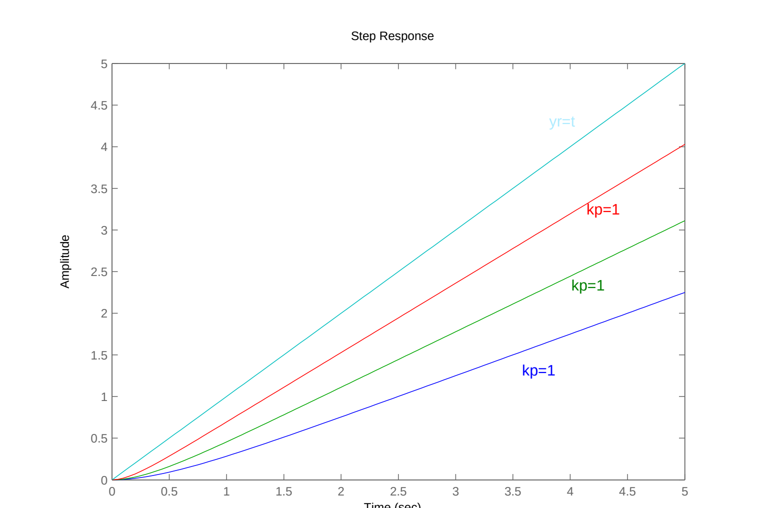
- *L'erreur de position est constant et dépend du choix de k_p.Plus k_p est grand, plus l'erreur est petite.*
- *Règle générale : pour avoir une erreur petite, il est nécessaire d'avoir un grand gain en boucle ouverte.*



Example (même exemple)

calcul l'erreur de vitesse : $\lim_{t \to \infty} \epsilon(t) = \infty$

Le système ne parvient pas à suivre une consigne en rampe.

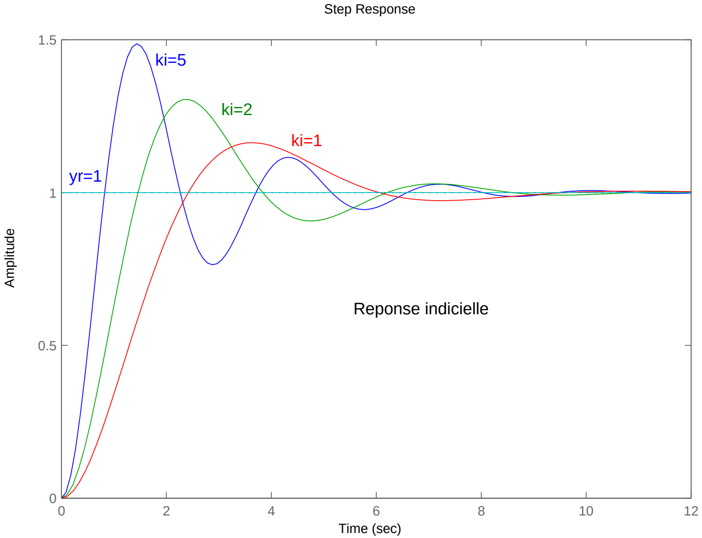


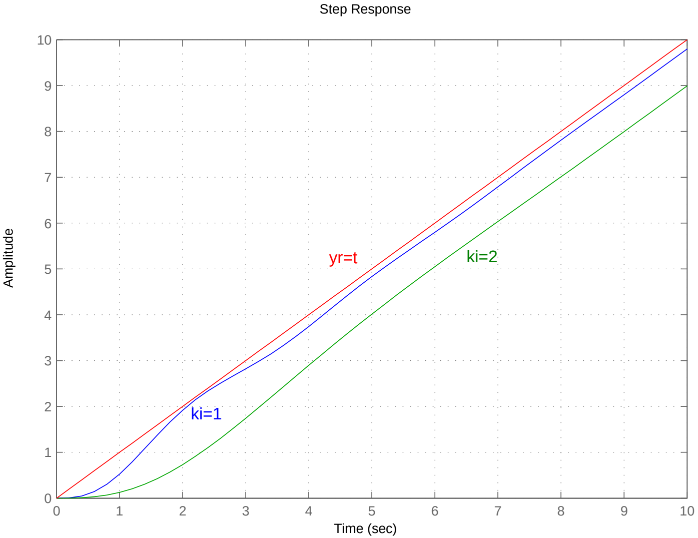
Example

Soit $G(p) = \frac{k_g}{1+\tau p}$ et $K(p) = \frac{k_i}{p}$ (1 intégrateur)
calcul de l'erreur de position : $\lim_{t \longrightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$
calcul de l'erreur de vitesse : $\lim_{t \longrightarrow \infty} \epsilon(t) = \frac{1}{k_i k_g}$

remark

- *L'introduction d'un intégrateur réduit l'erreur en régime permanent.*
- *Attention, l'intégrateur a un effet déstabilisant.*


Step Response
ki=5
ki=2
ki=1
yr=1
Reponse indicielle
Amplitude
Time (sec)
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
12



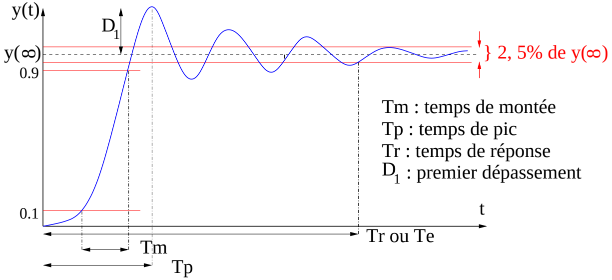
Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
yr=t
ki=1
ki=2

Performances d'un système bouclée

Objectif : Comprendre les performances du système bouclé en analysant la fonction de transfert en boucle fermée.

- Stabilité (valeurs des pôles du système en boucle fermée).
- Précision de l'asservissement (liée au régime permanent).
- Dépassement.
- Rapidité.

Spéc. temporelles : méthodes directes



- Déterminer les paramètres du correcteur pour assurer la stabilité en boucle fermée.
- Déterminer les paramètres du correcteur pour assurer un niveau de précision en boucle fermée.
- Déterminer les paramètres du correcteur à l'aide des indices de performances.