Analyse et Commande des systèmes linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/ ∼ fgouaisb*

October 1, 2009

Sommaire

1. Introduction à l'automatique et à la notion de systèmes.
2. Une première modélisation temporelle des systèmes linéaires.
3. Analyse temporelle des systèmes linéaires.
4. Une seconde modélisation des systèmes linéaires.
5. Analyse structurelle des systèmes linéaires.
6. Exemples de commande de systèmes bouclées.
7. Conclusion

Part I

Une seconde modélisation des systèmes linéaires

Sommaire

Définition de la transformée de Laplace

Definition (La transformée de Laplace)

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe p (variable de Laplace)

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

On note la transformée de Laplace par $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ et la transformée de Laplace inverse par $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$

Definition (La transformée de Laplace inverse)

Soit $c > 0$, supérieur à la plus grande des parties réelles des singularités de $F(p)$. La transformée de Laplace inverse de $F(p)$ est :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dt$$

Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité $\mathcal{L}[Kf(t)] = K\mathcal{L}[f(t)] = KF(p)$
- additivité $\mathcal{L}(f(t) + g(t)) = F(p) + G(p)$
- dérivation $\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$
  $= pF(p)$, $f(0) = 0$ (fonctions causales)
- généralisation:
  $\mathcal{L}[\frac{d^{(n)}f(t)}{dt^n}] = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f^{(1)}(0) - \quad \ldots - f^{(n-1)}(0)$
- intégration $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{p}F(p)$
- valeur initiale $f(0) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$
- valeur finale $f(\infty) = \lim_{p \to 0} pF(p)$

Exemples de calculs

Example

Soit la fonction $f_0(t) = \mathbf{1}$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :

$$F_0(p) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Example (On itère ...)

Soit la fonction $f_1(t) = t$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :

$$F_1(p) = \mathcal{L}(\int_0^t f_0(\tau) d\tau) = \frac{1}{p} F_0(p) = \frac{1}{p^2}$$

Une simple récurrence sur le degré du polynôme montre que la transformée de Laplace de la fonction $f_n(t) = \frac{1}{n!} t^n$ est égale à $F_n(p) = \frac{1}{p^n}$

Example (Tip-top important)

Soit la fonction $f(t) = e^{-at}$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-(p+a)t}}{p+a}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

Example (Tip-top important aussi)

Soit la fonction $f(t) = \sin(\omega t)$ pour $t \geq 0$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} F(p) = & \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2j}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt\right) \\ = & \frac{1}{2j}\left(-\frac{e^{-(p-j\omega)t}}{p-j\omega}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{e^{-(p+j\omega)t}}{p+j\omega}\Bigg|_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right) \\ = & \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Quelques remarques

- il existe dans la littérature de nombreuses tables récapitulant la transformée de Laplace de fonctions plus ou moins classiques.
- Un autre problème consiste à calculer la fonction temporelle étant donnée la fonction dans le domaine de Laplace. Ce calcul fait appel au théorème qui est relativement compliqué à utiliser.

→ C'est pourquoi, en général, nous utiliserons les tables suffisamment complètes pour permettre de déterminer la fonction temporelle. Lorsque la fonction ne sera pas présente dans la table, il faudra alors essayer de **décomposer la fonction en une somme de fonctions élémentaires** dont la fonction temporelle est connue.

- En Automatique, dans le domaine de Laplace, les fonctions que nous allons manipuler seront presque toujours des fonctions rationnelles en p. Dans ce cadre, il existe un théorème très pratique permettant de décomposer une fraction rationnelle en une somme de fractions élementaires.

La décomposition en élements simples

Theorem

Il existe **une et une seule** *décomposition en éléments simples de* $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ *de la forme*

$$\frac{N(p)}{D(p)} = E(p) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{n_i} \frac{K_{i,l}}{(p-p_i)^l} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}+B_{j,k}p}{(p^2+c_jp+d_j)^k},$$

où E *un polynôme nul ou de degré égal à* $deg(N) - deg(D)$ *et* $K_{i,l}, A_{j,k}$ *et les* $B_{j,k}$ *sont des constantes réelles, appelés* **résidus**.

$\Rightarrow$ Voir son utilisation dans le poly.

Résolution des équations différentielles

Nous pouvons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre une équation différentielle, en procédant de la manière suivante:

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle en utilisant les propriétes de la transformée de Laplace et la table des transformées
2. Manipuler l'expression algébrique et trouver une solution $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$ en fonction des entrées et des conditions initiales.
3. Calculer les résidus associés à chaque élements simples.
4. Utiliser de la table des transformées inverses pour obtenir la solution dans le domaine temporelle.

Résolution des EDOs - Exemple

Soit l'équation différentielle $\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ke(t)$ avec $y(0) = y_0$ et $e(t) = 1, \forall t > 0$.

- On applique la transformée de Laplace: $(\tau p + 1)Y(p) - \tau y_0 = KE(p)$,
- On détermine $Y(p)$ en fonction de $E(p)$:

$$Y(p) = \underbrace{\frac{K}{\tau p + 1}E(p)}_{\text{Réponse forcée}} + \underbrace{\frac{\tau}{\tau p + 1}y_0}_{\text{Effet des Conditions initiales}}$$

- L'entrée est un échelon unitaire $e(t) = 1 \Rightarrow E(p) = 1/p$:

$$Y(p) = \frac{K}{(\tau p + 1)p} + \frac{\tau}{\tau p + 1}y_0$$

- On utilise la décomposition en élements simples:

$$Y(p) = K(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{\tau p + 1}) + \frac{\tau}{\tau p + 1}y_0$$

- On utilise les tables des transformées:

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) + y_0 e^{-t/\tau}.$$

Définition la fonction de transfert

Definition

La fonction de transfert d'un système linéaire est définie comme le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie $Y(p)$ et la transformée de Laplace de l'entrée $E(p)$, pour des conditions initiales nulles

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$$

remark

- *Une fonction de transfert est seulement définie pour des systèmes linéaires et stationnaires.*
- *La représentation en fonction de transfert d'un système est une relation entre l'entrée et la sortie du système et n'inclue pas d'information sur la structure interne du système physique.*
- *La fonction de transfert est à calculer pour des conditions initiales nulles.*
- *La fonction de transfert dépend uniquement de la variable de Laplace p et ne dépend pas du temps.*

Un peu de vocabulaire

Definition (Ordre - polynôme caractéristique)

L'ordre du système est le degré le plus élevé du polynôme du dénominateur, (n), appelé **polynôme caractéristique**.
Si le système est causal alors $n \geq m$.

Definition (Pôles - zéros)

- Racines du polynôme caractéristique = **les pôles** du système.
- Racines du numérateur = **les zéros**.

Definition (Gain statique)

- $\lim\limits_{p \to 0} pY(p) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)\dfrac{1}{p} = F(0) = \dfrac{b_0}{a_0}$

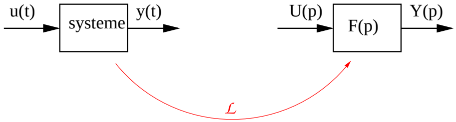
Liens entre la fonction de transfert et le modèle temporel

Soit un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ modélisé par l'EDO:

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

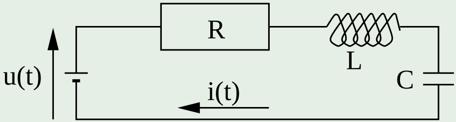
En appliquant la relation suivante $p^i = \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}}$, on obtient la fonction de transfert:

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$



Exemples

Example



- Equation différentielle : $LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y = C\dot{u}$
- Transformation $LCp^2Y(p) + RCpY(p) + Y(p) = CpU(p)$
- Fonction de transfert

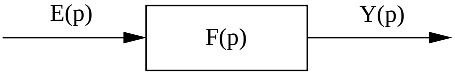
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1}$$

Les fonctions de transfert usuelles

$y(t) = Ku(t)$	$\frac{Y(p)}{U(p)} = K$
$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{p}$
$y^{(n)}(t) = Ku(t)$	$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{p^n}$
$\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\tau p+1}$
$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t)$	$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$

Définitions d'un schéma fonctionnel

Par la transformée de Laplace, un système linéaire d'entrée $e(t)$ ($E(p)$) de sortie $y(t)$ ($Y(p)$) peut être identifié par sa fonction de transfert $F(p)$. On représente alors le modèle du système par un bloc orienté.

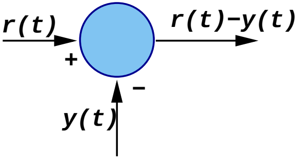


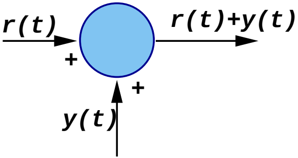
$$Y(p) = F(p)E(p)$$

Compte tenu des propriétés des fonctions de transfert, la composition de systèmes linéaires s'effectue aisement graphiquement.

Les opérations d'addition et soustraction

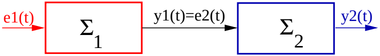
Une opération simple et nécessaire est l'addition ou la soustraction:

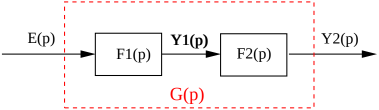




Mise en série de deux systèmes

La sortie du premier système est l'entrée du second système.

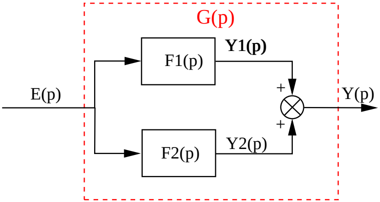




$$Y_2(p) = F_2(p)Y_1(p) = F_2(p)F_1(p)E(p$$

$$G(p) = F_1(p) \times F_2(p)$$

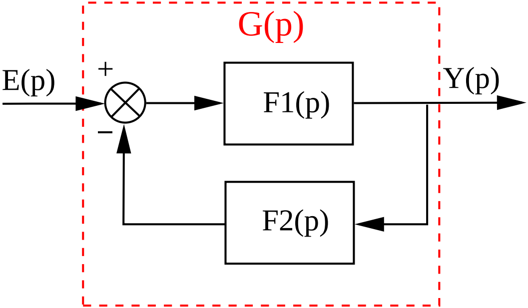
Mise en parralèle de deux systèmes



$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) = (F_1(p) + F_2(p))E(p)$$

$$G(p) = F_1(p) + F_2(p)$$

Interconnection feedback



$$Y(p) = F_1(p)\epsilon(p), \quad \epsilon(p) = E(p) - F_2(p)Y(p)$$

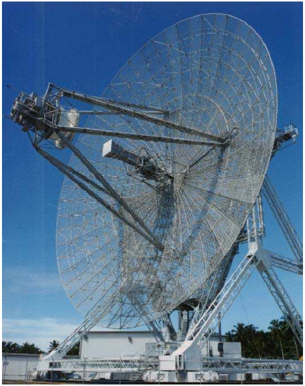
$$Y(p) = F_1(p)E(p) - F_1(p)F_2(p)Y(p)$$

$$Y(p) = \frac{F_1(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)}E(p)$$

$$G(p) = \frac{F_1(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)}$$

Exemple

On considère la régulation de position angulaire d'un radar de type ALTAIR, utilisé pour la poursuite d'objet spatiaux (navettes, missiles).



Un modèle **simplifié** $\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = v(t)$,

$\theta(t)$ angle entre l'horizon et la pointe du radar,

$v(t)$ tension du moteur alimentant les vérins.

Loi de commande implantée 1

$v(t) = K(\theta_r(t) - \theta(t))$.

Loi de commande implantée 2

$v(t) = K(\theta_r(t) - \theta(t)) - \alpha\dot{\theta}(t)$.