Analyse et Commande des systèmes linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/ ∼ fgouaisb*

September 24, 2009

Présentation du Cours

- Volume Horaire: 9h Cours, 9h de Tds, 12h de TPs,
- Matériel sur le site http://www.laas.fr/∼ fgouaisb
  - Polycopié sur la résolution des EDOs,
  - Transparents de Cours,
  - Polycopié de TPs,
  - Polycopié de Cours.
- Evaluation:
  - 1 note de contrôle intermédiaire (Partiel),
  - 1 note de contrôle terminal,
  - 1 note de travaux pratiques (comprenant 1 note de contrôle QCMs type moodle, 1 note terminale de travaux pratiques).
- Contact

⋆ Responsable du Cours : Frédéric Gouaisbaut, fgouaisb@laas.fr
⋆ Responsable des TPs : Yann Labit, labit@laas.fr

Sommaire

Part I

Analyse temporelle des systèmes linéaires

Sommaire

Analyse temporelle

Les systèmes que nous allons étudier sont définis par un modèle liant l'entrée et la sortie.

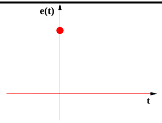
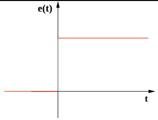
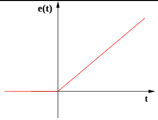
Analyse d' un système

- comprendre l'évolution du signal de sortie en fonction des sollicitations de l'entrée.
- Comparer les évolutions des sorties de différents systèmes.
- Comparer des systèmes :
  1. en terme de stabilité (le système explose t-il ?).
  2. en terme de rapidité de convergence vers l'objectif.
  3. en terme de qualité de convergence (oscillations de la sortie ...)

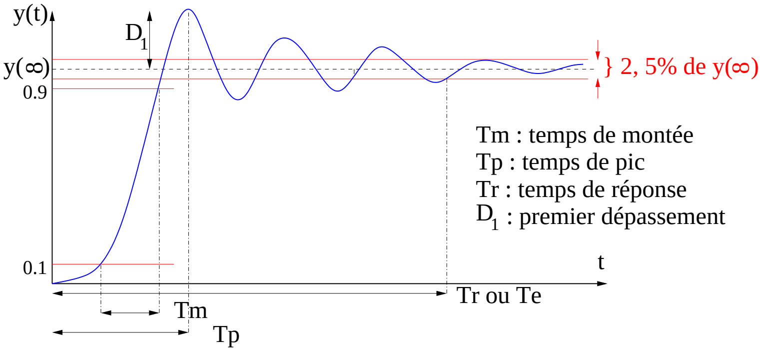
$\longrightarrow$ Définir des indices de performances communs.

Les réponses temporelles

idée : Comparer les réponses des systèmes à une série d'entrées tests.

Impulsion de dirac		$E(p) = 1$	
Echelon unitaire	$e(t) = 1 \forall t > 0,\ 0$ sinon	$E(p) = 1/p$	
Rampe	$e(t) = t \forall t > 0,\ 0$ sinon	$E(p) = 1/p^2$	
Parabole	$e(t) = t^2 \forall t > 0,\ 0$ sinon	$E(p) = 2/p^3$	

Indices de performances pour la réponse indicielle



Tm : temps de montée
Tp : temps de pic
Tr : temps de réponse
D_1 : premier dépassement

Définitions d'indices de performance

Réponse temporelle composée de :

1. régime transitoire.
2. régime permanent.

Nous définissons plusieurs points de référence aisément calculables ou mesurables :

- La valeur finale :
- Le temps de montée :
- Le temps de premier pic :
- La valeur du premier pic ou premier dépassement :
- Le temps de réponse :

Régime transitoire et Régime permanent

1. La **réponse transitoire** du système $y_t(t)$. Celle ci correspond à la solution de l'équation homogène où les n inconnues (provenant des polynômes q_i) sont déterminés grâce aux conditions initiales.
2. La **réponse permanente** du système qui correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Elle correspond en général à la partie de la courbe lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Example

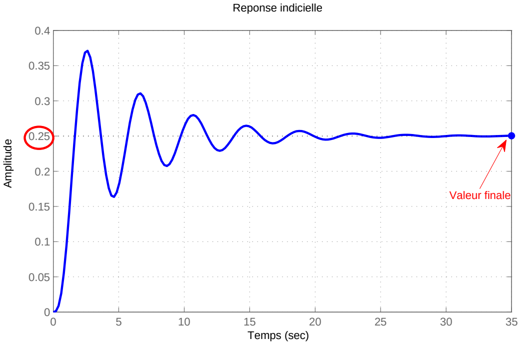
Soit l'équation $\dot{y}(t) + y(t) = 2 \times u(t) = 2 \times 1$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$. L'équation homogène s'écrit $y_l(t) = Ae^{-t}$. L'équation particulière s'écrit $y(t) = 2$. La constante A est calculé telle que $y_l(0) + y_p(0) = 0$ i.e. $A = -2$. Le régime permanent est donc $y_p(t) = 2$ et le régime transitoire est $y_t(t) = -2e^{-t}$.

Analyser la réponse indicielle c'est donc analyser les caractéristiques du **régime permanent** ($y_p(t) = 2$) et analyser les caractéristiques du **régime transitoire** ($y_t(t) = -e^{-t}$ ou au signe près $y^\star(t) = e^{-t}$)

Indices de performances pour le régime permanent

Valeur finale

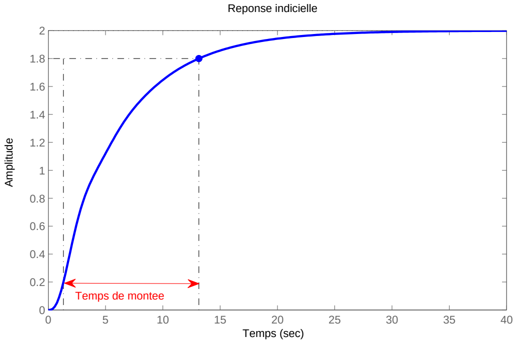
La valeur finale de la courbe est définie par $y(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} y(t)$



Indices de performances pour le régime transitoire

Temps de montée

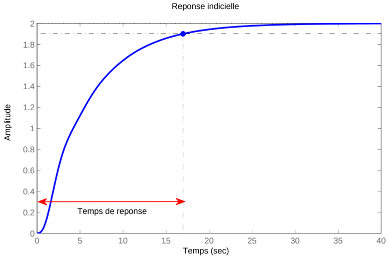
Le temps de montée d'un système est le temps mis par sa sortie pour passer de 10% de sa valeur finale à 90% de sa valeur finale.

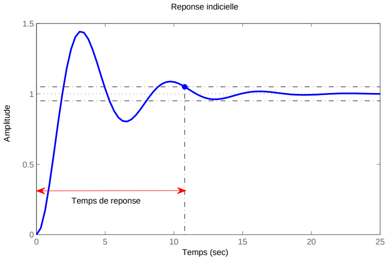


Indices de performances pour le régime transitoire

Temps de réponse

Le temps de réponse d'un système est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande compris entre $\pm 5\%$ de sa valeur finale.





Indices de performances pour le régime transitoire

Temps du premier pic

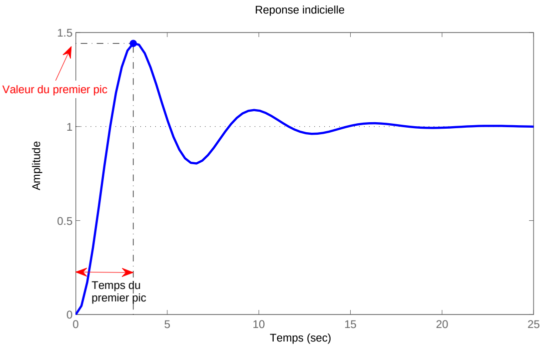
Le temps de premier pic est le temps mis par le système pour atteindre le premier pic du dépassement (si celui ci a lieu ...)

la valeur du premier pic

La valeur du premier pic a plusieurs définitions reflétant différentes manières de mesurer la valeur du dépassement maximale par rapport à la valeur finale de $y(t)$. Il est en général utilisé en pourcentage :

$$D_r = \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} * 100\%$$

Indices de performances pour le régime transitoire



Modèle et Réponse d'un système du $1er$ ordre

- Equation différentielle

$$a_0 y + a_1 \dot{y} = b_0 u \;\Leftrightarrow\; y + T\dot{y} = Ku$$

T est la constante de temps et K est le gain statique.

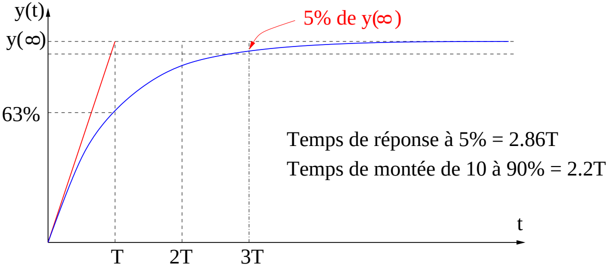
- Réponse indicielle, échelon e_0

$$\begin{array}{rcccc} y(t) & = & e^{-\frac{t}{T}} x_0 & + & \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} \frac{K}{T} e_0 \, d\tau \\ & = & e^{-\frac{t}{T}} x_0 & + & K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) e_0 \\ & = & e^{-\frac{t}{T}} (x_0 - Ke_0) & + & Ke_0 \\ & & \text{régime transitoire} & + & \text{régime permanent} \end{array}$$

- Pente à l'origine

$$\dot{x}(0) = \frac{Ke_0 - x_0}{T}$$

Tracé de la réponse indicielle



- La valeur finale : Ke_0.
- Le temps de montée : $2,2T$.
- Le temps de premier pic :$\emptyset$.
- La valeur du premier pic ou premier dépassement :$\emptyset$.
- Le temps de réponse : $t_r = 3T$.

Identification de la réponse

- choix d'un modèle mathématique.
- Détermination des paramètres du modèle (par exemple le gain statique K et la constante de temps T)

$\Rightarrow$ Identification de ces paramètres

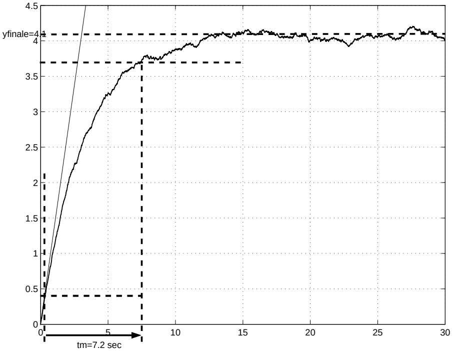
1. Ces paramètres sont calculés par l'intermédiaire de la connaissance du processus physique.
2. Ces paramètres sont difficilement calculables ou avec un grande imprecision ...

$\Rightarrow$ Utiliser la méthode de la réponse indicielle pour calculer les paramètres inconnues...

Identification de la réponse

Example

Soit un système de capteur d'entrée $e(t)$, la donnée que le capteur mesure et de sortie $y(t)$ la mesure du capteur. La réponse indicielle (pour une entrée $e(t) = 1$) donne la courbe suivante.



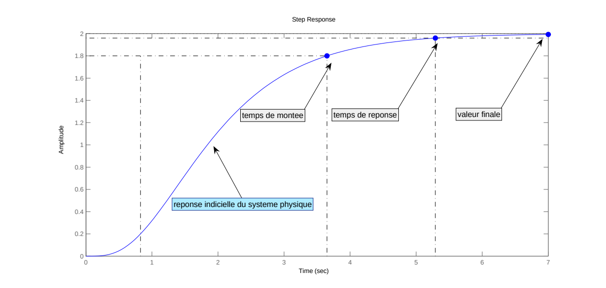
Calcul du temps de montée $t_m = 7.2sec$
Calcul de la valeur finale $y(\infty) = 4.1sec$
Modèle du système

$$3.27\dot{y}(t) + y(t) = 4.1e(t)$$

Identification de la réponse

Example

Soit un système de capteur d'entrée $e(t)$, la donnée que le capteur mesure et de sortie $y(t)$ la mesure du capteur. La réponse indicielle (pour une entrée $e(t) = 1$) donne la courbe suivante. Nous pouvons aisément calculer son temps de réponse $t_r = 4.36sec$, son temps de montée $t_m = 3.65sec$ et sa valeur finale $y(\infty) = 2$.



Calcul du modèle mathématique

Reflet du comportement physique,

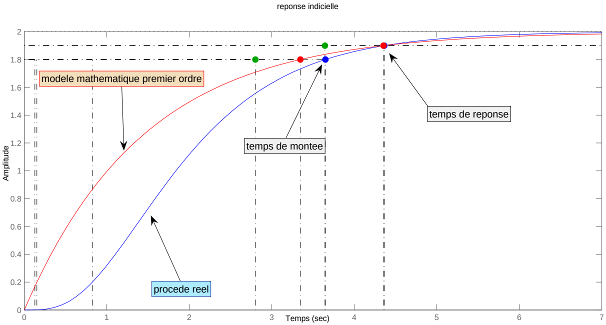
- même valeur finale.
- même temps de réponse.

Nous choisissons un modèle simple du premier ordre.
$y(\infty) = Ke_0 = 2 \Rightarrow K = 2$
$t_r = 3T = 4.36$ et donc $T = 1.463$. Le modèle mathématique du capteur sera donc :

$$1.463\dot{y}(t) + y(t) = 2e(t)$$

Comparaisons entre la réponse du modèle et du procédé

Nous obtenons par ailleurs les réponses suivantes :



Modèle du second ordre

- Equation différentielle :

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u \;\Leftrightarrow\; \ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 u$$

- Fonction de transfert : $G(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$
- ω_n est la pulsation naturelle (pulsation propre non amortie), ζ est le coefficient d'amortissement, K est le gain statique.
- Le comportement dépend des racines de l'équation caractéristique (pôles du système) :
  - Si $\zeta > 1$, alors pôles réels :

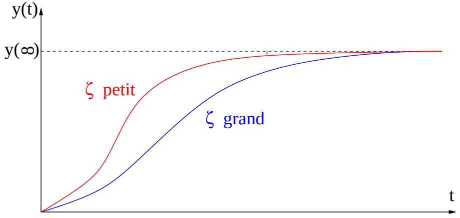
$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} \text{ et } -\frac{1}{\tau_2}$$

  - si $\zeta = 1$, alors pôle double : $p = -\zeta\omega_n$
  - si $\zeta < 1$, alors pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Réponse indicielle apériodique $\zeta > 1$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= K\left(1 - \frac{p_2 e^{tp_1} - p_1 e^{tp_2}}{p_1 - p_2}\right) u(t) \\
&= K\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) u(t)
\end{aligned}
$$



Réponse indicielle critique $\zeta = 1$

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right) u(t)$$

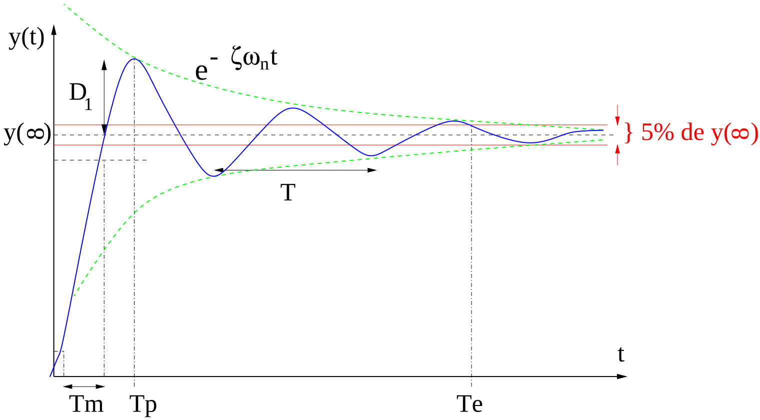
Réponse indicielle oscillante amortie $|\zeta < 1|$

- Réponse oscillante amortie

$$y(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \varphi)\right] u(t)$$

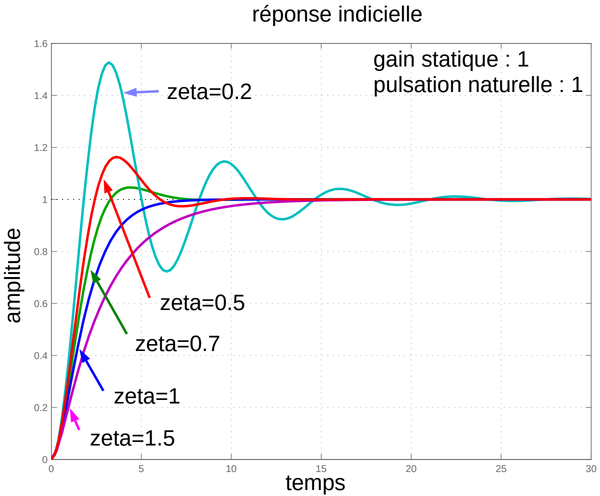
  avec $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$.
- Pulsation propre : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ Période des oscillation : $T = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Enveloppe d'amortissement donnée par $e^{-\omega_n t}$
- Temps de réponse à 5% : $T_e \simeq \frac{3}{\zeta \omega_n}$
- Temps de montée : $T_m = \frac{\pi}{2\omega_p} = \frac{T}{4}$
- Premier dépassement : $D_1 = 100.e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ (en %) intervient à $\frac{T}{2}$
- **Coefficient de surtension lorsque $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$**
- Pulsation de résonance : $\omega_r = \sqrt{1-2\zeta^2}\omega_n$
- Coefficient de surtention : $Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

Réponse indicielle d'un modèle d'ordre 2

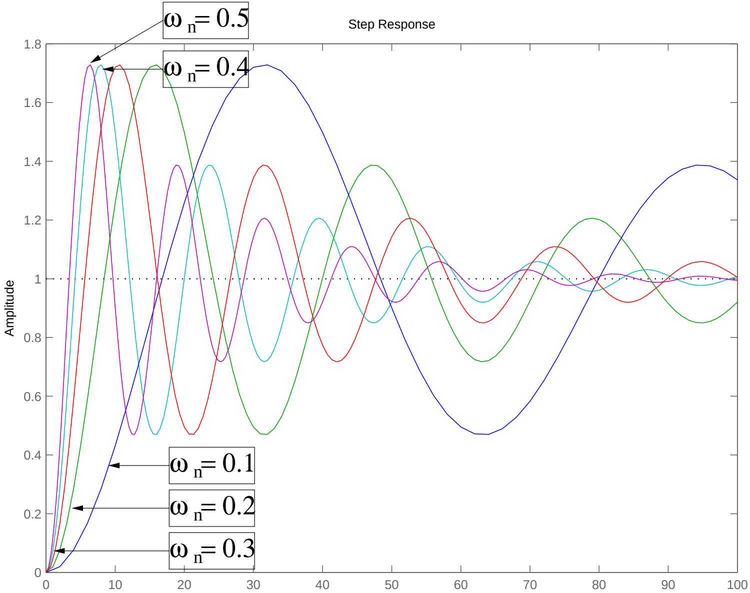


Evolution Réponse indicielle amortissement ζ

Plus ζ diminue, plus les dépassements augmentent



Evolution Réponse indicielle pulsation ω_n



Asservissement proportionnel et intégral

Example (asservissement de position)

On désire asservir la position d'un petit robot. Nous commandons la vitesse des roues et nous désirons que celui-ci progresse de y_r mètres. Le modèle liant la vitesse des roues $\Omega(t)$ et la position du robot $y(t)$ est donné par :

$$\dot{y}(t) + 30y(t) = \Omega(t)$$

Choix d'une commande en boucle fermée: $\Omega(t) = k(y_r(t) - y(t))$ où k est un paramètre de la commande.

La relation entre y_r et $y(t)$ devient alors :

$$\dot{y}(t) + 30y(t) = \Omega(t) = k(y_r - y(t))$$
$$\dot{y}(t) + (30 + k)y = ky_r$$

1. Pour une consigne de y_r, le robot progresse de $\frac{k}{30+k}y_r$
2. Nous pouvons également utiliser k pour jouer sur la vitesse de convergence car $t_r = \frac{3}{30+k}$.

Example (asservissement de position)

On choisit une commande de la forme $\Omega(t) = k \int_0^t (y_r - y(t)dt)$ où k est un paramètre de la commande.
L'équation liant la consigne et la sortie devient donc :

$$\dot{y}(t) + 30y(t) = \Omega(t) = k \int_0^t (y_r - y(t)dt)$$

En dérivant nous obtenons :

$$\ddot{y}(t) + 30\dot{y}(t) + ky(t) = ky_r$$

C'est une équation du second ordre, ces paramètres canoniques sont $K_{statique} = 1$, $\omega_n = k$,$\zeta = \frac{15}{k}$.

1. Pour une consigne de y_r, le robot progresse de y_r
2. Nous pouvons également utiliser k pour faire respecter d'autre spécifications...