Analyse et Commande des systèmes linéaires

Frédéric Gouaisbaut

LAAS-CNRS
Tel : 05 61 33 63 07
email : fgouaisb@laas.fr
webpage: *www.laas.fr/ ∼ fgouaisb*

September 24, 2009

Présentation du Cours

- Volume Horaire: 9h Cours, 9h de Tds, 12h de TPs,
- Matériel sur le site http://www.laas.fr/∼ fgouaisb
  - Polycopié sur la résolution des EDOs,
  - Transparents de Cours,
  - Polycopié de TPs,
  - Polycopié de Cours.
- Evaluation:
  - 1 note de contrôle intermédiaire (Partiel),
  - 1 note de contrôle terminal,
  - 1 note de travaux pratiques (comprenant 1 note de contrôle QCMs type moodle, 1 note terminale de travaux pratiques).
- Contact

  ⋆ Responsable du Cours : Frédéric Gouaisbaut, fgouaisb@laas.fr

  ⋆ Responsable des TPs : Yann Labit, labit@laas.fr

Sommaire

Part I

Les systèmes continus : Modélisation temporelle

Sommaire

Modélisation :Pourquoi modéliser ?

Definition (Modèle)

Système **artificiel** dont certaines propriétés présentent des **analogies** avec des propriétés, observées ou inférées, d'un système étudié, et dont le comportement est appelé, soit à révéler des comportements de l'original susceptibles de faire l'objet de nouvelles investigations, soit à tester dans quelle mesure les propriétés attribuées à l'original peuvent rendre compte de son comportement manifeste (Thinès-Lemp. 1975).

Definition (Modéliser un processus)

Opération par laquelle on établit le modèle d'un système complexe, afin d'étudier plus commodément et de mesurer les effets sur ce système des variations de tel ou tel de ses éléments composants (Giraud-Pamart Nouv. 1974).

Modélisation : Comment modéliser ?

1- Définir le système étudié et ses composants élémentaires.

2- Formuler le modèle mathématique idéal et dresser la liste des hypothèses à retenir.

3- Ecrire les lois de la physique régissant le processus.

4- Le comportement du système évolue au cours du temps $\longrightarrow$ système **dynamique**.

$$F(x^{(n)}(t), \ldots, \ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t)) = 0$$

avec $x(t)$ toutes les variables constituant le système.

Remarque :

Compromis entre Précision/complexité du modèle

Définitions

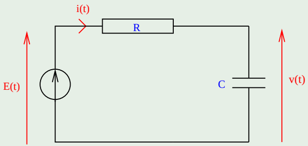
Definition (système linéaire)

Un système est dit linéaire s'il obeit à deux conditions :

1. Condition d'homogénéité.
2. Condition de superposition.

Example (Exemples et Contre-exemples)

Exemples



Lois électriques

$$E(t) = RC\frac{dV(t)}{dt} + V(t)$$

Contre-exemples. $y(t) = e^2(t), \quad y(t) = e(t) + 1, \quad \dot{y}(t) = sin(e(t))$

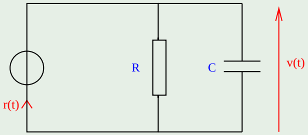
Modèle linéaire : Equations Différentielles Ordinaires

Equations différentielles

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$+$ conditions initiales $y(0), \cdots\ y^{(n-1)}(0),\ u(0), \cdots\ u^{(n-1)}(0)$

Example



Entrées : U(t), Sorties : i(t)

Loi des noeuds :

$u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$

$$\frac{du}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i$$

Résolution de l'équation différentielle

Méthode de résolution

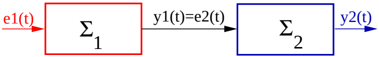
1. Résoudre l'équation sans second membre. $y_l(t)$ (effet des C.I.)
   Utilisation de l'équation caractéristique
   $a_0 + a_1 p + ... + a_{n-1} p^{n-1} + p^n = 0$
2. Détermination d'une solution particulière de l'équation avec second membre, $y_p(t)$
   1. Une solution particulière est facilement détectable.
   2. On utilise la méthode de la variation de la constante.
3. La solution générale est $y_g(t) = y_l(t) + y_p(t)$
4. Utiliser les conditions initiales $(y(t_0),\dot{y}(t_0)\ ...)$ pour déterminer les constantes issues de la résolution de l'équation sans second membre.

Exemple

Soit les deux systèmes suivants interconnectés :

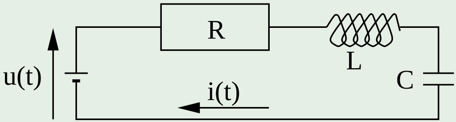
$\Sigma_1 : \tau_1 \dot{y}_1(t) + y_1(t) = k_1 e_1(t)$

$\Sigma_2 : \tau_2 \dot{y}_2(t) + y_2(t) = k_2 e_2(t)$



Comment trouver la relation entre l'entrée $e_1(t)$ et la sortie $y_2(t)$ du nouveau système ?

Example



- Définition des entrées :
- Définition des sorties :
- Modélisation : Equation différentielle :

$$LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y = C\dot{u}$$

Modèle et Réponse d'un système du 1*er* ordre

- Equation différentielle

$$a_0 y + a_1 \dot{y} = b_0 u \;\Leftrightarrow\; y + T\dot{y} = Ku$$

T est la constante de temps et K est le gain statique.

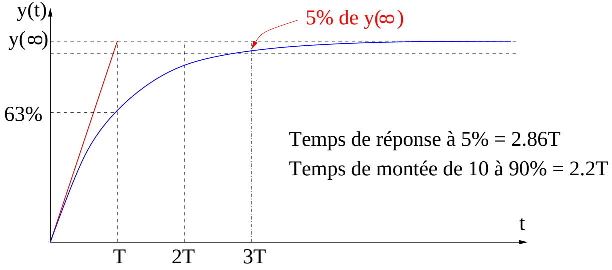
- Réponse indicielle, échelon e_0

$$\begin{array}{rcccc} y(t) & = & e^{-\frac{t}{T}} x_0 & + & \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} \frac{K}{T} e_0 \, d\tau \\ & = & e^{-\frac{t}{T}} x_0 & + & K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) e_0 \\ & = & e^{-\frac{t}{T}} (x_0 - K e_0) & + & K e_0 \\ & & \text{régime transitoire} & + & \text{régime permanent} \end{array}$$

- Pente à l'origine

$$\dot{x}(0) = \frac{K e_0 - x_0}{T}$$

Tracé de la réponse indicielle $u(t) = e_0$



- La valeur finale : Ke_0.
- Le temps de montée : $2,2T$.
- Le temps de premier pic :$\emptyset$.
- La valeur du premier pic ou premier dépassement :$\emptyset$.
- Le temps de réponse : $t_r = 3T$.

Une première régulation

Example

Soit le système modélisé par $\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$. On implante une commande de type $u(t) = \alpha(y_r(t) - y(t))$ où $y_r(t)$ est la consigne et $y(t)$ la sortie du process.

1. Dessiner le schéma bloc de l'asservissement.
2. Déterminer la relation liant l'entrée de consigne $y_r(t)$ et la sortie $y(t)$.
3. tracer la courbe de réponse du système pour $y_r(t) = 1, K = 1, \tau = 2$.

- La relation entre l'entrée de consigne et le sortie est une équation différentielle :
$$\tau \dot{y}(t) + (1 + K\alpha)y(t) = K\alpha y_r(t)$$
- Pour $y_r(t) = 1$, la réponse indicielle s'écrit donc $y(t) = \frac{K\alpha}{1+K\alpha}(1 - e^{-\frac{(1+K\alpha)t}{\tau}})$.