Habilitation à Diriger des Recherches

Contribution à l'Algorithmique Parallèle
Le Concept d'Asynchronisme :
Etude Théorique, Mise en Oeuvre, et Application

Didier EL BAZ

LAAS du CNRS, Toulouse

I. Introduction

Grands projets scientifiques et programmes technologiques $\Rightarrow$ importants volumes de calcul,

d'où l'utilisation de **calculateurs à hautes performances**.

astrophysique, ... biologie ;
météorologie, télécommunications, ... finance ;
avionique, recherche pétrolière, ... industrie cinématographique.

Plusieurs centaines de calculateurs à haute performance installés.

10 gigaflops $\rightarrow$ 1 téraflop

Enormes progrès de la microélectronique et de l'informatique $\Rightarrow$ formidable accroissement des performances des calculateurs.

I.1 Les Architectures Parallèles

Parallélisme à tous les niveaux de l'architecture.

architecture machine $\rightarrow$ **plusieurs processeurs** de calcul

qui **coopèrent par échange de données**.

Les Constructeurs :

Fujitsu, IBM, INTEL, SGI (Cray), Sun, Thinking Machine, Alliant

Les Produits :

évolution très rapide des performances des produits.

Défits Majeurs

Maximiser l'efficacité de la machine.

Question cruciale :

faut-il synchroniser les processus de calcul ?

I.2 Les Itérations Asynchrones

Classe **générale** de méthodes itératives n'ayant **pas d'équivalent dans le cas séquentiel**.

Autorise un fonctionnement **sans synchronisation**.

Suppression du **temps de gestion** des synchronisations et des **temps d'attente**.

Appliquées à un **grand nombre** de problèmes :

e.d.p., e.d.o., optimisation, systèmes Markoviens ...

Etudiées dans **nombreux centres de recherche** et **universités**

Carnegie-Mellon, Illinois, MIT, Pennsylvania, Temple,
Southern California,
AT & T Bell labs, IBM Watson Res. Cen., Los Alamos Nat. Lab.

Institute of Computational Mathematics Pekin, Wuhan U.

Calabre, ENSEEIHT-IRIT, Franche-Comté,
Loughborough U. of Technology, Valence, Wuppertal.

I.3 Cursus

Thèse de **Docteur Ingénieur** au LAAS (Janvier 1984).

Stage post-doctoral INRIA au **MIT** (1984).

Chargé de Recherche CNRS au LAAS (1985).

2 contrats **A.T.P.** Systèmes Complexes (1983, 1986).

Contrat européen Stimulation (1990).

Projet Stratagème Inter PRC (1994).

Collaboration avec J.C. Miellou et Pierre Spiteri (1993).

2 stages de **D.E.A.** et **2 Thèses** encadrées.

I.4 Travail de Recherche

Théorie et **pratique**.

Intersection des **Mathématiques Appliquées**, de l'**Informatique**, et de l'**Automatique**.

modélisation,

domaines d'application,

analyse de la **convergence**,

étude de la **terminaison**,

mise en œuvre sur diverses architectures,

étude de **performance**,

Plan de l'Exposé

I Introduction

II Itérations Asynchrones Standards

III Itérations Asynchrones avec Communication Flexible

IV Conclusion

V Perspective

II. Itérations Asynchrones Standards

Nous considérons le problème de point fixe :

(2.1) $$x^* = F(x^*),$$

où F est une application de R^n dans R^n.

II.1 Un cas particulier simple :

Schéma itératif **synchrone** : Jacobi

(2.2) $$x_i(j+1) = F_i(x_1(j), x_2(j)), \forall i \in \{1, 2\}, j = 0, 1, 2, ...$$

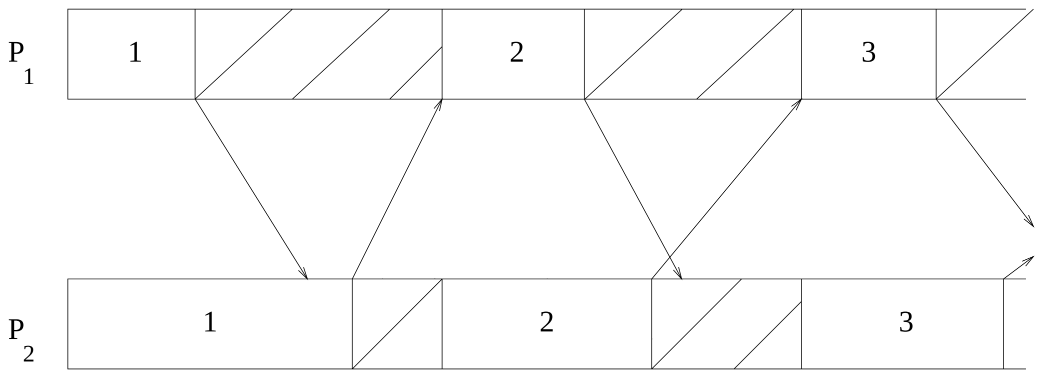

Figure 1: Itération synchrone

II.2 Modèle

Décomposition de R^n en $\Pi_{i=1}^{\alpha} R^{n_i}$, $n, n_i, \alpha, \in N$, avec $\Sigma_{i=1}^{\alpha} n_i = n$.

Définition 1 : Une itération **asynchrone** associée à $F : \Pi_{i=1}^{\alpha} R^{n_i} \to \Pi_{i=1}^{\alpha} R^{n_i}$ et à $x(0) \in \Pi_{i=1}^{\alpha} R^{n_i}$ est une **suite** $\{x(j)\}, j = 0, 1, ...,$ **de vecteurs** de $\Pi_{i=1}^{\alpha} R^{n_i}$ définie pour $i = 1, ..., \alpha$:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} x_i(j) = F_i(x_1(I_1(j)), ..., x_\alpha(I_\alpha(j))) \text{ si } i \in S(j), \\ x_i(j) = x_i(j-1) \text{ si } i \notin S(j), \end{cases}$$

où $\mathcal{S} = \{S(j) | j = 1, 2, ...\}$ avec $S(j) \in \{1, ..., \alpha\}$ et $S(j)$ non vide et

$\mathcal{I} = \{I(j) = (I_1(j), ..., I_\alpha(j)) | j = 1, 2, ...\}$

De plus $\mathcal{S}$ et $\mathcal{I}$ satisfont pour $i = 1, ..., \alpha$:

(a) $0 \le I_i(j) \le j - 1, j = 1, 2, ...$

(b) $I_i(j)$ tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini.

(c) i apparaît un nombre infini de fois dans $\mathcal{S}$.

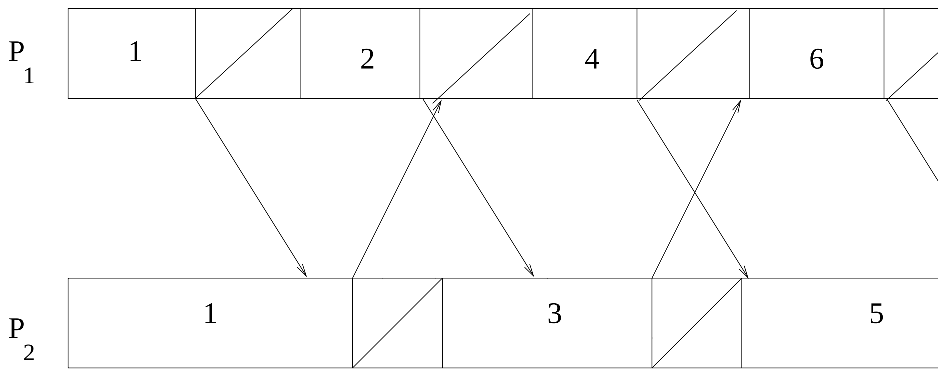

Figure 2: Itération asynchrone

II.3 Les retards

$j - I_l(j)$: **retard** dans l'accès au l-ème sous-vecteur à l'itération j.

Différence de durée des phases de calcul

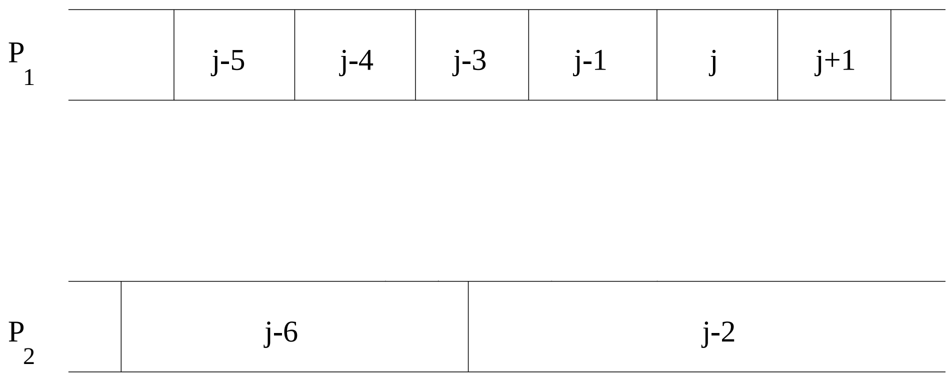

Figure 3: Effet des différences de durée des phases de calcul

Délais de communication

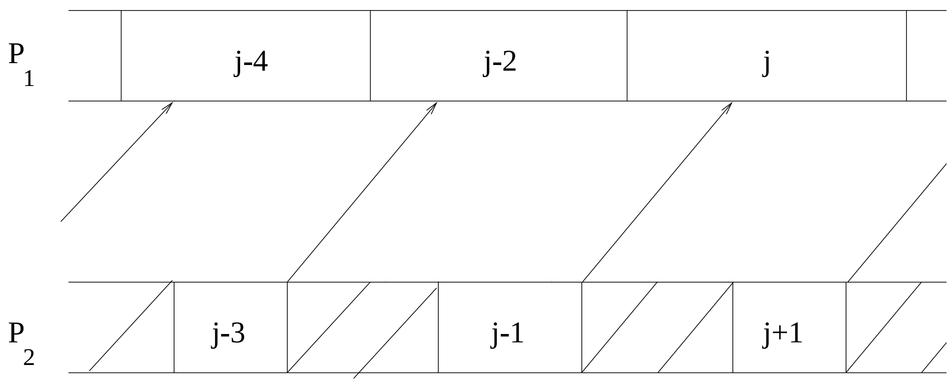

Figure 4: Effet des délais de communication

II.4 Exemples de retards non bornés

P_1 réactualise la composante x_1 en une unité de temps

P_2 réactualise la composante x_2 en k unités de temps lors de la k-ième réactualisation

Le retard $j - I_2(j)$ croît comme $\sqrt{j}$ et tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini.

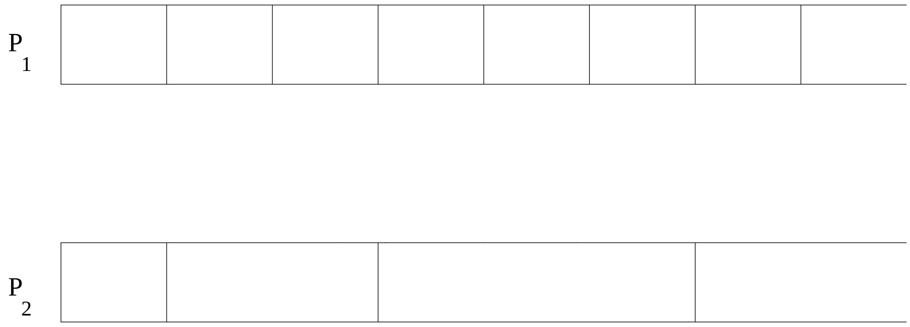

Figure 5: Exemple de retards non bornés

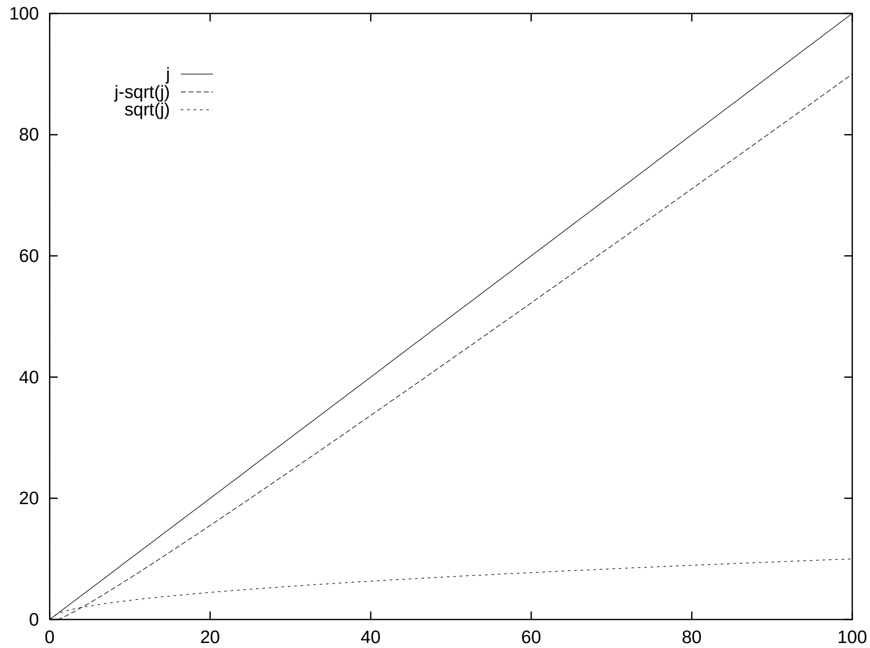

Figure 6: Numéros d'itération et retards dans le cas de la figure 5

II.5 Application aux problèmes de flot dans les réseaux

$G = (N, A)$ est un **graphe orienté connexe** ;

N est l'**ensemble** des **sommets** ;

$A \subset N \times N$ est l'**ensemble** des **arcs** ;

$c_{il} : R \to (-\infty, +\infty]$ est la **fonction coût** de l'arc $(i, l) \in A$,

c_{il} est une fonction du **flot** f_{il} de l'arc (i, l) ;

b_i est la **production** ou la **consommation de produit** au sommet $i \in N$,

$$\sum_{i \in N} b_i = 0. \tag{2.4}$$

II.5.1 Problème d'Optimisation

$$(2.5) \qquad min \sum_{(i,l)\in A} c_{il}(f_{il}),$$
$$\text{sous} \sum_{(i,l)\in A} f_{il} - \sum_{(m,i)\in A} f_{mi} = b_i, \forall i \in N.$$

Le problème admet une **solution admissible** ;

c_{il} is **strictement convexe** ;

c_{il} is **semi-continue inférieurement** ;

La **fonction convexe conjuguée** de c_{il} :

$$c^*_{il}(t_{il}) = \sup_{f_{il}}\{t_{il}.f_{il} - c_{il}(f_{il})\},$$

est à **valeur réelle.**

$\Rightarrow$ Le problème (2.5) possède une **solution optimale unique**.

II.5.2 Problème Dual

$$\min_{x \in R^n} q(x). \tag{2.6}$$

Fonction Duale:

$$q(x) = \sum_{(i,l) \in A} c^*_{il}(x_i - x_l) - \sum_{i \in N} b_i . x_i, \tag{2.7}$$

x_i, est un **multiplicateur de Lagrange**.

Admissibilité Régulière.

$\Rightarrow$ Le problème (2.6) possède une **solution optimale** (non unique).

II.5.3 Problème Dual Réduit

Le **prix** d'un sommet est **contraint**.

$$X = \{x \in R^n | x_d = 0\}.$$

(2.8) $$min_{x \in X} q(x).$$

Ensemble des solutions optimales réduit X^* : **non vide, compact**.

$\Rightarrow$ X^* possède une **solution minimale** $\underline{x}$, et **une solution maximale** $\overline{x}$.

Vecteur gradient

$$g_i(x) = \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = \sum_{(i,l) \in A} \nabla c^*_{il}(x_i - x_l) - \sum_{(m,i) \in A} \nabla c^*_{mi}(x_m - x_i) - b_i, i \in N.$$

$g_i(x)$: fonction **continue monotone non décroissante** de x_i.

II.5.4 Application de Relaxation

Bien adaptée à la résolution de cette classe de problèmes.

Application **multivoque** F :

$$F_i(x) = \{\hat{x}_i | g_i(\hat{x}_i; x) = 0\}, \forall i.$$

$F_i(x)$ sont des intervalles **non vides** et **compacts**.

Les applications de relaxation **minimale** et **maximale** $\underline{F}$, $\overline{F}$ sont **bien définies** sur X.

$$\underline{F}_i(x) = \min_{\hat{x}_i \in F_i(x)} \hat{x}_i \text{ et } \overline{F}_i(x) = \max_{\hat{x}_i \in F_i(x)} \hat{x}_i, i \in N - \{d\}.$$

$\underline{F}$ et $\overline{F}$ sont **continues** et **monotones croissantes** sur X.

Convergence monotone des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à $\underline{F}$ et $\overline{F}$ vers $\underline{x}$ et $\overline{x}$ à partir de $x(0) \leq \underline{x}$ et $x(0) \geq \overline{x}$.

$$x(0) \leq x(1) \leq ... \leq x(j) \leq x(j+1) \leq ... \leq \underline{x}.$$

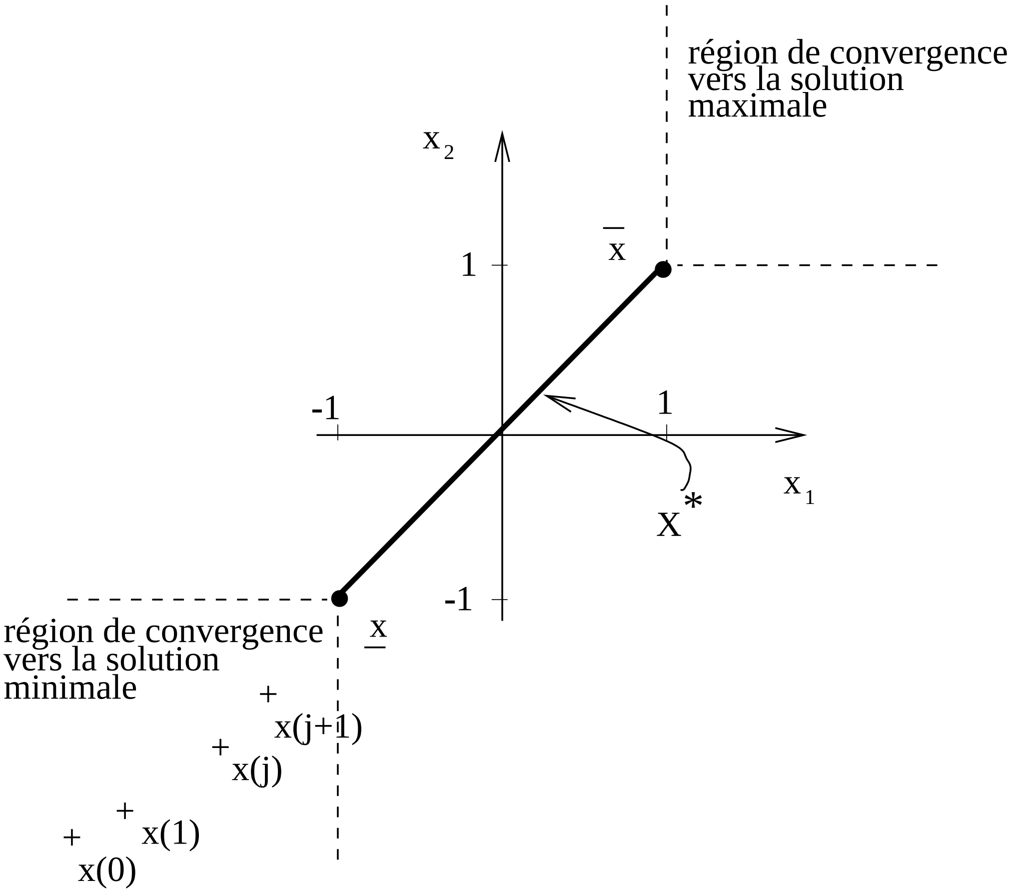

Figure 7: Régions de convergence

Continue Différentiabilité de c_{il}

$\Rightarrow c^*_{il}$ **strictement convexe**,

$\Rightarrow X^*$ possède une solution **unique** : x^*,

$\Rightarrow F$ **univoque**.

Convergence des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à F vers x^*, $\forall x(0) \in X$.

Système d'équations :

$$g_i(x) = \sum_{(i,l)\in A} \nabla c^*_{il}(x_i - x_l) - \sum_{(m,i)\in A} \nabla c^*_{mi}(x_m - x_i) - b_i = 0, i \in N - \{d\}.$$

L'application g peut être caractérisée en terme de **M-fonction**.

Convergence des Méthodes de Gradient Asynchrones

Application de Gradient

$$F'_i(x) = x_i - \frac{1}{\alpha} g_i(x), \forall i \in N - \{d\},$$

$0 = arg\ min_{f_{il}} c_{il}(f_{il})$

Destination unique : d.

$\Rightarrow$ L'**intersection** de X^* et de l'orthant non négatif est un **polyèdre convexe** qui possède un élément **minimal :** $\underline{x}'$.

$\Rightarrow g_i(x(0)) = -b_i \leq 0, \forall i \in N - \{d\}$, pour $x_i(0) = 0, \forall i \in N$.

forte convexité de c_{il} de module $\frac{1}{\beta}$;

$\Rightarrow F'$ est **monotone croissante et continue** sur X pour $\alpha = \beta . \max_{i \in N} a_i$.

Convergence monotone des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à F' vers $\underline{x}'$ à partir de $x(0)$.

II.6 Extension aux Systèmes d'Equations Non Linéaires

$$\mathcal{A}(x^*) = z,\ x^*, z \in R^n. \tag{2.9}$$

$\mathcal{A}$ continue, diagonale monotone croissante, et hors diagonale monotone décroissante.

$\exists x(0), y(0) \in R^n \mid \mathcal{A}(x(0)) \leq z \leq \mathcal{A}(y(0))$.

Application **multivoque** F :

$$F_i(x) = \{\hat{x}_i | \mathcal{A}_i(\hat{x}_i; x) = z_i\}, \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Applications de relaxation **minimale** et **maximale** $\underline{F}$, $\overline{F}$,

$$\underline{F}_i(x) = \min_{\hat{x}_i \in F_i(x)} \hat{x}_i \text{ et } \overline{F}_i(x) = \max_{\hat{x}_i \in F_i(x)} \hat{x}_i, i \in \{1, ..., n\}.$$

$\underline{F}, \overline{F}$ **bien définies** et **monotones croissantes** sur $< x(0), y(0) >$

Continuité de $\underline{F}$ et $\overline{F}$.

$\Rightarrow$ **Convergence monotone** des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à $\underline{F}$ et $\overline{F}$ à partir de $x(0)$ et $y(0)$.

$\mathcal{A}$ **Diagonale Monotone Strictement Croissante**

F **univoque, continue,** et **monotone croissante.**

$\Rightarrow$ **Convergence monotone** des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à F à partir de $x(0)$ et $y(0)$.

$\mathcal{A}$ **M-fonction surjective**

F **univoque, continue,** et **monotone croissante.**

$\Rightarrow$ solution **unique :** x^*.

$\Rightarrow$ **Convergence** vers x^* des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à F, $\forall x(0)$.

$\mathcal{A}$ **Diagonale Monotone Croissante**

$\mathcal{A}$ **continue au sens de Lipschitz.**

Richardson :

$$F'(x) = x - \frac{1}{\alpha}\mathcal{A}(x), \forall x \in R^n,$$

$\Rightarrow F'$ **continue** et **monotone croissante** sur $< x(0), y(0) >$.

$\Rightarrow$ **Convergence monotone** des itérations asynchrones $\{x(j)\}$ associées à F' à partir de $x(0)$ et $y(0)$.

Application : Résolution de systèmes Markoviens.

II.7 Terminaison

Problème complexe dans le **cas général.**

architectures de type **passage de message,**

pas d'horloge globale, informations locales,

délais de communication importants.

Mathématiques Appliquées et **Informatique,**

Méthode de Bertsekas et Tsitsiklis

Une donnée communiquée est correctement reçue avec un **retard fini non spécifié.**

Décomposition du problème en deux parties :

l'algorithme itératif asynchrone est modifié de telle sorte qu'il se **termine en temps fini,**

une **procédure de détection de la terminaison** est appliquée.

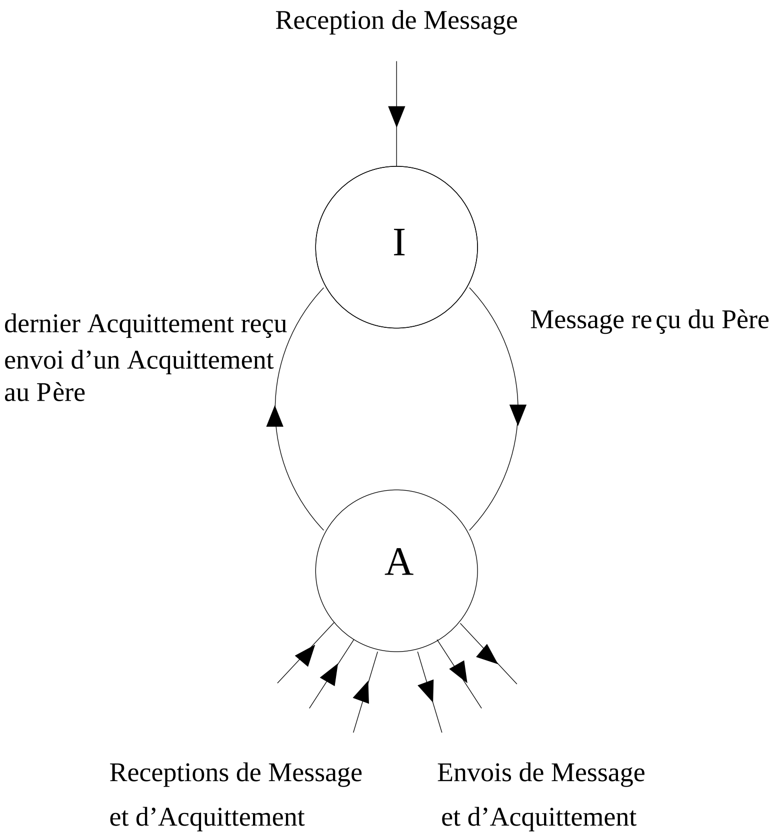

Figure 8: Modèle d'un processeur

Graphe d'Activité

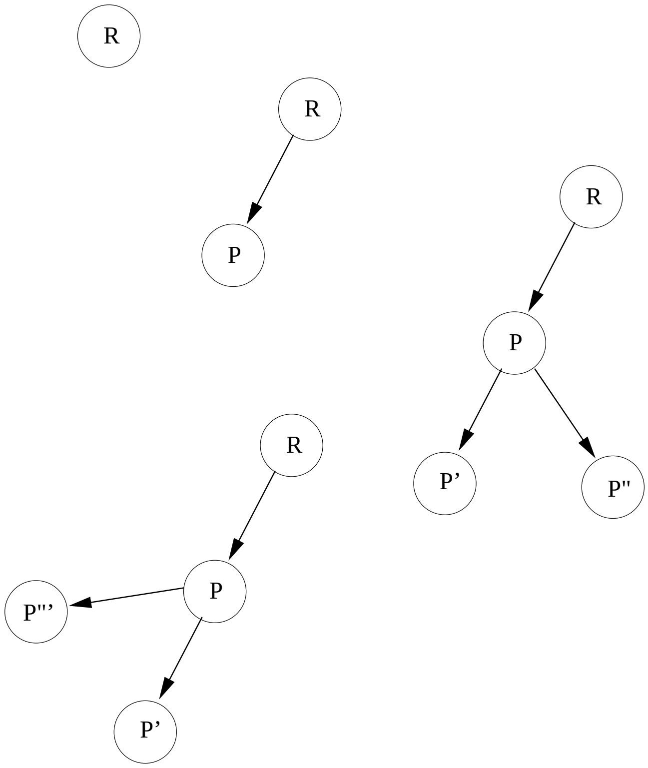

Figure 9: Evolution du graphe d'activité

Convergence des itérations asynchrones $\{x(j)\}$

$\neq>$ Convergence des itérations asynchrones modifiées.

Méthodes de Terminaison Etudiées

Objectif : limiter le nombre de communications, ne pas trop restreindre la portée des résultats de convergence.

Variante de la Méthode de Bertsekas et Tsitsiklis :

- **sans acquittement de tous les messages,**
- **systèmes Markoviens.**

Méthode basée sur les ensembles de niveau :

- **compteur de sous-ensembles,**
- **P-contractions.**

Analyse du problème et **recherche** d'une variable contenant une information sur l'**état global du système :**

- **résidu à la destination,**
- **problèmes de flot dans les réseaux.**

II.8 Mise en œuvre

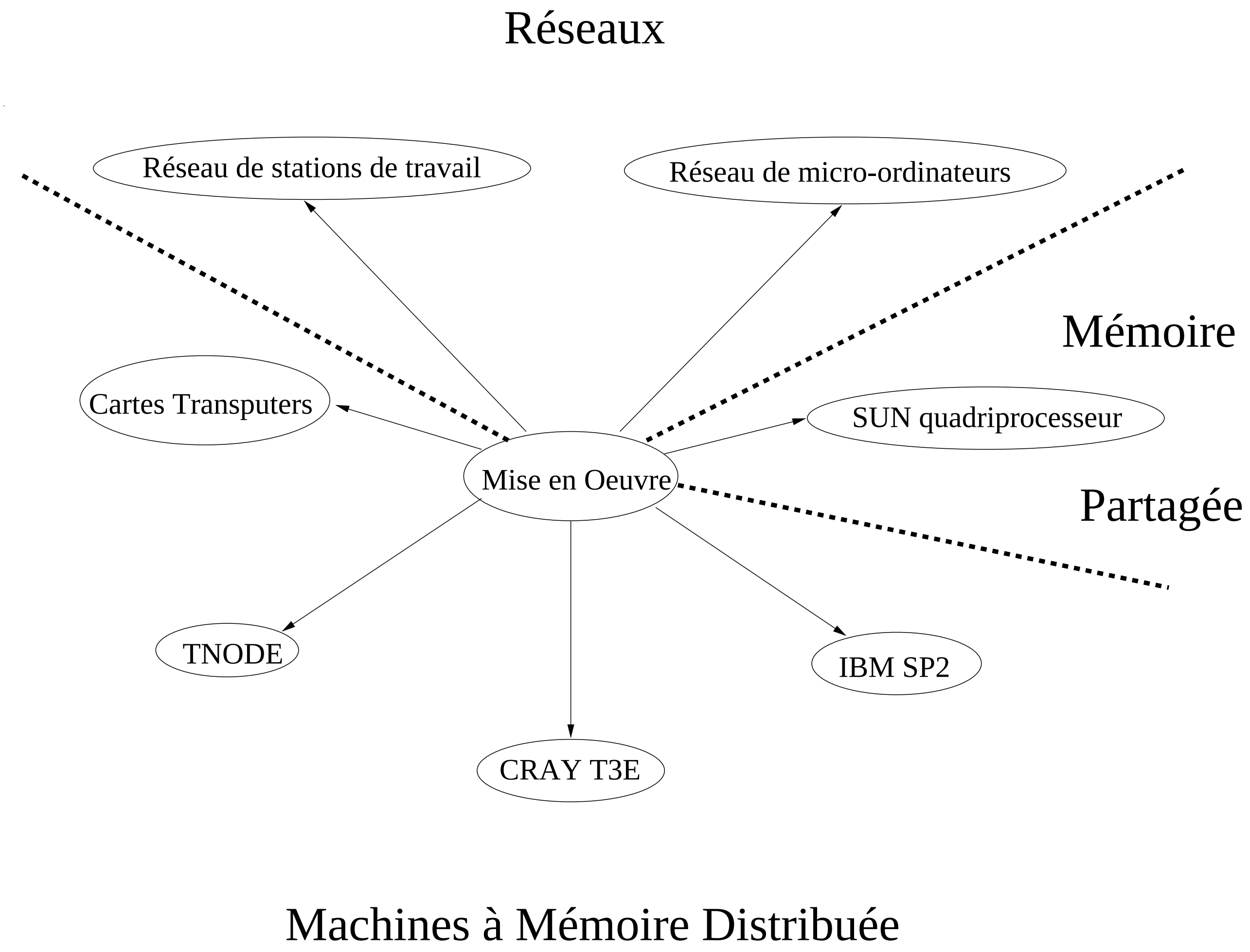

Figure 10: Mise en œuvre

Remarques

Architectures à mémoire distribuée :

communications asynchrones,

bibliothèque **SHMEM** de CRAY.

Architectures à mémoire partagée :

machine **SMP, processus légers,**

sections critiques, surcoût des mises en œuvre synchrones.

Réseaux :

temps de latence, bande passante, et environnement.

Importance des environnements de travail afin d'accéder aux valeurs les plus récentes.

II.9 Etude de performance

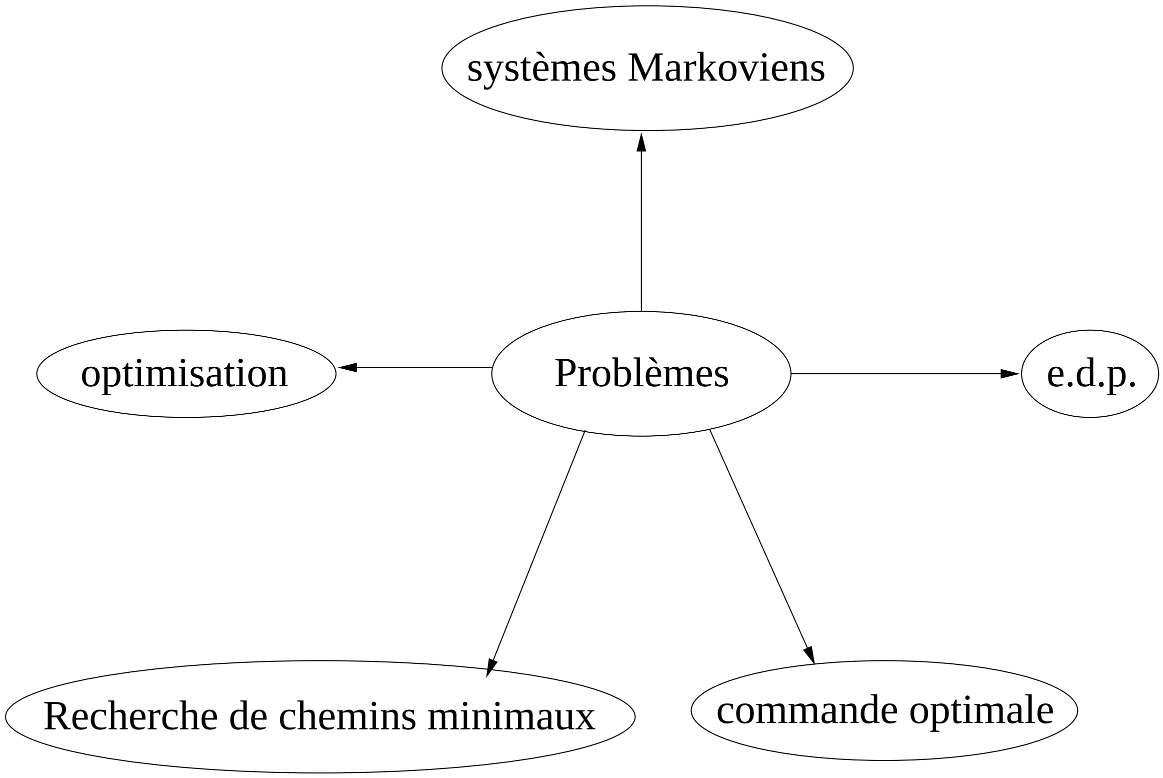

Figure 11: Problèmes traités

Commentaires

Importance de la **granularité.**

Granularité faible $\Rightarrow$ peu d'intérêt des schémas sans synchronisation,

granularité moyenne ou grande $\Rightarrow$ intérêt d'enlever les synchronisations.

Efficacité des schémas décroit lorsque la granularité diminue.

Equilibre ou déséquilibre des charges de calcul.

Déséquilibre :

$\Rightarrow$ faible efficacité des schémas synchrones,

$\Rightarrow$ bon comportement des schémas sans synchronisation,

$\Rightarrow$ efficacité des schémas synchrones décroit plus vite lorsque la granularité diminue.

III Itérations Asynchrones avec Communication Flexible

Système d'équations :

$$\mathcal{A}(x^*) = 0. \tag{3.1}$$

$\mathcal{A}$ est une M-**fonction continue surjective** de R^n dans R^n.

$\Rightarrow$ (3.1) a une **solution unique.**

III.1 Décomposition en Sous-problèmes

Soit $E = R^n$ et $\alpha \leq n$ un entier positif.

Décomposition :

$$E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i,\ \ E_i = R^{n_i},\ \text{ et } \sum_{i=1}^{\alpha} n_i = n.$$

E_i est muni de l' **ordre partiel naturel.**

Soit $x \in E$, **bloc-décomposition** de x et $\mathcal{A}$:

$$x = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_\alpha\} \in \prod_{i=1}^{\alpha} E_i,$$

$$\mathcal{A}(x) = \{\mathcal{A}_1(x), \ldots, \mathcal{A}_i(x), \ldots, \mathcal{A}_\alpha(x)\} \in \prod_{i=1}^{\alpha} E_i.$$

Notation :

$$\mathcal{A}_i(z_i\,;\,x) = \mathcal{A}_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_\alpha).$$

III.2 Application de Point Fixe Associée

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ et $x \in E$, l'application : $w_i \to \mathcal{A}_i(w_i, x)$, est une M**-fonction continue, surjective** de E_i dans E_i.

$\Rightarrow$ le sous-système : $\mathcal{A}_i(z_i\,;\,x) = 0$, a une **solution unique** : z_i.

$\Rightarrow$ L'application : F de E dans E, telle que

$$F(x) = z = \{z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_\alpha\}, \tag{3.2}$$

est bien définie et monotone croissante sur E.

Formulation de type point fixe du problème (3.1) :

$$F(x^*) = x^* \Leftrightarrow \mathcal{A}(x^*) = 0. \tag{3.3}$$

III.3 sur applications et $\mathcal{A}$-sur applications (Miellou 86)

Applications de point fixe associées à la **résolution approchée** des sous-systèmes :

$$\mathcal{A}_i(z_i\,;\,x) = 0.$$

L'application $\hat{F}$ est une **sur application** associée à F si $\forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ et $x \in E \mid \mathcal{A}_i(x) \geq 0$, on a :

$$(3.4) \qquad \hat{F}_i(x) \in \langle F_i(x), x_i\rangle_i \text{ et } \hat{F}_i(x) \neq x_i \text{ si } F_i(x) \neq x_i.$$

où $\langle y_i, x_i\rangle_i = \{w_i \in E_i \mid y_i \leq w_i \leq x_i\}$.

L'application $\hat{F}$ est une **$\mathcal{A}$-sur application** associée à F si $\forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ et $x \in E \mid \mathcal{A}_i(x) \geq 0$, on a :

$$(3.5) \quad \hat{F}_i(x) \leq x_i,\ \mathcal{A}_i(\hat{F}_i(x), x) \geq 0,\ \text{et } \hat{F}_i(x) \neq x_i \text{ si } F_i(x) \neq x_i.$$

$\hat{F}$ est une **$\mathcal{A}$-sur application** $\Rightarrow$ $\hat{F}$ est une **sur application**.

$\mathcal{A}$-sur applications du premier et second type

$\hat{F}$ est une $\mathcal{A}$-sur application du **premier type** associée à F si **il existe** une $\mathcal{A}$-sur application $\hat{F}'$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ et $x \in E \mid \mathcal{A}_i(x) \geq 0$, on a :

$$\hat{F}'_i(x) \in \langle \hat{F}_i(x), x_i \rangle_i,$$

$$x(j) \downarrow x^*, j \to \infty \Rightarrow \hat{F}'_i(x(j)) \downarrow \hat{F}'_i(x^*), j \to \infty,$$

où la notation $x(j) \downarrow x^*, j \to \infty$ signifie :

$$x^* \leq \cdots \leq x(j+1) \leq x(j) \leq \cdots \leq x(0) \text{ et } \lim_{j\to\infty} x(j) = x^*.$$

$\hat{F}$ est une $\mathcal{A}$-sur application du **second type** associée à F si $\forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ et $x \in E \mid \mathcal{A}_i(x) \geq 0$, **il existe** $\delta > 0$ tel que

$$\|x_i - \hat{F}_i(x)\|_i \geq \delta \|x_i - F_i(x)\|_i,$$

où $\|.\|_i$ est une norme définie sur E_i.

III.4 Modèle

Définition 2 : une **itération asynchrone avec communication flexible** relative à une $\mathcal{A}$-sur application $\hat{F}$ associée à F sur $\Pi_{i=1}^{\alpha} R^{ni}$ et à $x(0)$ satisfaisant :

$$\mathcal{A}(x(0)) \geq 0,$$

est une **suite** $\{x(j)\}$, $j = 0, 1, ...,$ **de vecteurs** de $\Pi_{i=1}^{\alpha} R^{ni}$ telle que pour $i = 1, ..., \alpha$:

$$\begin{cases} x_i(j) = \hat{F}_i(\tilde{x}(j)), \text{ si } \{i\} = S(j), \\ x_i(j) = x_i(j-1), \text{ si } \{i\} \neq S(j), \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\mathcal{S} = \{S(j) | j = 1, 2, ...\}$ est une **suite de singletons** de $\{1, ..., \alpha\}$,

(a) i apparaît un nombre infini de fois dans $\mathcal{S}$; $i = 1, ..., \alpha$

$$\tilde{x}_l(j) \in \langle x_l(j-1), \max\{x_l(I_l(j)), \tilde{x}_l(q)\}\rangle_l, \; l = 1, ..., \alpha,$$

$q = \max_{k \in K_{s(j)}(j)} k$, où $K_i(j) = \{k \in N \mid S(k) = \{i\}, 0 \leq k < j\}$,

$\mathcal{I} = \{(I_1(j), ..., I_\alpha(j)) | j = 1, 2, ...\}$ et pour $i = 1, ..., \alpha$:

(b) $0 \leq I_i(j) \leq j - 1, j = 1, 2, ...$

(c) $I_i(j) = j - 1$, si $\{i\} = S(j)$;

(d) $I_i(j)$ tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini.

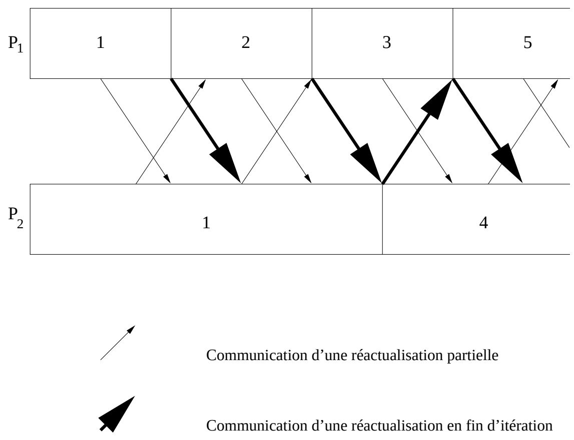

Figure 12: Itérations asynchrones avec communication flexible, cas d'une politique fixée

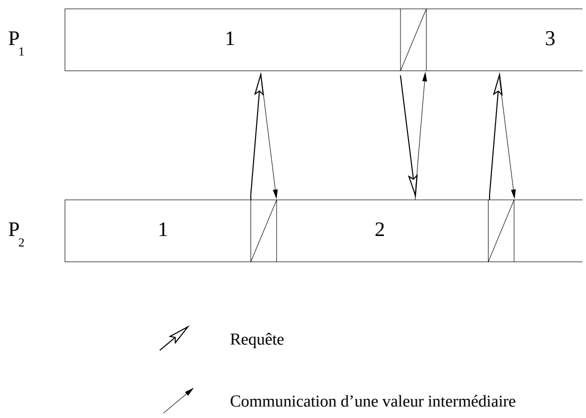

Figure 13: Itérations asynchrones avec communication flexible, mise en œuvre avec des requêtes

Utilisation d'**itérés partiels : valeur courante des composantes** provenant de calculs en cours et qui **ne sont pas étiquetées.**

Les valeurs des composantes d'un bloc sous-vecteur échangées peuvent être relatives à **differents numéros d'itération.**

Meilleur couplage entre **communication** et **calcul**
$\Rightarrow$ **convergence plus rapide.**

Formalisme des **méthodes par bloc** et **grande liberté en matière d'échanges de données.**

III.5 Convergence des Itérations Asynchrones avec Communication Flexible

Convergence monotone des itérations asynchrones avec communication flexible $\{x(j)\}$ vers x^* à partir de $x(0)$.

$$x^* \leq ... \leq x(j+1) \leq x(j) \leq ... \leq x(1) \leq x(0).$$

III.6 Applications

III.6.1 Problèmes aux Limites

Résolution Numérique d'un Problème de Diffusion non Linéaire

Trouver u tel que

$$(3.7) \qquad \begin{cases} -\Delta u + a\, \frac{\partial u}{\partial v} + b\, \frac{\partial u}{\partial w} + e^{cu} = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u \mid \partial\Omega = 0, \end{cases}$$

où Ω est un domaine ouvert de R^2 ou R^3, $\partial\Omega$ est la frontière de Ω,

a, b, c sont des réels, c est positif.

Discrétisation :

différences finies, schéma à cinq points pour l'opérateur de Laplace,

schéma décentré en avant ou en arrière en fonction du signe de a ou b pour les dérivées partielles de u.

$$(3.8) \qquad \sum_{l=1}^{\alpha} A_{il} x_l^* + \varphi_i(x_i^*) = b_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\},$$

où $x_i^*, b_i \in R^{n_i}$, avec $\Sigma_{i=1}^{\alpha}\, n_i = n$,

$\varphi_i(x_i)$ est monotone croissante, convexe, et continûment differentiable,

A est une **M-matrice** par bloc.

Lien avec la Méthode Alternée de Schwarz

Considérons le problème pseudolinéaire :

$$\mathcal{A}(x^*) = Ax^* - b + \varphi(x^*) = 0, \tag{3.9}$$

A est une M-**matrice,**

φ une application **diagonale, monotone croissante, continue.**

Méthodes de sous-domaines : méthode alternée de Schwarz

Le processus d'**extension** de **Schwarz** transforme la matrice A en $\widetilde{A}$ qui est aussi une M-**matrice.**

Système étendu :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}^*) = 0. \tag{3.10}$$

L'application $\tilde{\mathcal{A}}$ est une M-**fonction** continue surjective.

$\mathcal{A}$-sur application

Méthode de Newton $\Rightarrow$ matrice bloc-diagonale $C(x)$,

$$C_i(x_i) = A_{ii} + \varphi_i'(x_i).$$

A_{ii} une **M-matrice** et φ_i **convexe** $\Rightarrow$ $C_i(x_i)$ est une **M-matrice.**

Soit $\hat{F}$ l'application de composantes $\hat{F}_i$ définies par :

$$\hat{F}_i(x) = x_i^q, \ \forall i \in \{1, \ldots, \alpha\}, \tag{3.11}$$

où q est un entier positif, $x_i^0 = x_i$,

x_i^q est le q-ème iteré produit par l'algorithme :

$$x_i^q = x_i^{q-1} - C_i^{-1}(x_i^{\rho'(q-1)}).\, \mathcal{A}_i(x_i^{q-1}; x), q = 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

où $0 \leq \rho'(q-1) \leq q-1$.

$\Rightarrow$ $\hat{F}$ est une **$\mathcal{A}$-sur application du premier type** associée à F.

Résultats Expérimentaux

Multiprocesseur à mémoire partagée IBM 3090.

Méthode alternée de Schwarz avec recouvrement.

Efficacité: $e = \frac{t_1}{t_p} \cdot \frac{1}{p}$.

Domaine discretisé, 25000 points.

processeurs	sous-domaines	itérations	temps	efficacité
2	4	80	30.42	0.91
3	6	138	18.96	0.87
4	8	224	15.86	0.78
5	10	340	13.75	0.78
6	12	492	14.70	0.65

Table 1: Itérations synchrones

processeurs	sous-domaines	itérations	temps	efficacité
2	4	78	27.60	1.0
3	6	133	16.64	0.99
4	8	209	12.89	0.97
5	10	343	12.07	0.89
6	12	506	11.81	0.81

Table 2: Itérations asynchrones avec communication flexible

Autres Problèmes

Hamilton-Jacobi-Bellman, obstacle,

méthode de Howard-Mosco-Scarpini.

Problème pseudolinéaire :

$$\mathcal{A}(x^*) = Ax^* + \varphi(x^*) = 0, \tag{3.13}$$

A est une M**-matrice,**
φ une application **diagonale, monotone croissante, continue.**

Décompositions régulières de la matrice A :

$$A = M^l - N^l, \quad l = 1, ..., m,$$

où $(M^l)^{-1} \geq 0$ and $N^l \geq 0$.

Applications de point fixe $F^l : R^n \rightarrow R^n,\ l = 1, ..., m$

$$F^l(x) = z \mid M^l(z) = N^l(x) - \varphi(x). \tag{3.14}$$

Multidécomposition formelle :

$$x^* - F^l(x^*) = 0,\ l = 1, ..., m.$$

Système **étendu** $\Rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ est une M**-fonction.**

III.6.2 problèmes de flot dans les réseaux

Fortes non linéarités $\Rightarrow$ méthodes de relaxation approchées, recherche unidirectionnelle inexacte.

Opérateur de base : application de **gradient** F'.

Application de relaxation approchée $\check{F} : X \subset R^{n-1} \to R^{n-1}$,

$$\check{F}_i(x) = x_i^{q'},\ \forall i \in N - \{d\},\ \forall x \in X,$$

$$x_i^q = F_i'(x_i^{q-1}; x), q = 1, ..., q', x_i^0 = x_i.$$

q' fixé a priori ou variable ;

q' **premier** entier positif tel que $\left| g_i(x_i^{q'}; x) \right| \leq \epsilon$.

$\check{F}$ est une **sous-application du premier type** associée à l'application de relaxation minimale $\underline{F}$ sur $\{x \in X \mid x \leq \underline{x}\}$.

$\check{F}$ est une **sur application du premier type** associée à l'application de relaxation maximale $\overline{F}$ sur $\{x \in X \mid x \geq \overline{x}\}$.

La méthode de relaxation approchée **se prête bien** à une mise en œuvre **asynchrone avec communication flexible.**

Convergence monotone des **itérations asynchrones avec communication flexible** $\{x(j)\}$ associées à $\check{F}$ vers $\underline{x}$ et $\overline{x}$ à partir de $x(0) \leq \underline{x}$ et $x(0) \geq \overline{x}$.

Résultats Expérimentaux

Multiprocesseur à mémoire distribuée Cray T3E :

256 processeurs, IDRIS.

Bibliothèques SHMEM et MPI.

Problème de flot de dimension 96, sommets de degré élevé.

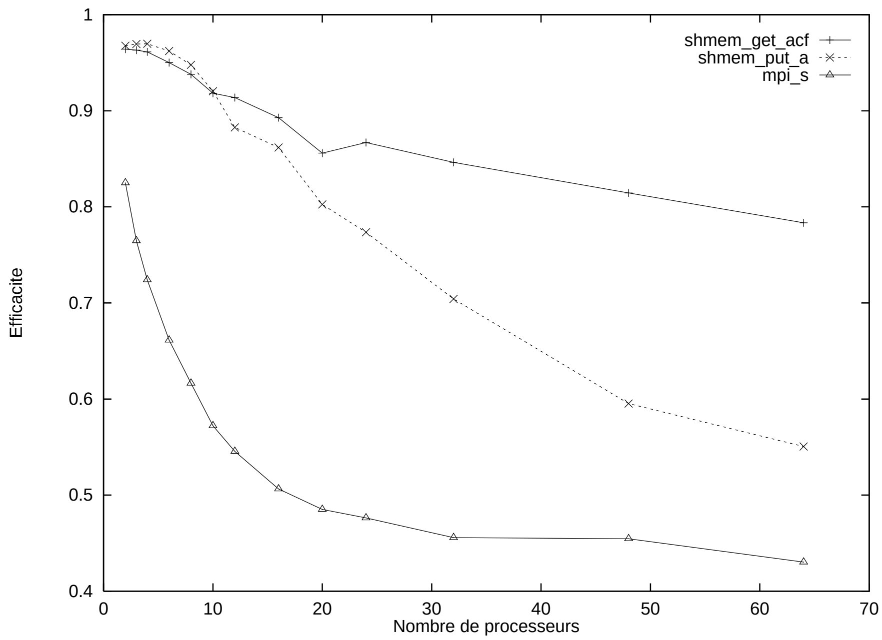

Figure 14: Efficacité des mises en œuvre parallèles de l'algorithme de relaxation approchée

Sparc 20 SMP

Multiprocesseur à mémoire partagée.

Bibliothèque de processus légers.

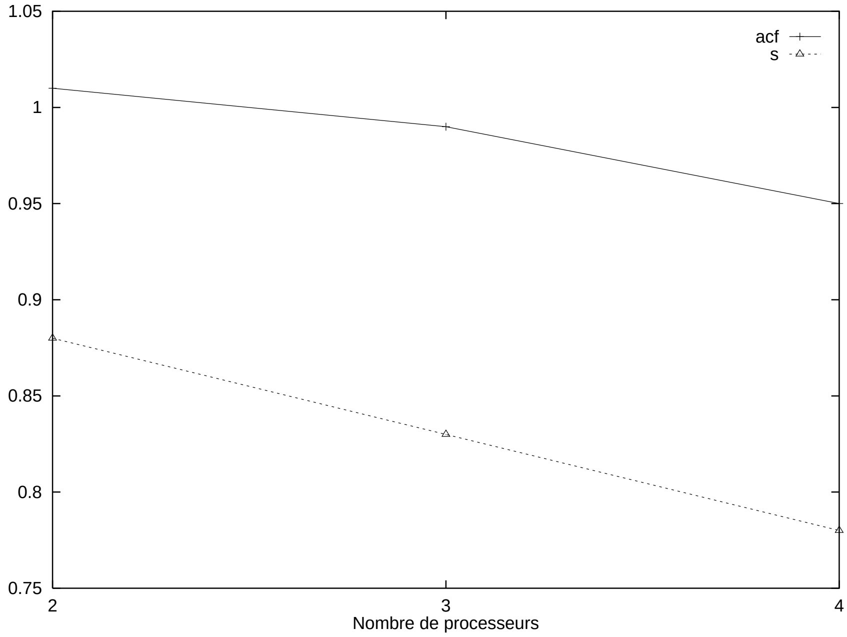

Figure 15: Efficacité des mises en œuvre parallèles de l'algorithme de relaxation approchée

IV Conclusion

IV.1 Résumé

Etude de l'asynchronisme, plan théorique et pratique :

modélisation, étude de la convergence, et de la terminaison ;

application à des problèmes très variés :

optimisation, commande optimale, systèmes Markoviens, et e.d.p. ;

mise en œuvre sur divers types d'architecture parallèle :

Cray T3E, IBM SP2, Tnode, Sun Sparc 20 SMP, IBM 3090, et réseaux de stations de travail.

Etude de performance.

IV.2. Résultats

revues internationales	9
revues nationales	3
ouvrages	3
conférences internationales	17

Table 3: Publications

revues	nombre d'articles
SIAM	2
Mathematics Of Computation	1
Parallel Computing	2
Computational Optimization and Applications	1
Journal of Parallel and Distributed Computing	1
Parallel Algorithms and Applications	1
R.A.I.R.O. A.P.I.I.	1
Calculateurs Parallèles	3

Table 4: Noms des revues, nombre d'articles publiés et années

conférences	nombre d'articles	années
IEEE CDC	3	1989, 1992, 1994
ECC	1	1991
ParCo	3	1991, 1993, 1997
HPCN	1	1995
ISCA PDCS	1	1996
ESA	1	1986

Table 5: Noms des principales conférences, nombre d'articles publiés et années

Thèses de Doctorat	2	1991, 1998
D.E.A.	2	1992, 1997

Table 6: Encadrements

Européen (Stimulation)	1	1990
Inter PRC (Stratagème)	1	1994
C3 (CAPA)	1	1993
ATP	2	1983, 1986
CNES	1	1984

Table 7: Travaux sur contrats

Comité de Rédaction	1	Calculateurs Parallèles
Comité de Programme	2	CompEuro 1991, JNB97
Referee : revues	6	IEEE TPDS, Math. Prog. J.P.D.C...
Referee : conférences	6	ParCo93, Irregular95, 12th IFAC W. C....

Table 8: Responsabilités

Cours (compl. de formation)	Syst. lin. syst. echant.	INSA Toulouse
Cours (formation doctorale)	Intro. au parallélisme	LAAS-CNRS
T.D. T.P.	Microinformatique	INSA Toulouse

Table 9: Activités d'enseignement

V Perspective

Niveau théorique

Couplage entre les méthodes de multisplitting et les itérations asynchrones avec communication flexible.

Commande optimale.

Terminaison.

Niveau Expérimental

Evaluations quantitatives.

Couplage entre Athapascan et les itérations asynchrones.