

Modèle de couplage stochastique non-biparti

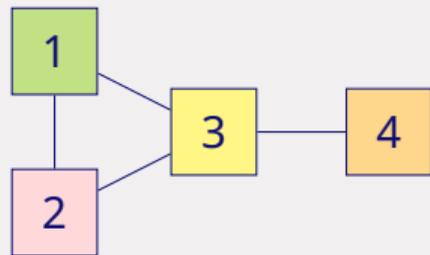
Céline Comte — c.m.comte@tue.nl

Université Technologique d'Eindhoven

Version longue à paraître dans le journal *Stochastic Models*

Modèle de couplage

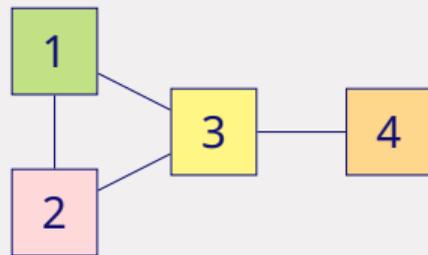
Graphe non-orienté, connexe, sans boucle



Modèle de couplage

Grphe non-orienté, connexe, sans boucle

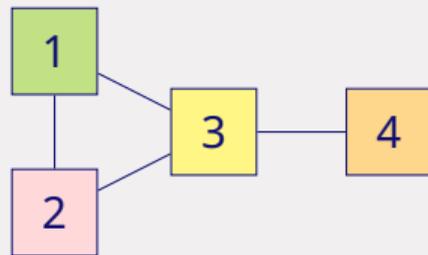
- Sommets \rightarrow éléments



Modèle de couplage

Graphe non-orienté, connexe, sans boucle

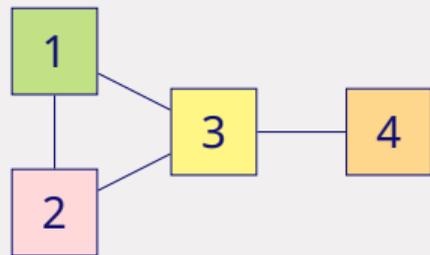
- Sommets \rightarrow éléments
- Arêtes \rightarrow compatibilités



Modèle de couplage **stochastique**

Graphe non-orienté, connexe, sans boucle

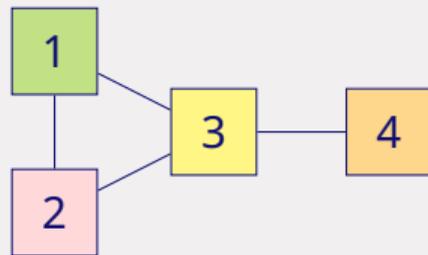
- Sommets \rightarrow éléments
- Arêtes \rightarrow compatibilités



Modèle de couplage **stochastique**

Grphe non-orienté, connexe, sans boucle

- Sommets → **classes** d'éléments
- Arêtes → compatibilités



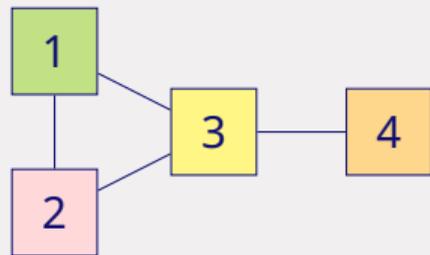
Modèle de couplage **stochastique**

Graphe non-orienté, connexe, sans boucle

- Sommets → **classes** d'éléments
- Arêtes → compatibilités

Les éléments de la **classe** i

- arrivent selon un processus de Poisson d'intensité μ_i
- sont compatibles avec les éléments des classes voisines



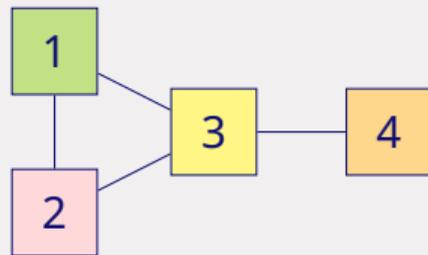
Modèle de couplage **stochastique**

Graphe non-orienté, connexe, sans boucle, **non-biparti**

- Sommets → **classes** d'éléments
- Arêtes → compatibilités

Les éléments de la **classe** i

- arrivent selon un processus de Poisson d'intensité μ_i
- sont compatibles avec les éléments des classes voisines



Modèle de couplage **stochastique**

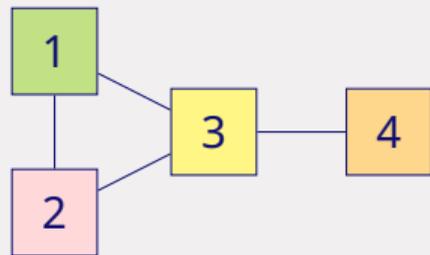
Graphe non-orienté, connexe, sans boucle, **non-biparti**

- Sommets → **classes** d'éléments
- Arêtes → compatibilités

Les éléments de la **classe** i

- arrivent selon un processus de Poisson d'intensité μ_i
- sont compatibles avec les éléments des classes voisines

Applications : liste de dons d'organe, chaîne d'approvisionnement...



Modèle de couplage **stochastique**

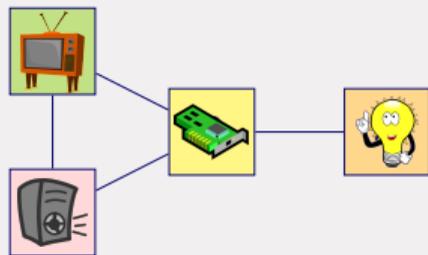
Graphe non-orienté, connexe, sans boucle, **non-biparti**

- Sommets → **classes d'éléments**
- Arêtes → compatibilités

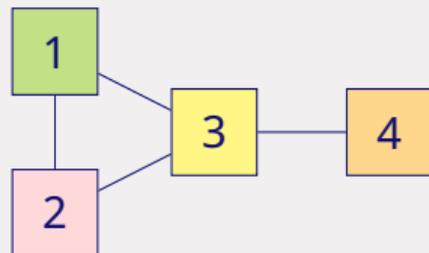
Les éléments de la **classe i**

- arrivent selon un processus de Poisson d'intensité μ_i
- sont compatibles avec les éléments des classes voisines

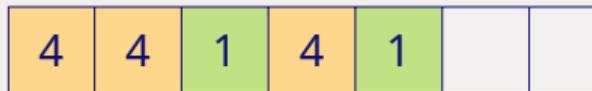
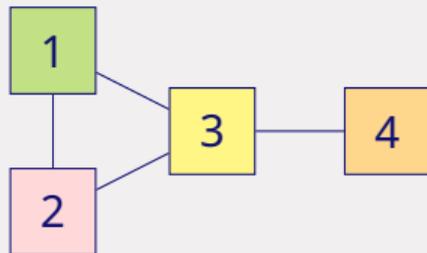
Applications : liste de dons d'organe, chaîne d'approvisionnement...



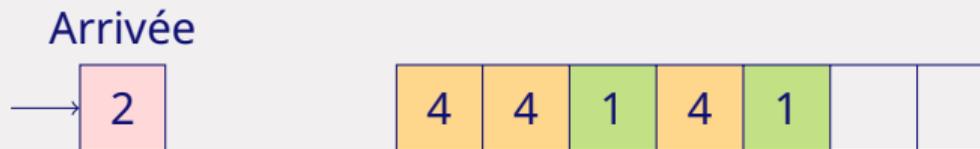
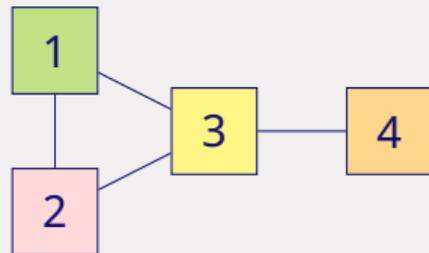
Modèle de couplage stochastique



Modèle de couplage stochastique

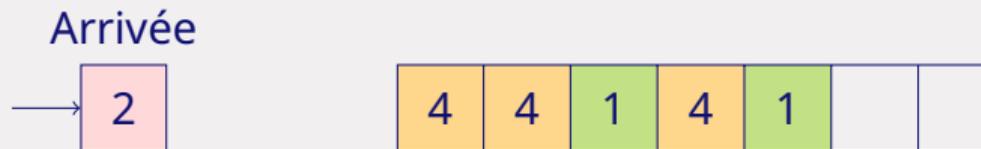
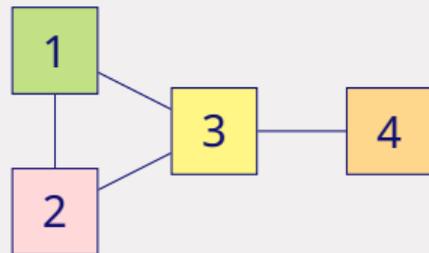


Modèle de couplage stochastique



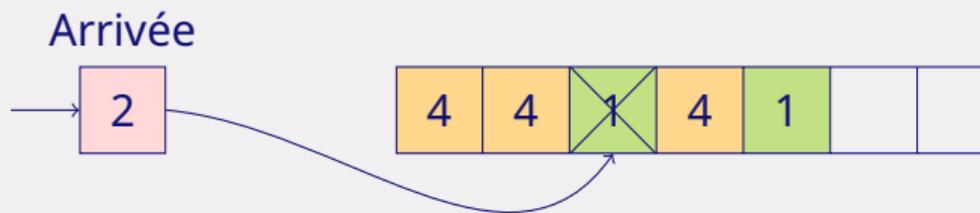
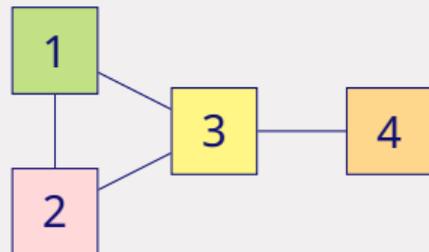
Modèle de couplage stochastique

Politique "premier arrivé, premier couplé"



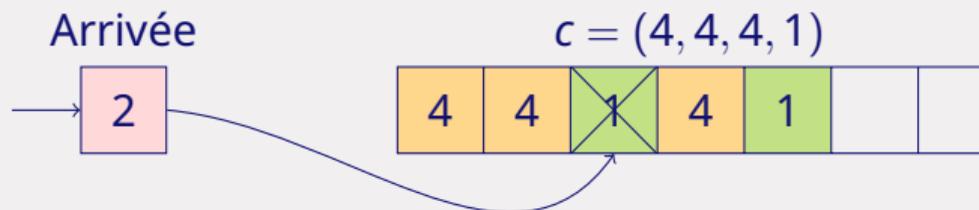
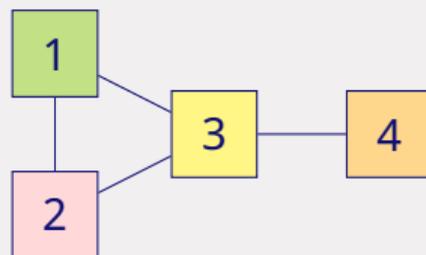
Modèle de couplage stochastique

Politique "premier arrivé, premier couplé"



Modèle de couplage stochastique

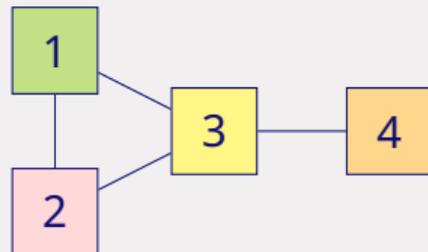
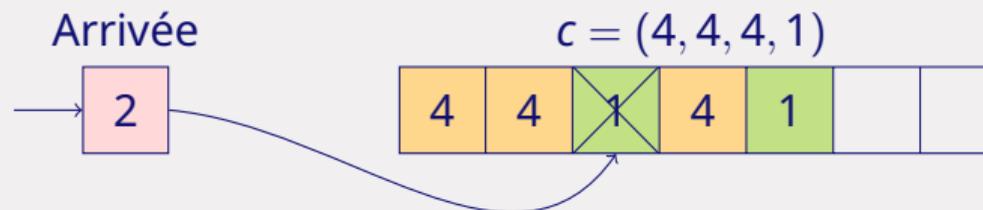
Politique "premier arrivé, premier couplé"



État : séquence des classes d'éléments non couplés

Modèle de couplage stochastique

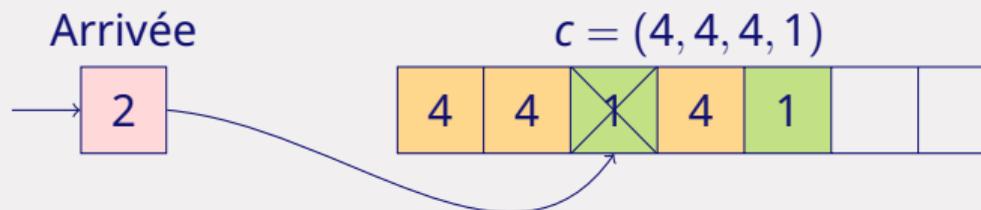
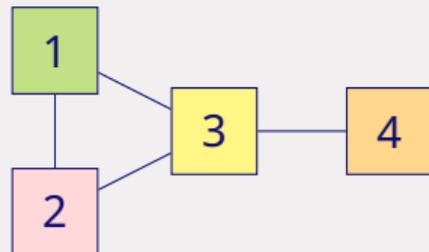
Politique "premier arrivé, premier couplé"



État : séquence des classes d'éléments non couplés → Chaîne de Markov

Modèle de couplage stochastique

Politique "premier arrivé, premier couplé"

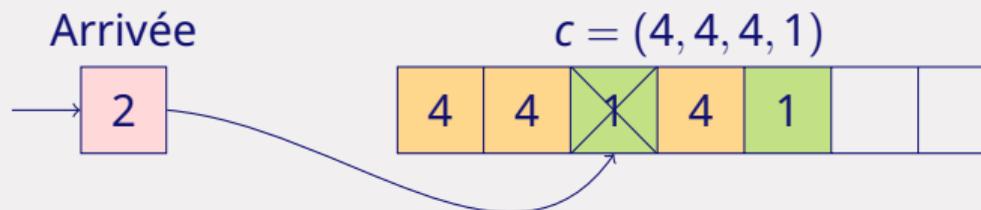
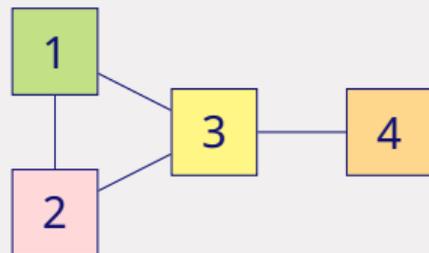


État : séquence des classes d'éléments non couplés → Chaîne de Markov

Ensembles indépendants : $\mathbb{I} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$

Modèle de couplage stochastique

Politique "premier arrivé, premier couplé"

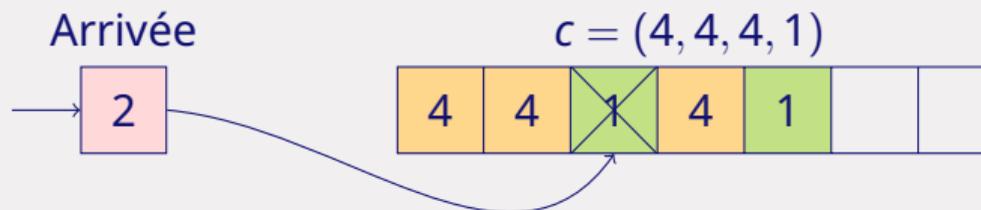
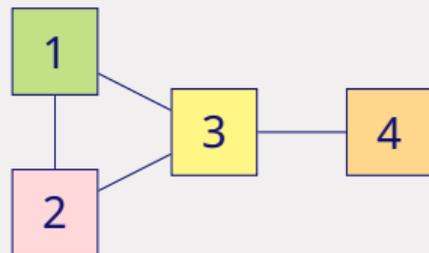


État : séquence des classes d'éléments non couplés → Chaîne de Markov

Ensembles indépendants : $\mathbb{I} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $\mathbb{I}_0 = \mathbb{I} \cup \{\emptyset\}$

Modèle de couplage stochastique

Politique "premier arrivé, premier couplé"



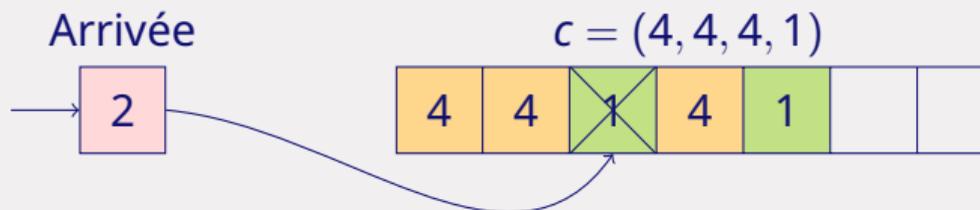
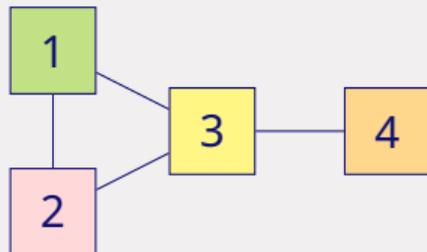
État : séquence des classes d'éléments non couplés \rightarrow Chaîne de Markov

Ensembles indépendants : $\mathbb{I} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $\mathbb{I}_0 = \mathbb{I} \cup \{\emptyset\}$

Taux d'arrivée : $\mu(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \mu_i$ pour chaque ensemble \mathcal{A} de classes

Modèle de couplage stochastique

Politique "premier arrivé, premier couplé"



État : séquence des classes d'éléments non couplés → Chaîne de Markov

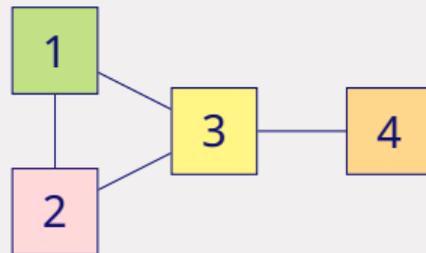
Ensembles indépendants : $\mathbb{I} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $\mathbb{I}_0 = \mathbb{I} \cup \{\emptyset\}$

Taux d'arrivée : $\mu(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \mu_i$ pour chaque ensemble \mathcal{A} de classes

Voisinage : $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in \mathcal{A}} \mathcal{E}_i$ pour chaque ensemble \mathcal{A} de classes

Stabilité et loi stationnaire

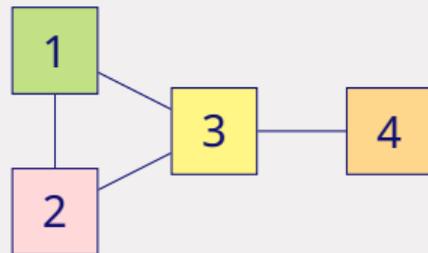
(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)



Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

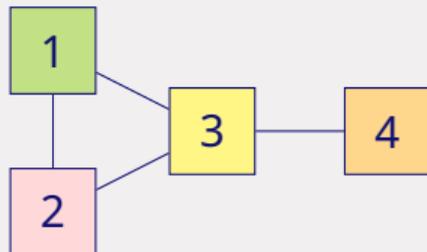


Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} \\ \end{array} \right.$$

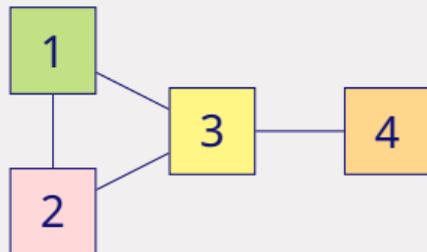


Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

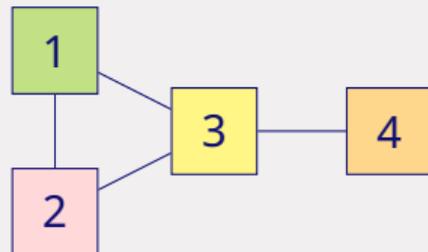
Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} \\ \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} \end{array} \right.$$



Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

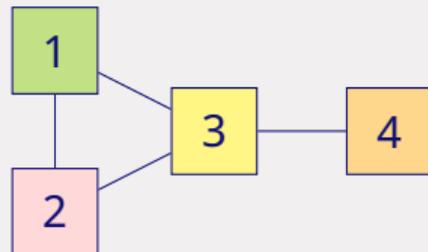


Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} \\ \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} \\ \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \end{array} \right.$$

Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

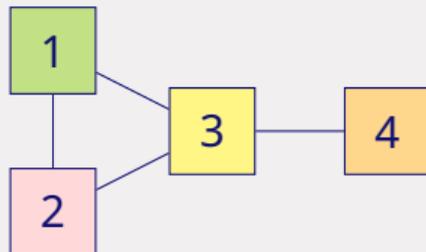


Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\begin{cases} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} & \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \\ \rho(\{4\}) = \frac{\mu_4}{\mu_3} \end{cases}$$

Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

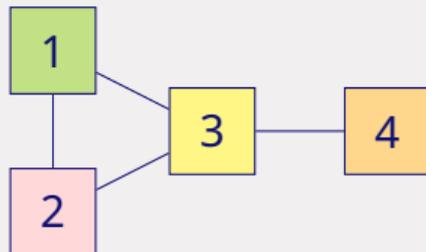


Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\begin{cases} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} & \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \\ \rho(\{4\}) = \frac{\mu_4}{\mu_3} & \rho(\{1, 4\}) = \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3} \end{cases}$$

Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

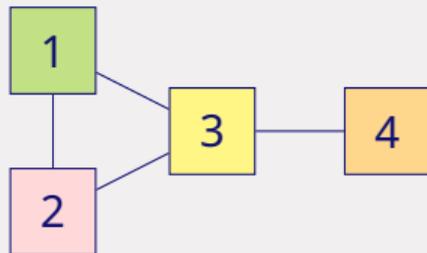


Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\begin{cases} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} & \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \\ \rho(\{4\}) = \frac{\mu_4}{\mu_3} & \rho(\{1, 4\}) = \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2, 4\}) = \frac{\mu_2 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_3} \end{cases}$$

Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)



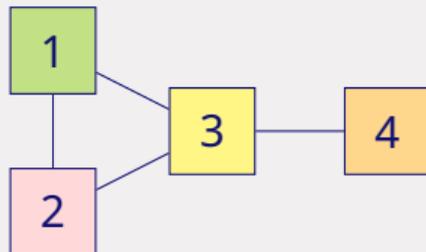
Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\begin{cases} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} & \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \\ \rho(\{4\}) = \frac{\mu_4}{\mu_3} & \rho(\{1, 4\}) = \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2, 4\}) = \frac{\mu_2 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_3} \end{cases}$$

⚠ Le graphe doit être non-biparti !

Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)

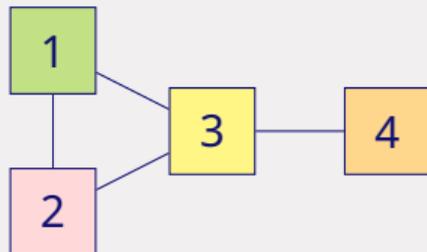


Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\begin{cases} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} & \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \\ \rho(\{4\}) = \frac{\mu_4}{\mu_3} & \rho(\{1, 4\}) = \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2, 4\}) = \frac{\mu_2 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_3} \end{cases}$$

Stabilité et loi stationnaire

(Mairesse et Moyal, 2016), (Moyal, Bušić et Mairesse, 2021)



Stabilité : $\rho(\mathcal{I}) := \frac{\mu(\mathcal{I})}{\mu(\mathcal{E}(\mathcal{I}))} < 1$ pour chaque $\mathcal{I} \in \mathbb{I}$

$$\begin{cases} \rho(\{1\}) = \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2\}) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_3} & \rho(\{3\}) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \\ \rho(\{4\}) = \frac{\mu_4}{\mu_3} & \rho(\{1, 4\}) = \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3} & \rho(\{2, 4\}) = \frac{\mu_2 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_3} \end{cases}$$

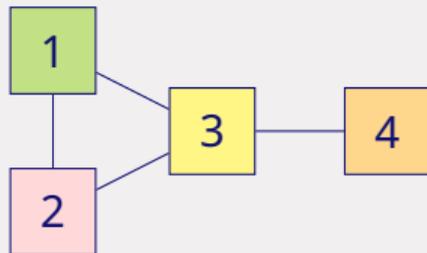
Loi stationnaire : $\pi(c_1, \dots, c_n) = \pi(\emptyset) \prod_{p=1}^n \frac{\mu_{c_p}}{\mu(\mathcal{E}(\{c_1, \dots, c_p\}))}$

$$\pi(4, 4, 1, 4, 1) = \pi(\emptyset) \cdot \frac{\mu_4}{\mu_3} \cdot \frac{\mu_4}{\mu_3} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3} \cdot \frac{\mu_4}{\mu_2 + \mu_3} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3}$$

Performance : Probabilité d'attente

Théorème : La probabilité d'attente d'un élément de la classe i est donnée par

$$\omega_i = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{I}_0: i \notin \mathcal{E}(\mathcal{I})} \pi(\mathcal{I})$$



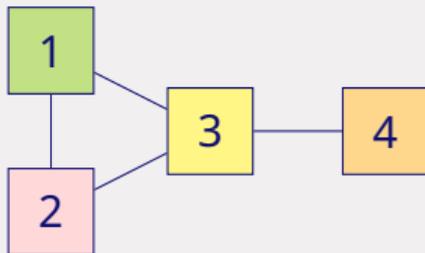
Performance : Probabilité d'attente

Théorème : La probabilité d'attente d'un élément de la classe i est donnée par

$$\omega_i = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{I}_0: i \notin \mathcal{E}(\mathcal{I})} \pi(\mathcal{I}),$$

où $\pi(\mathcal{I})$ est donné par la récurrence

$$\pi(\mathcal{I}) = \frac{\rho(\mathcal{I})}{1 - \rho(\mathcal{I})} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\mu_j}{\mu(\mathcal{I})} \pi(\mathcal{I} \setminus \{j\}) \right), \quad \mathcal{I} \in \mathbb{I}.$$



Performance : Probabilité d'attente

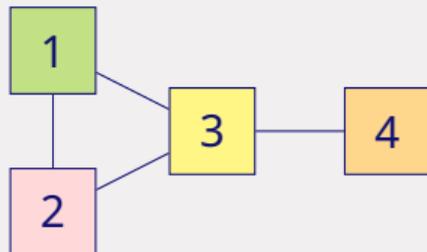
Théorème : La probabilité d'attente d'un élément de la classe i est donnée par

$$\omega_i = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{I}_0: i \notin \mathcal{E}(\mathcal{I})} \pi(\mathcal{I}),$$

où $\pi(\mathcal{I})$ est donné par la récurrence

$$\pi(\mathcal{I}) = \frac{\rho(\mathcal{I})}{1 - \rho(\mathcal{I})} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\mu_j}{\mu(\mathcal{I})} \pi(\mathcal{I} \setminus \{j\}) \right), \quad \mathcal{I} \in \mathbb{I}.$$

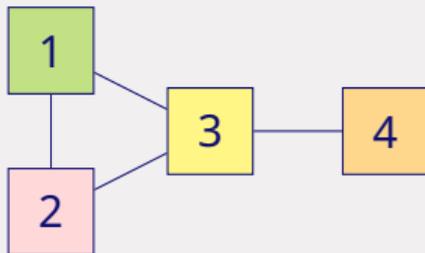
On peut vérifier que $\sum_i \mu_i \omega_i = \frac{1}{2}$.



Performance: Éléments en attente

Théorème : Le nombre moyen d'éléments en attente est donné par

$$L = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{I}} L(\mathcal{I}) \pi(\mathcal{I})$$



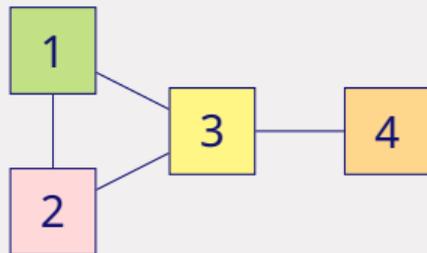
Performance: Éléments en attente

Théorème : Le nombre moyen d'éléments en attente est donné par

$$L = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{I}} L(\mathcal{I})\pi(\mathcal{I}),$$

où $L(\mathcal{I})$ est donné par la relation de récurrence $L(\emptyset) = 0$ et

$$L(\mathcal{I})\pi(\mathcal{I}) = \frac{\pi(\mathcal{I})}{1 - \rho(\mathcal{I})} + \frac{\rho(\mathcal{I})}{1 - \rho(\mathcal{I})} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\mu_j}{\mu(\mathcal{I})} L(\mathcal{I} \setminus \{j\})\pi(\mathcal{I} \setminus \{j\}) \right), \quad \mathcal{I} \in \mathbb{I}.$$



Performance: Éléments en attente

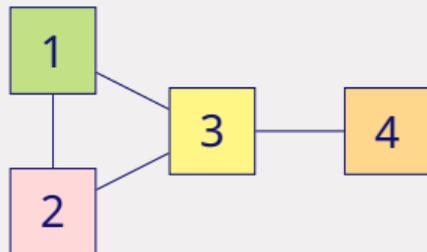
Théorème : Le nombre moyen d'éléments en attente est donné par

$$L = \sum_{\mathcal{I} \in \mathbb{I}} L(\mathcal{I})\pi(\mathcal{I}),$$

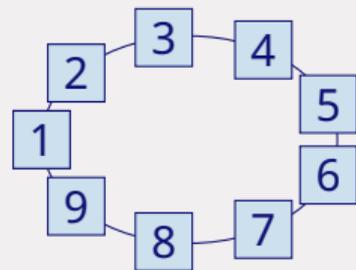
où $L(\mathcal{I})$ est donné par la relation de récurrence $L(\emptyset) = 0$ et

$$L(\mathcal{I})\pi(\mathcal{I}) = \frac{\pi(\mathcal{I})}{1 - \rho(\mathcal{I})} + \frac{\rho(\mathcal{I})}{1 - \rho(\mathcal{I})} \left(\sum_{j \in \mathcal{I}} \frac{\mu_j}{\mu(\mathcal{I})} L(\mathcal{I} \setminus \{j\})\pi(\mathcal{I} \setminus \{j\}) \right), \quad \mathcal{I} \in \mathbb{I}.$$

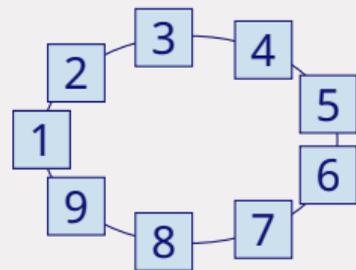
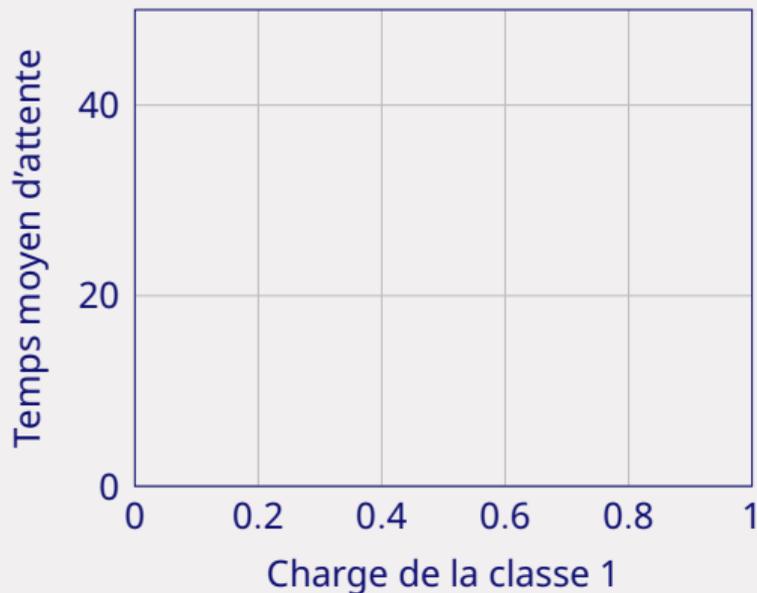
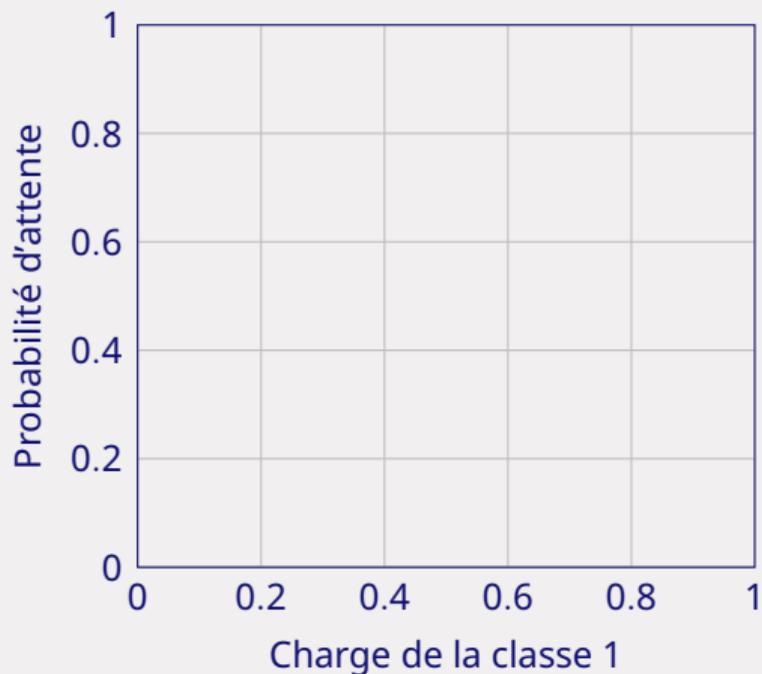
Résultat similaire pour le comportement par classe.



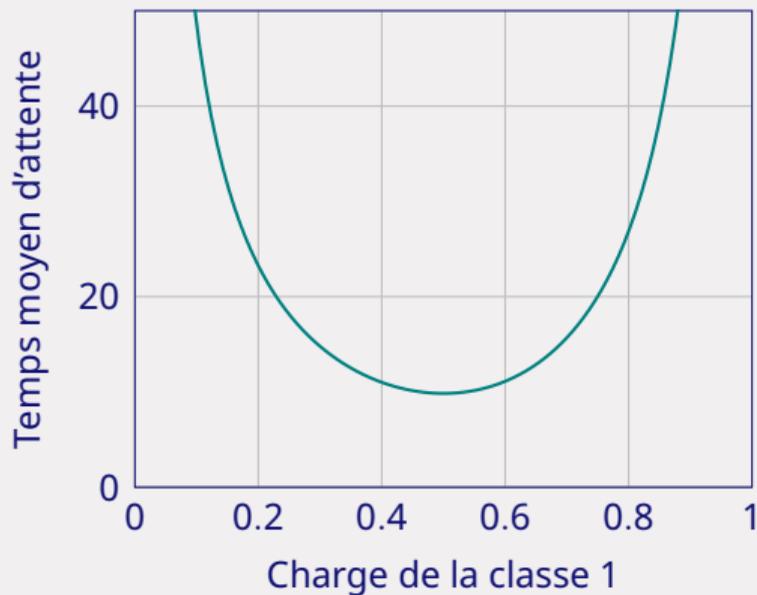
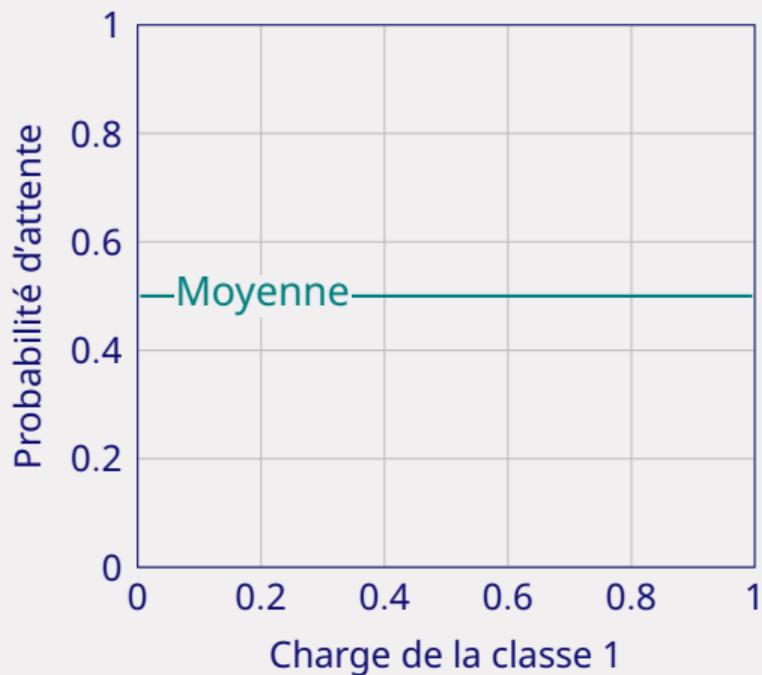
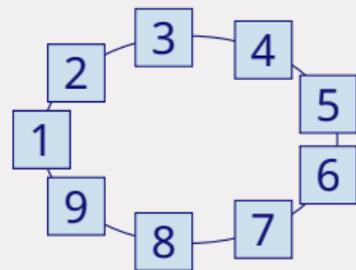
Résultats numériques : Cycle



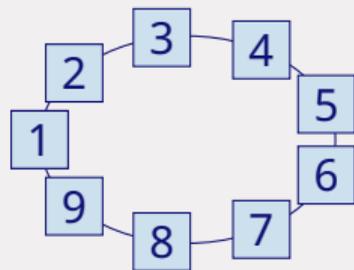
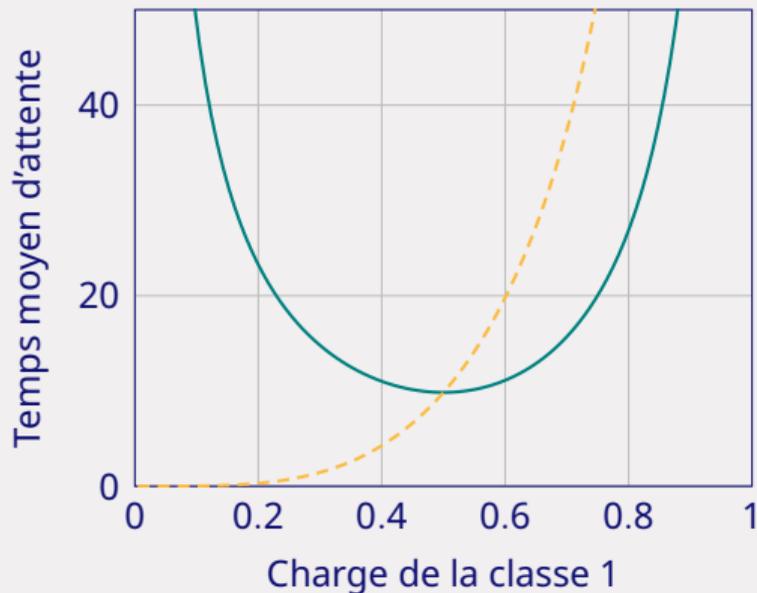
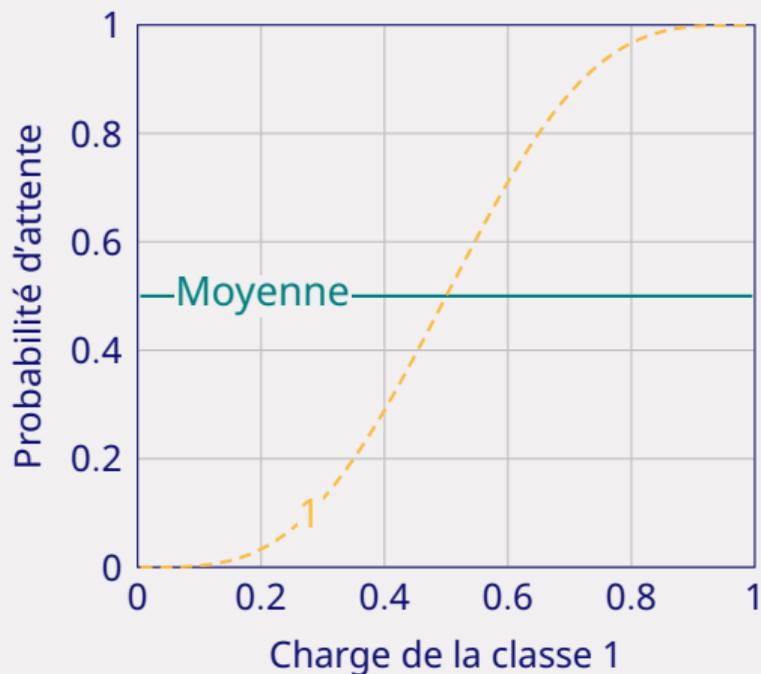
Résultats numériques : Cycle



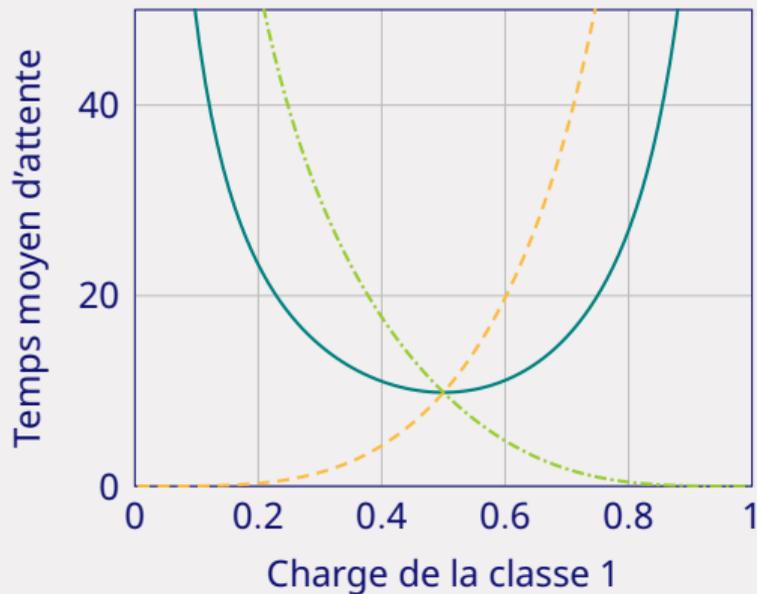
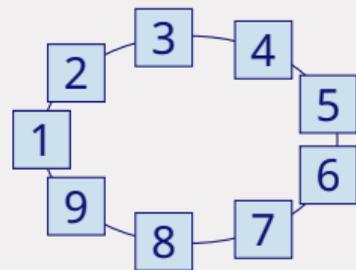
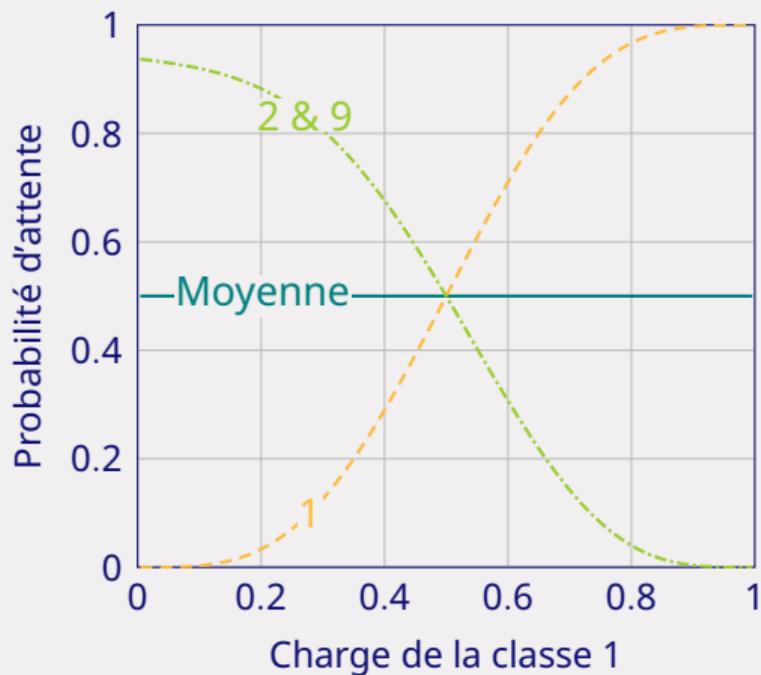
Résultats numériques : Cycle



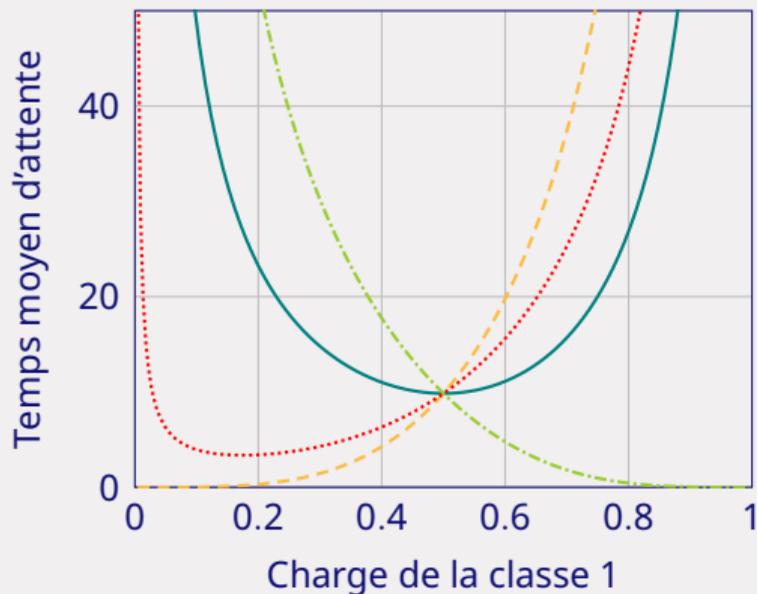
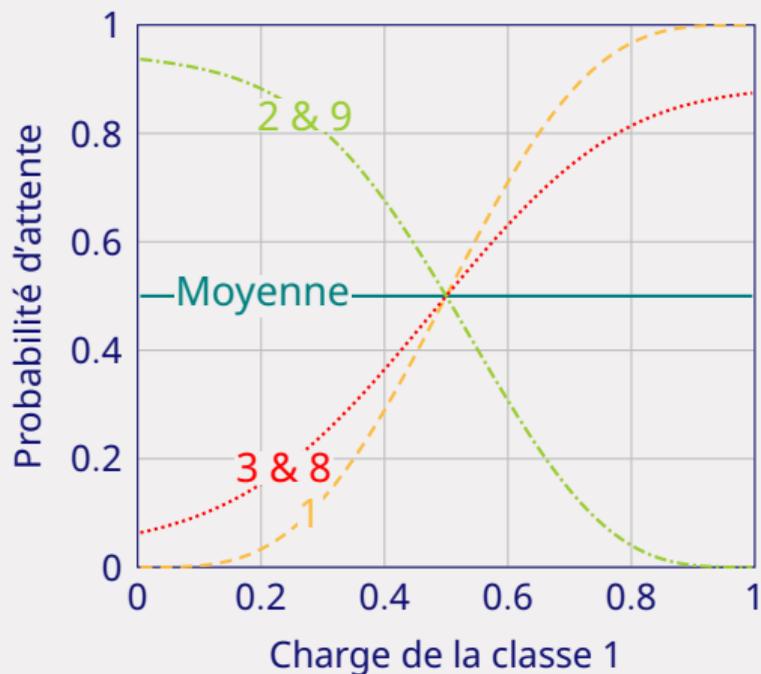
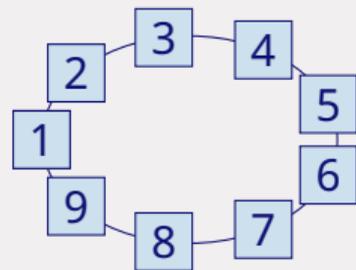
Résultats numériques : Cycle



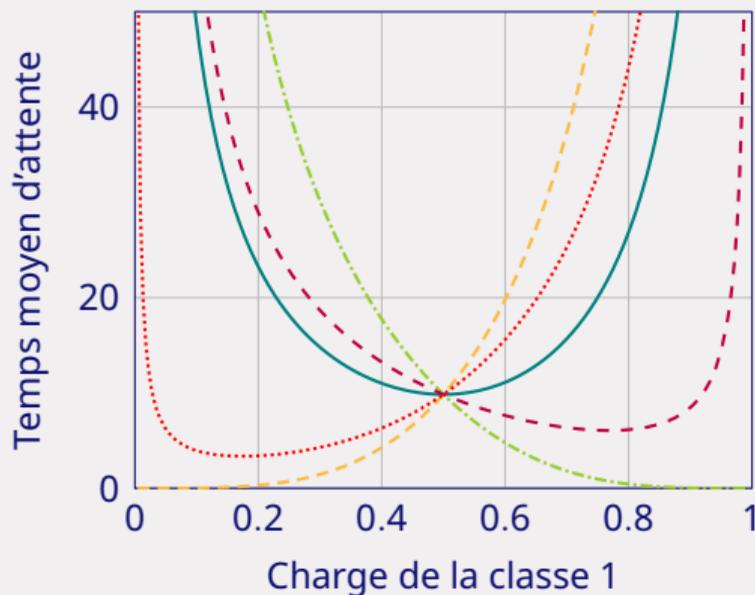
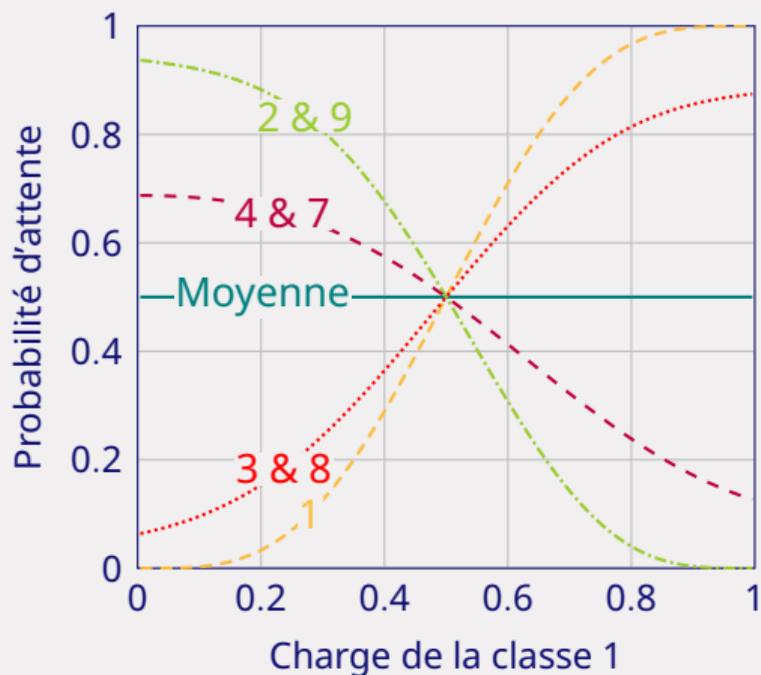
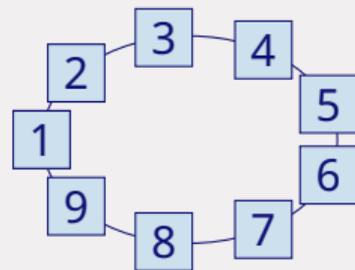
Résultats numériques : Cycle



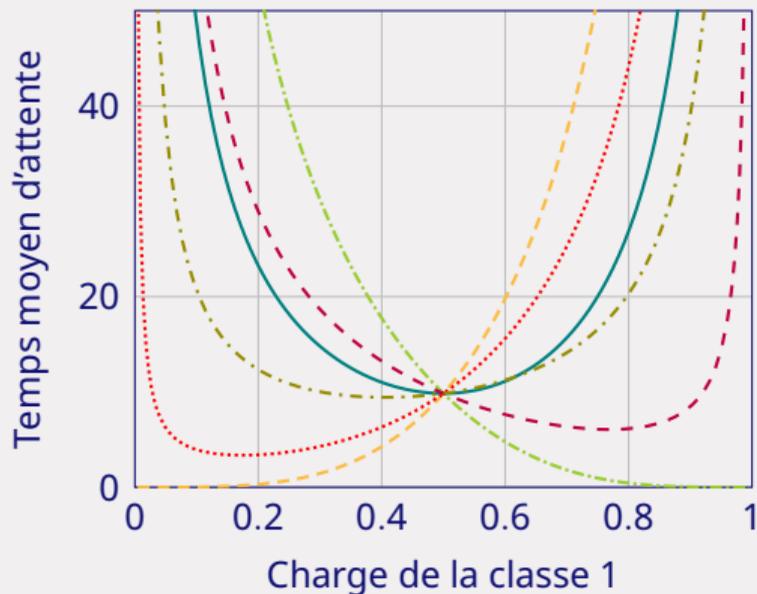
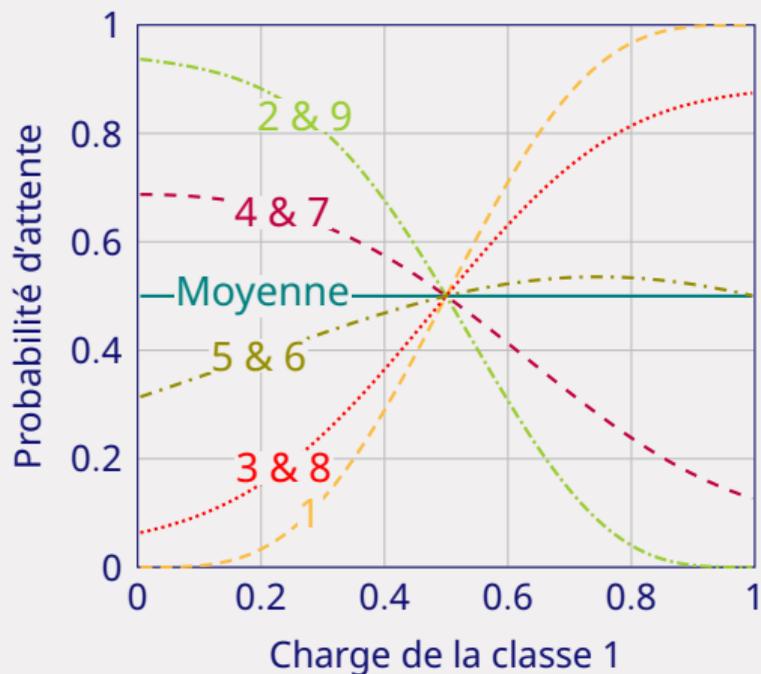
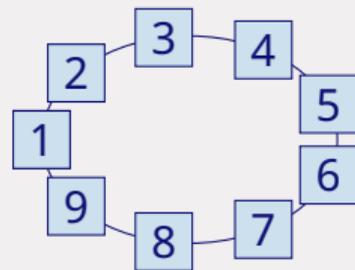
Résultats numériques : Cycle



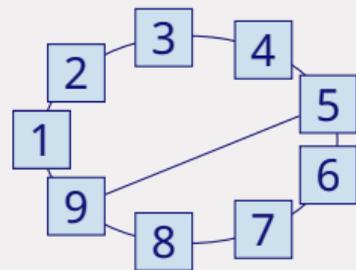
Résultats numériques : Cycle



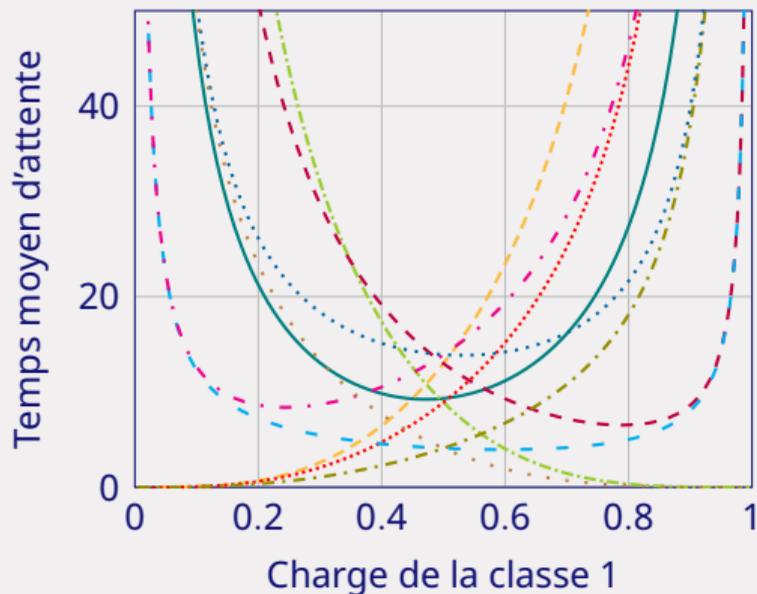
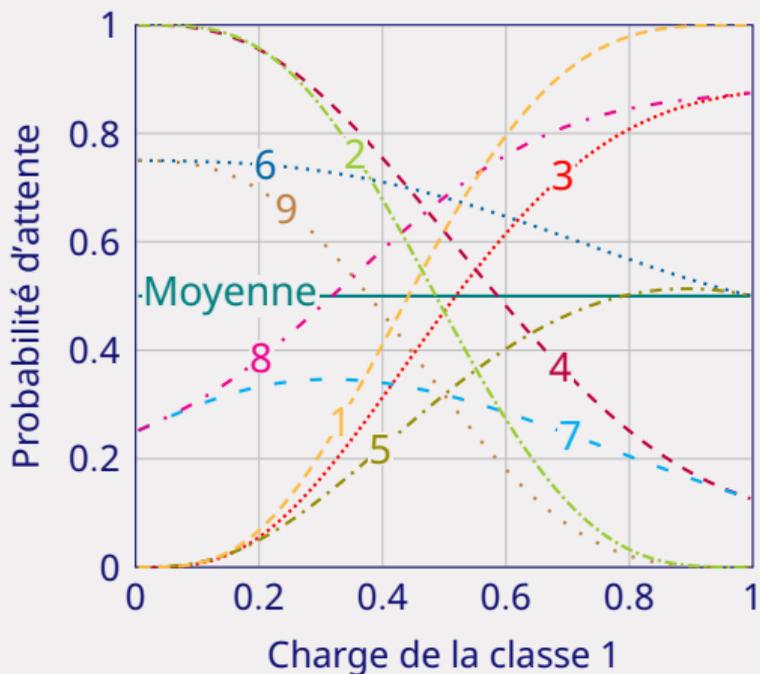
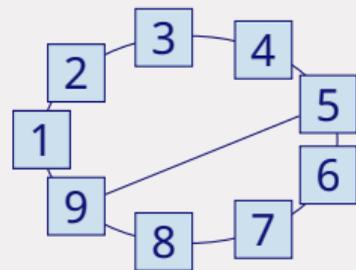
Résultats numériques : Cycle



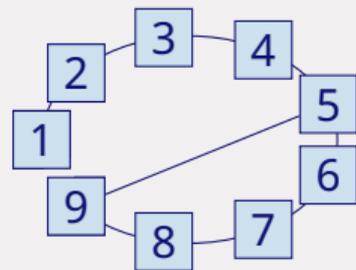
Résultats numériques : Cycle avec une corde



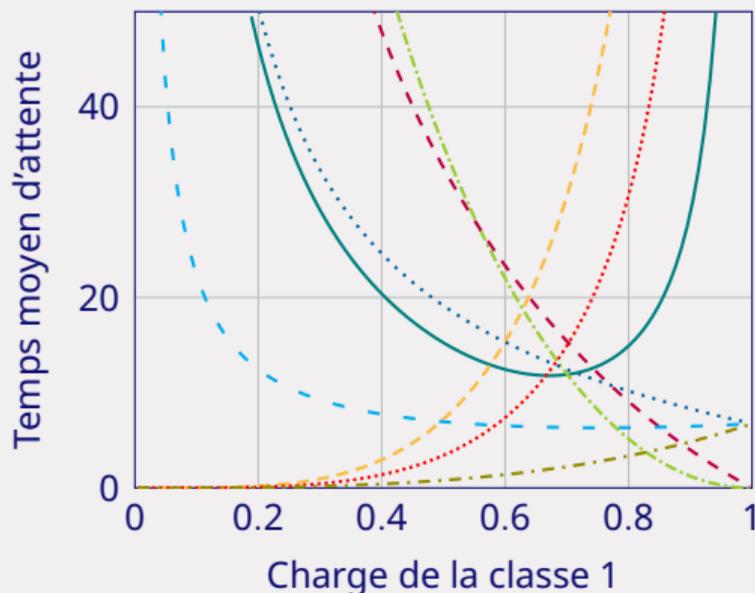
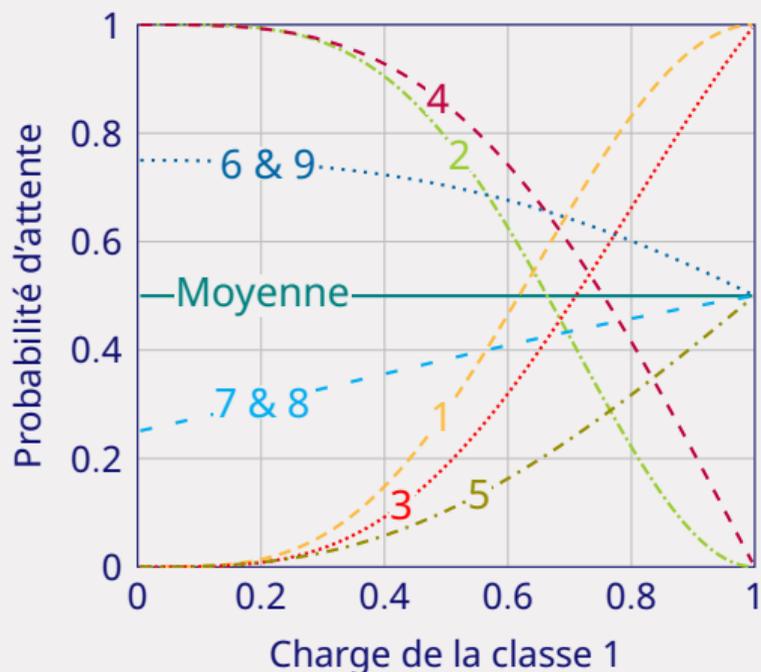
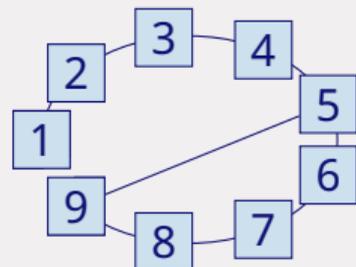
Résultats numériques : Cycle avec une corde



Résultats numériques : Raquette*



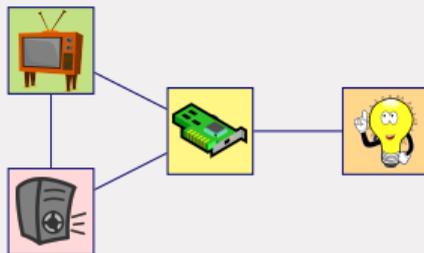
Résultats numériques : Raquette*



Conclusion

Contributions

- Équivalence avec les files *order-independent* à pertes
- Preuves plus simples pour des résultats existants
- Formules explicites pour plusieurs métriques de performance
- Impact de la charge sur la performance



Conclusion

Contributions

- Équivalence avec les files *order-independent* à pertes
- Preuves plus simples pour des résultats existants
- Formules explicites pour plusieurs métriques de performance
- Impact de la charge sur la performance

Travaux futurs

- Optimiser la performance : structure du graphe ? taux d'arrivée ?
- Modèle plus réaliste : hypergraphes ? taux d'arrivée variables ?

