

La Grille de Kleinberg, l'Univers et le Reste

Céline Comte et Fabien Mathieu
{celine.comte,fabien.mathieu}@nokia.com

NOKIA Bell Labs



Introduction

La Grille de Kleinberg



Introduction

La Grille de Kleinberg

- Modèle simple pour capturer l'effet petit monde



Introduction

La Grille de Kleinberg

- Modèle simple pour capturer l'effet petit monde
- Nombreux résultats asymptotiques



Introduction

La Grille de Kleinberg

- Modèle simple pour capturer l'effet petit monde
- Nombreux résultats asymptotiques
- Peu de résultats pour des grilles de taille finie



Introduction

Nos contributions



Introduction

Nos contributions

- Algorithme pour simuler des grilles finies très grandes



Introduction

Nos contributions

- Algorithme pour simuler des grilles finies très grandes
- Proposition de nouvelles bornes asymptotiques



Introduction

Nos contributions

- Algorithme pour simuler des grilles finies très grandes
- Proposition de nouvelles bornes asymptotiques
- Résultats numériques sur des grilles de taille finie



L'effet petit monde

Simuler la grille de Kleinberg

Applications

L'effet petit monde

Simuler la grille de Kleinberg

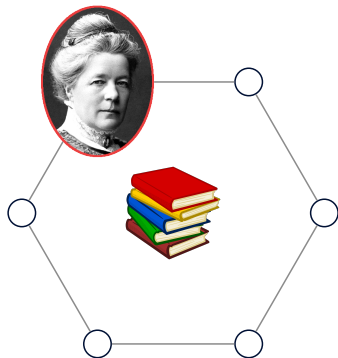
Applications

Que le monde est petit !

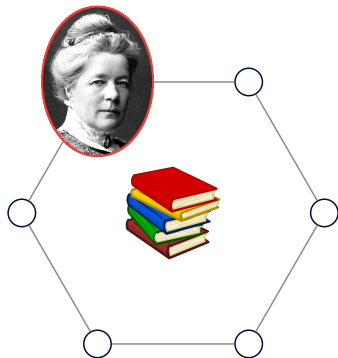
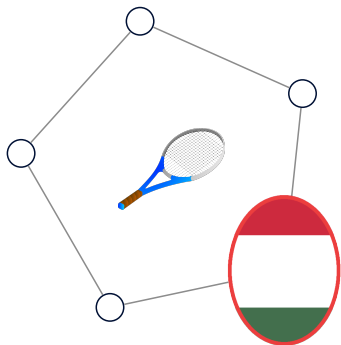
Que le monde est petit !



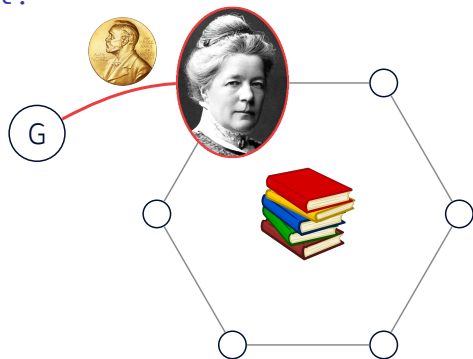
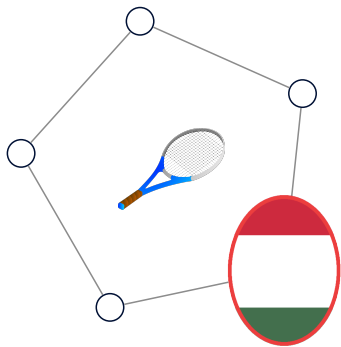
Que le monde est petit !



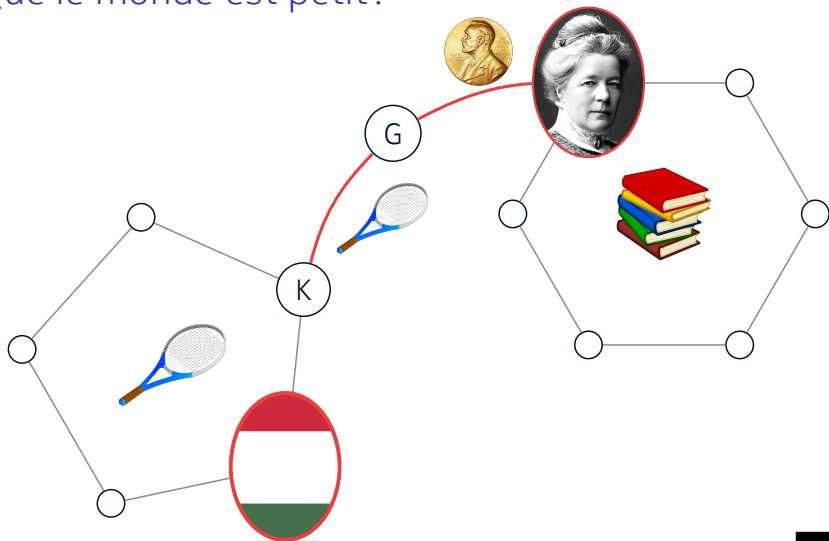
Que le monde est petit !



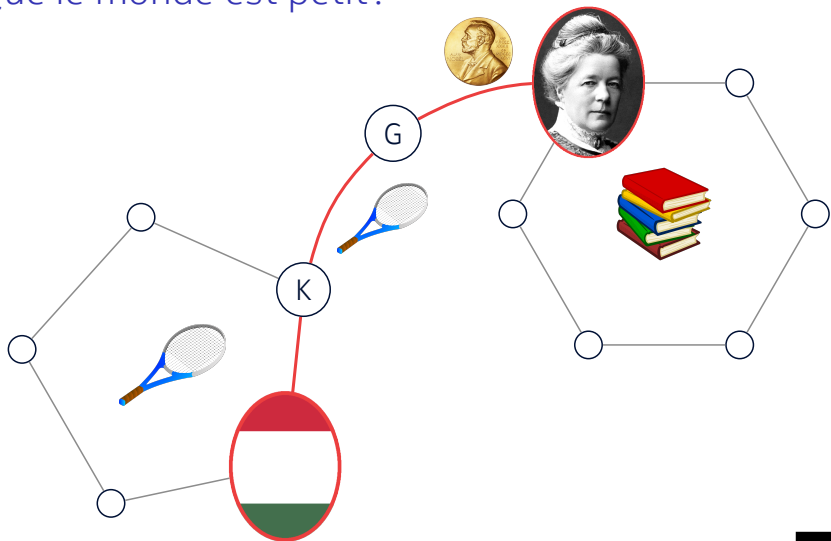
Que le monde est petit !



Que le monde est petit !



Que le monde est petit !



Exemples historiques

- Liens (Láncszemek),
Karinthy, 1929

KARINTHY
FRIGYYES

Chains

SZÉPIRODALMI  KÖNYVKIADÓ

Exemples historiques

- Liens (Láncszemek), Karinthy, 1929
- Expériences de Milgram, 1967

KARINTHY
FRIGYYES

Chains

SZÉPIRODALMI  KÖNYVKIADÓ

Exemples historiques

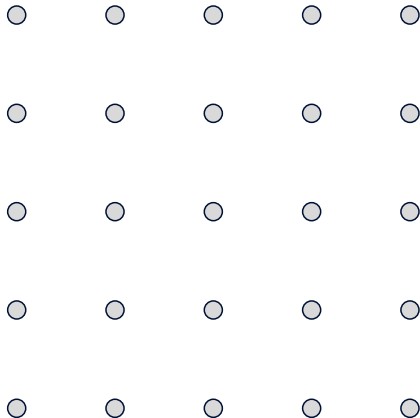
- Liens (Láncszemek), Karinthy, 1929
- Expériences de Milgram, 1967
- Réseaux sociaux, aujourd'hui

KARINTHY
FRIGYYES

Chains

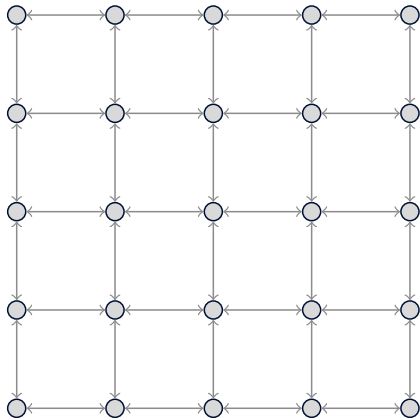
SZÉPIRODALMI  KÖNYVKIADÓ

La Grille de Kleinberg



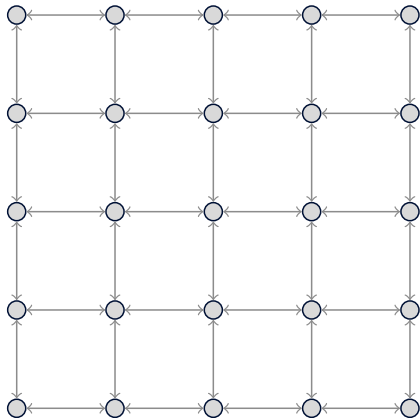
- Grille $n \times n$

La Grille de Kleinberg



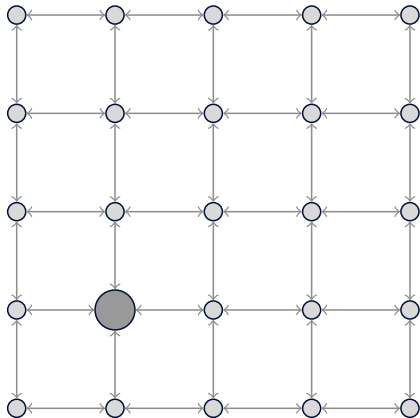
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux

La Grille de Kleinberg



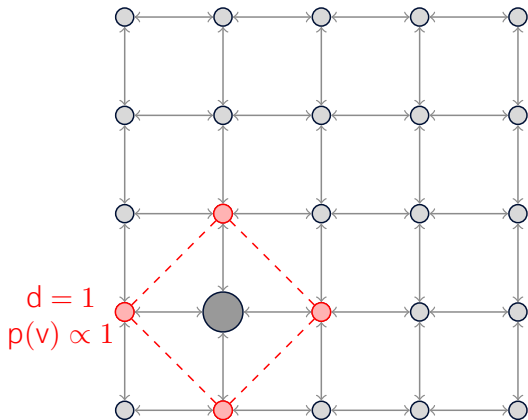
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci

La Grille de Kleinberg



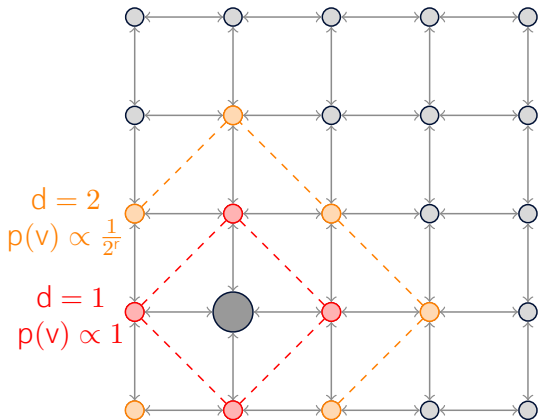
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci

La Grille de Kleinberg



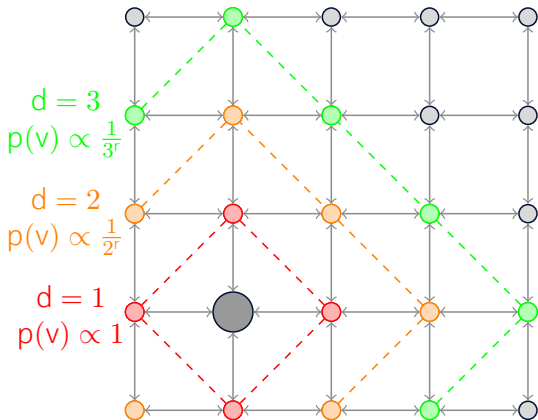
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci

La Grille de Kleinberg



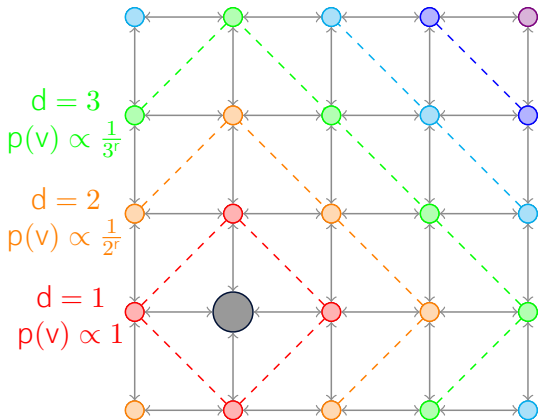
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci

La Grille de Kleinberg



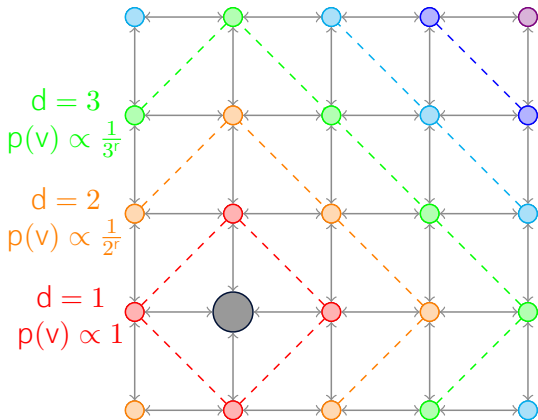
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci

La Grille de Kleinberg



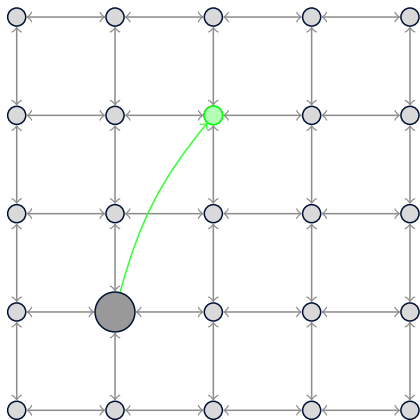
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci

La Grille de Kleinberg



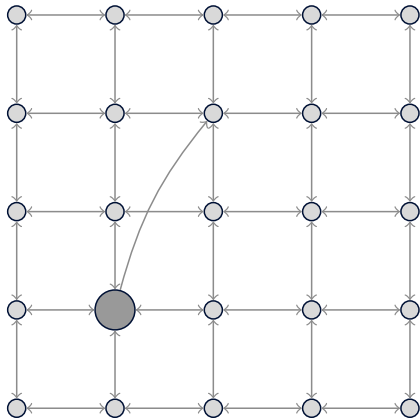
- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci
- Paramètre de localité
Exposant r

La Grille de Kleinberg

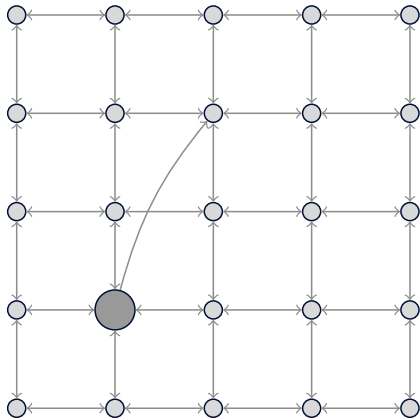


- Grille $n \times n$
- Voisins locaux
- Raccourci
- Paramètre de localité
Exposant r

Navigabilité

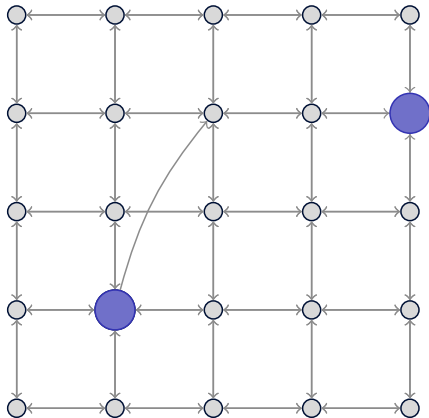


Navigabilité



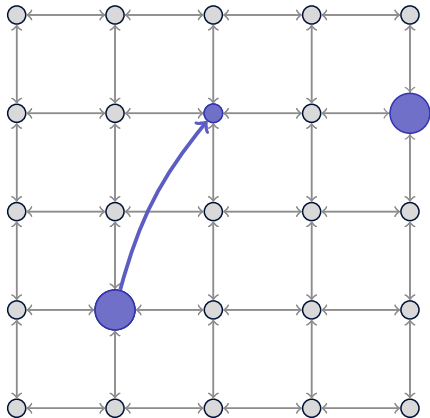
- Routage glouton

Navigabilité



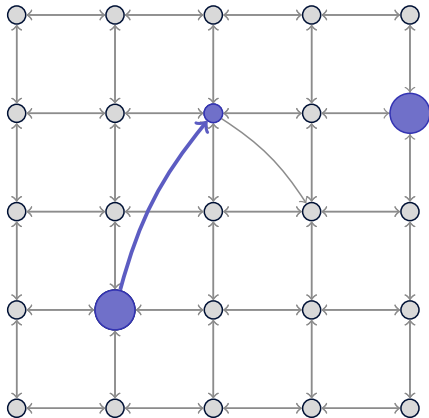
- Routage glouton

Navigabilité



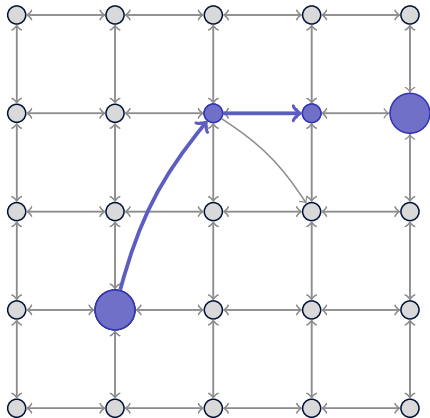
- Routage glouton

Navigabilité



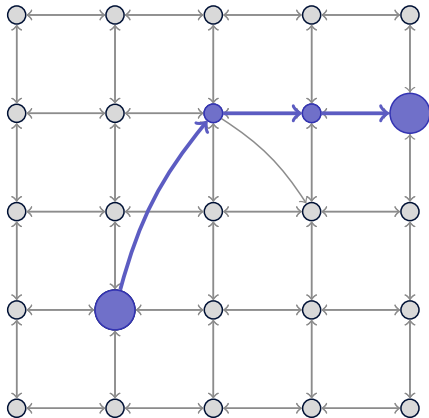
- Routage glouton

Navigabilité



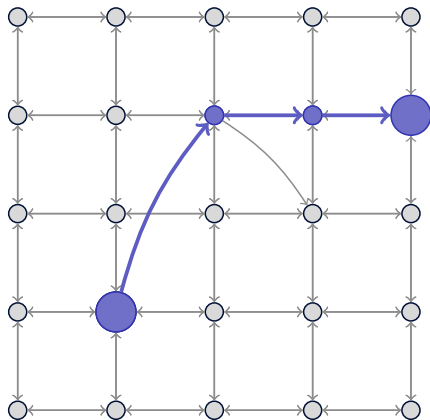
- Routage glouton

Navigabilité



- Routage glouton

Navigabilité

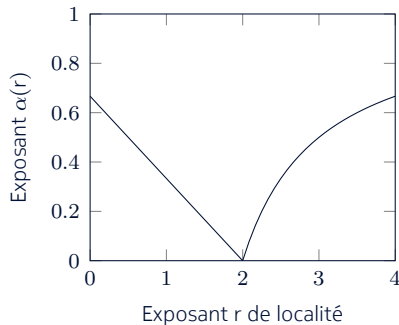


- Routage glouton
- Temps moyen d'acheminement

Résultats théoriques de Kleinberg

En moyenne,

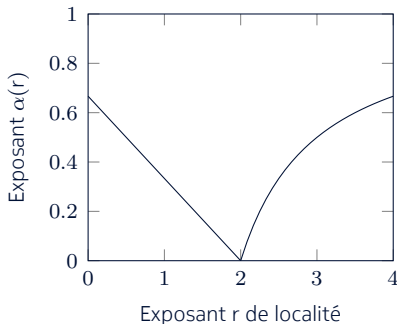
- Si $r = 2$, $O(\ln(n)^2)$ sauts
- Si $r \neq 2$, $\Omega(n^{\alpha(r)})$ sauts pour un certain $\alpha(r) > 0$



Résultats théoriques de Kleinberg

En moyenne,

- Si $r = 2$, $O(\ln(n)^2)$ sauts
- Si $r \neq 2$, $\Omega(n^{\alpha(r)})$ sauts pour un certain $\alpha(r) > 0$



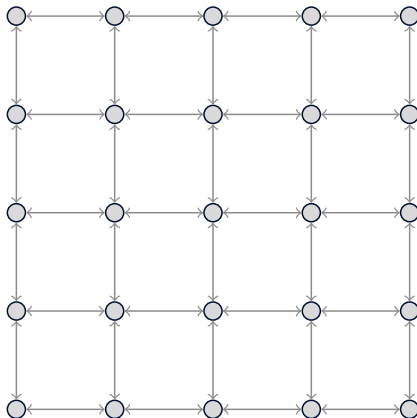
Le modèle de Kleinberg est-il trop simple ?

L'effet petit monde

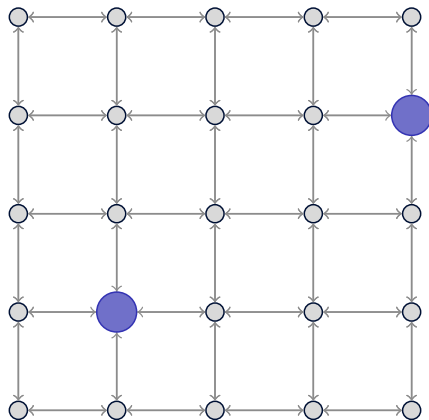
Simuler la grille de Kleinberg

Applications

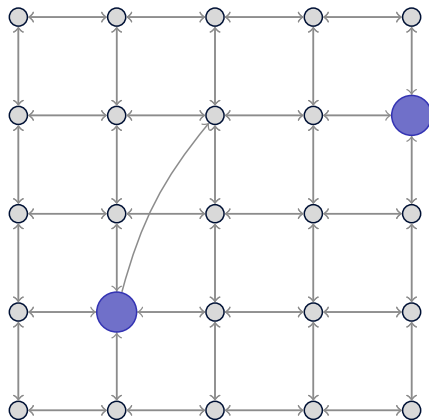
Principe de décision différée



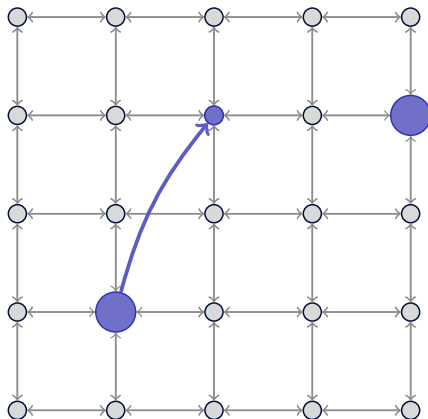
Principe de décision différée



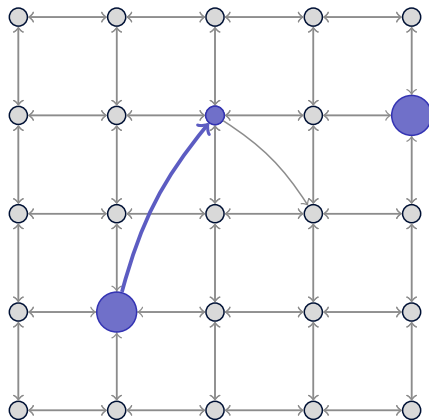
Principe de décision différée



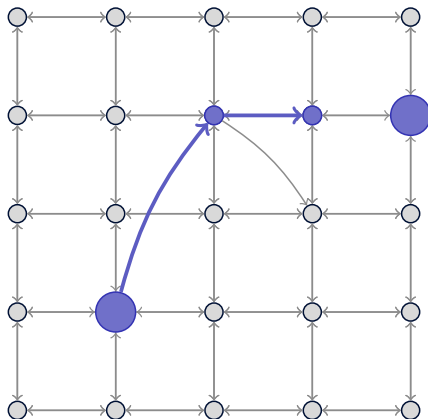
Principe de décision différée



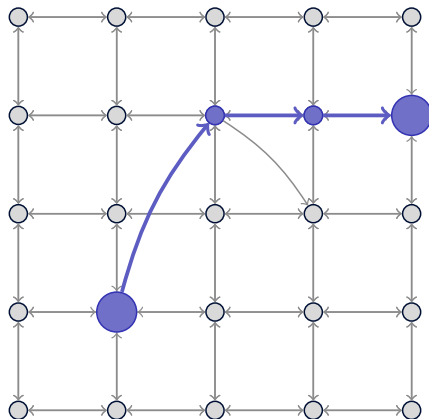
Principe de décision différée



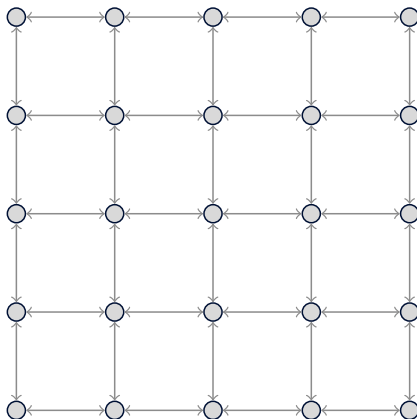
Principe de décision différée



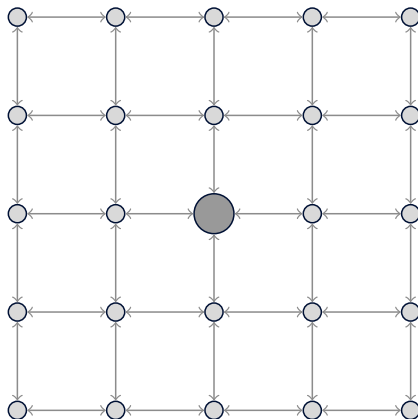
Principe de décision différée



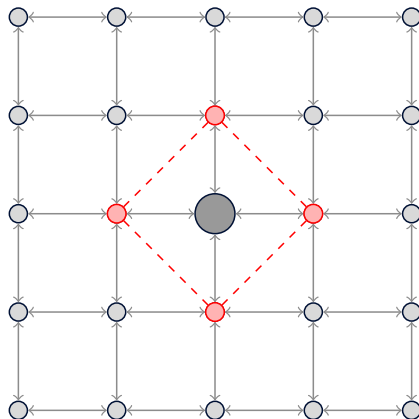
Approximation torique



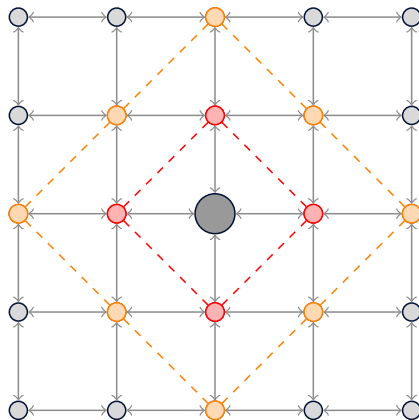
Approximation torique



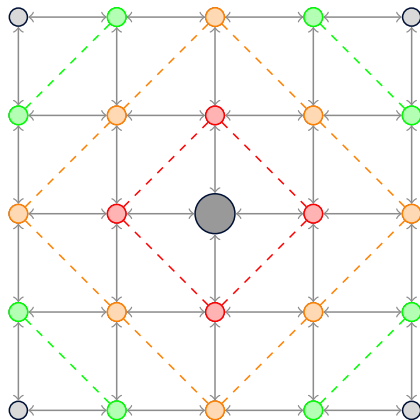
Approximation torique



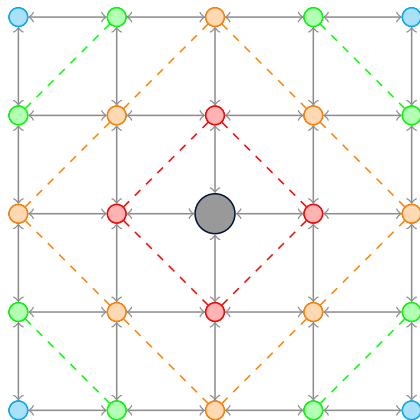
Approximation torique



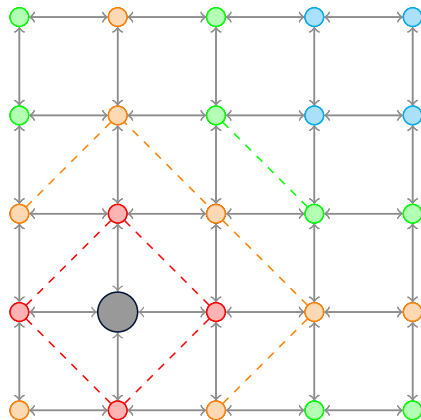
Approximation torique



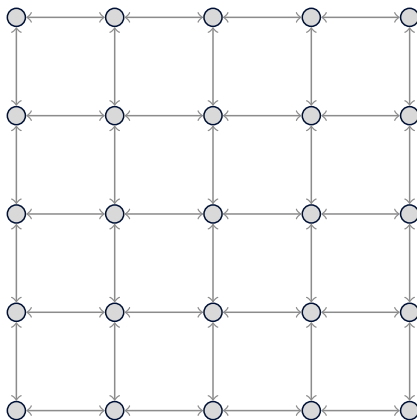
Approximation torique



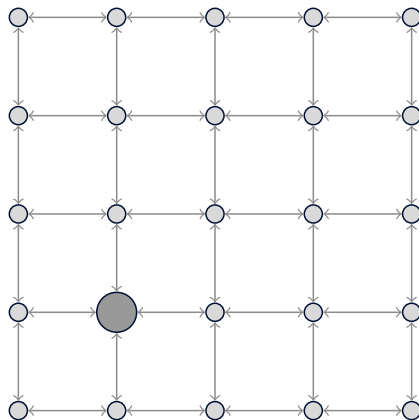
Approximation torique



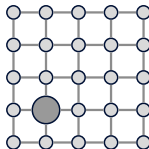
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



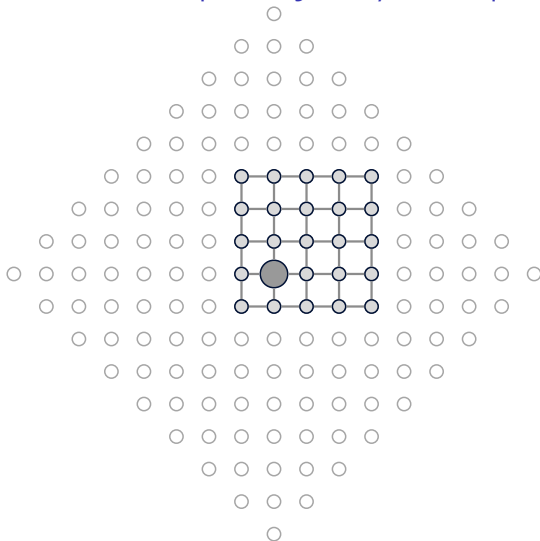
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



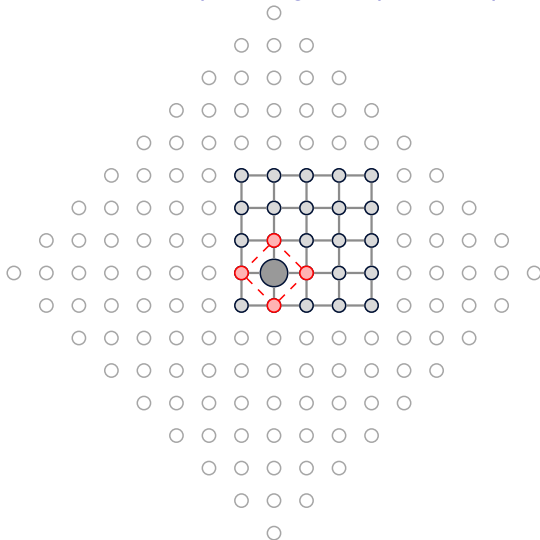
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



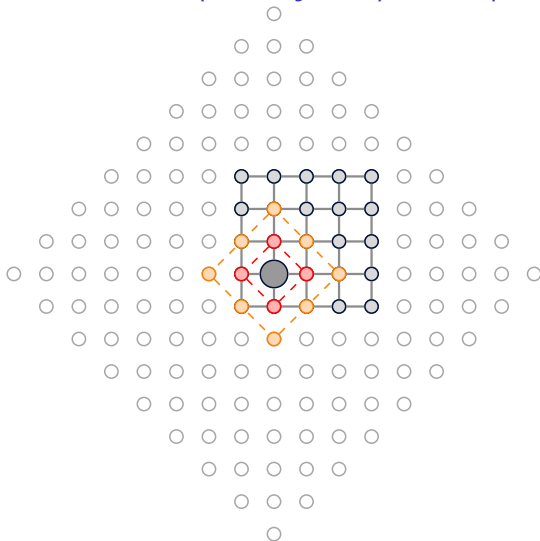
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



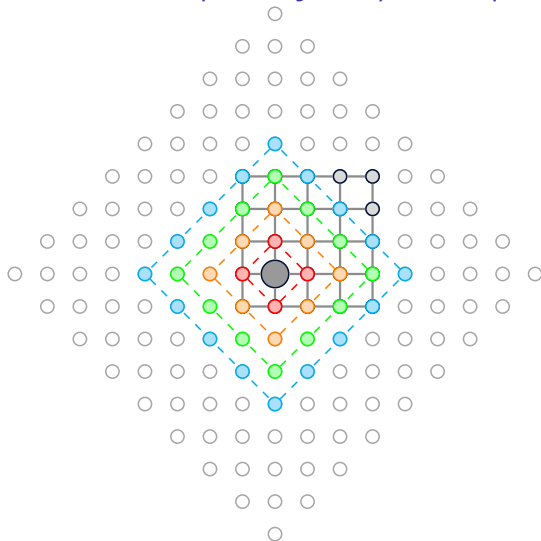
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



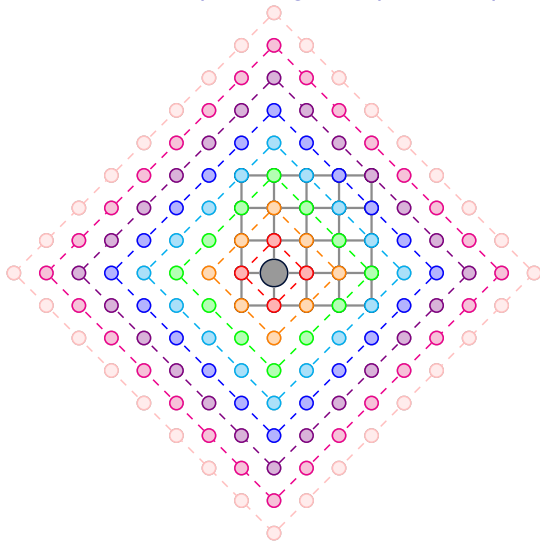
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



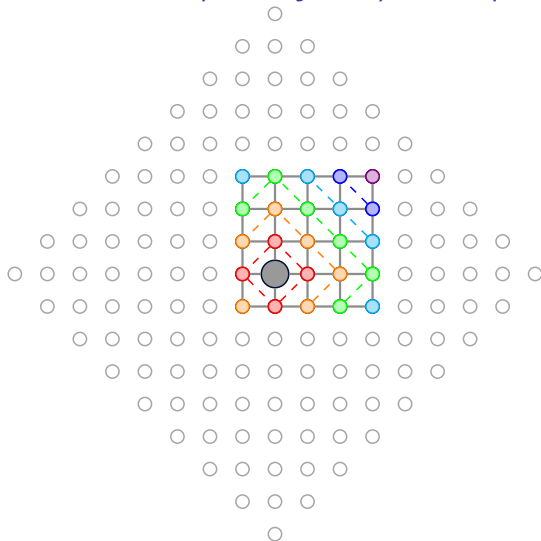
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



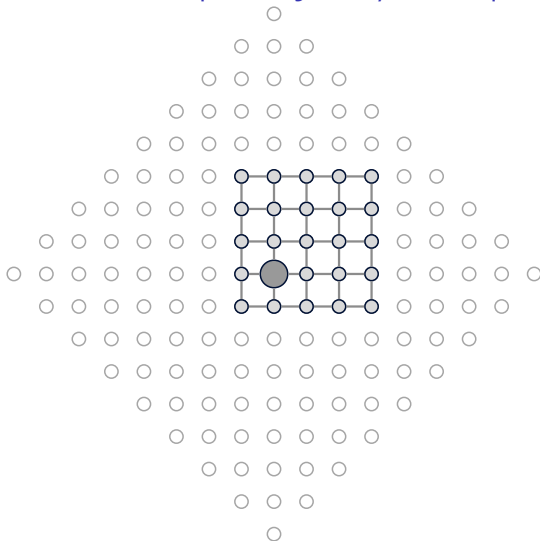
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



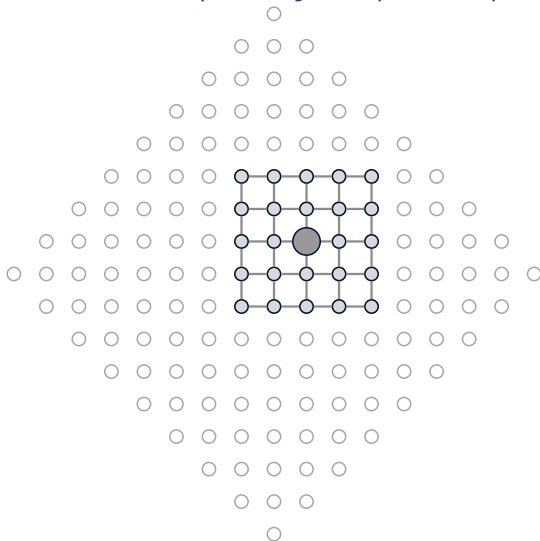
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



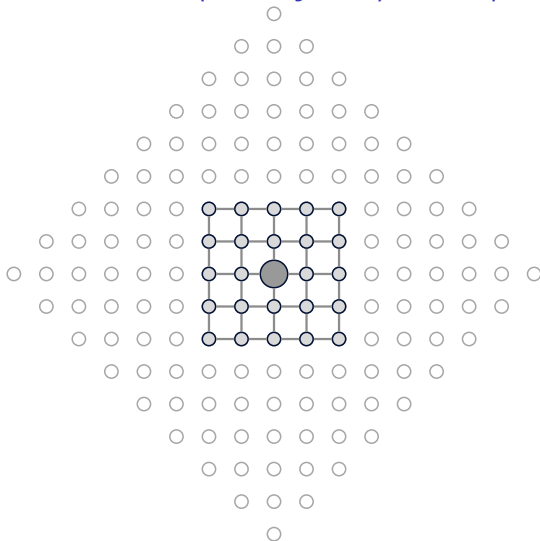
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



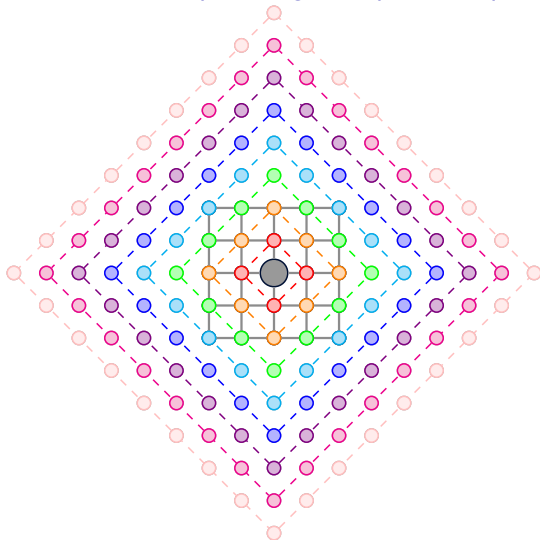
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



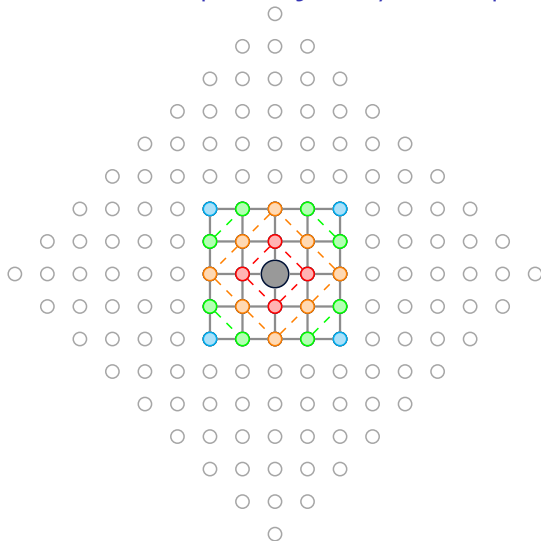
Tirage des raccourcis par rejet dynamique



Tirage des raccourcis par rejet dynamique



Tirage des raccourcis par rejet dynamique



Algorithme

Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

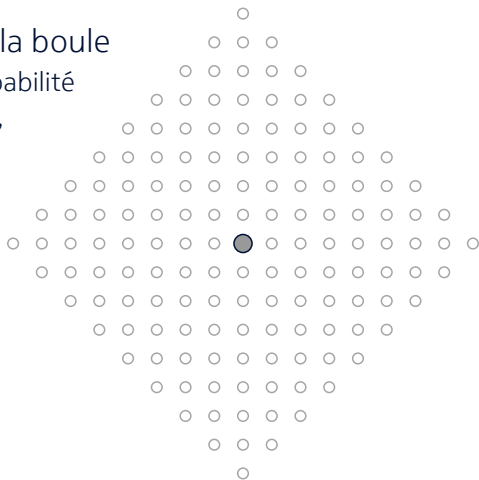
Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule
 - Rayon. Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$

Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

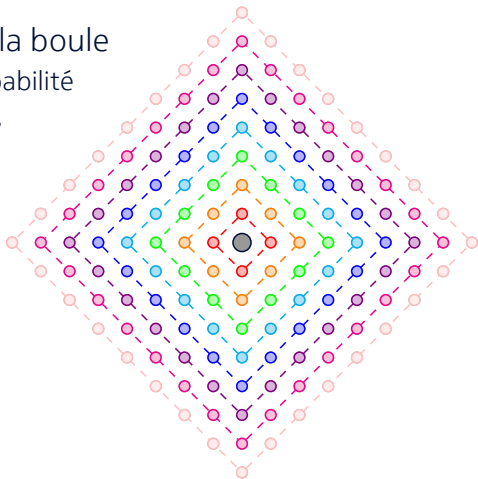
- Rayon. Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$



Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

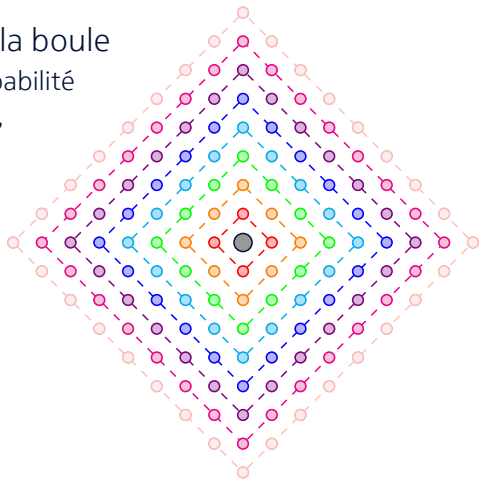
- Rayon. Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$



Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

- Rayon. Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$
- Angle. Tirer un entier entre 1 et $4i$



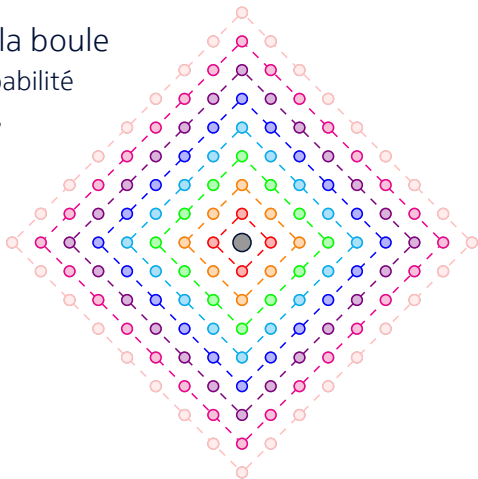
Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

- Rayon. Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$
- Angle. Tirer un entier entre 1 et $4i$

2. Rejet

Utiliser la grille initiale comme un masque d'acceptation



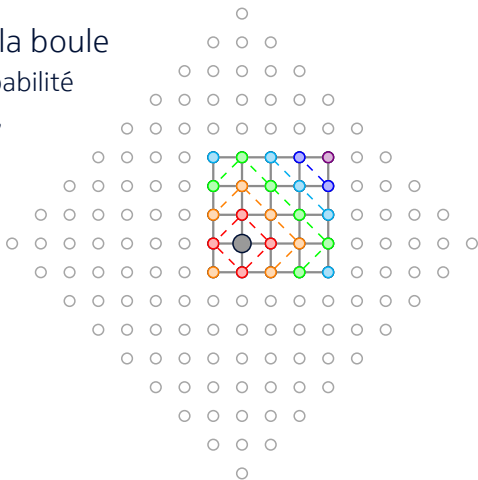
Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

- Rayon. Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$
- Angle. Tirer un entier entre 1 et $4i$

2. Rejet

Utiliser la grille initiale comme un masque d'acceptation



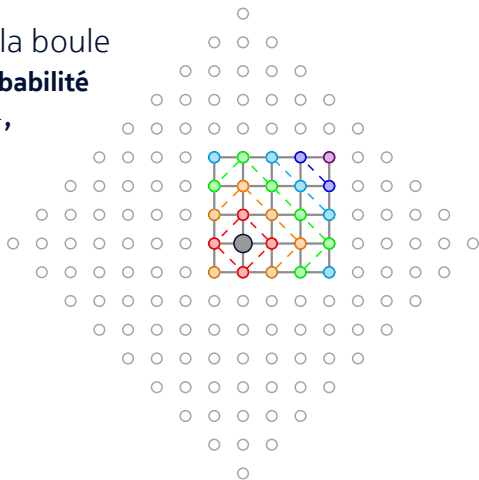
Algorithme

1. Tirer un raccourci dans la boule

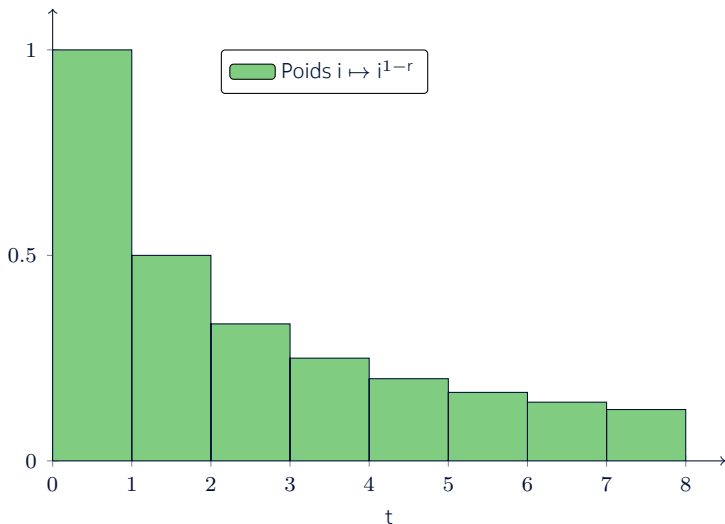
- **Rayon.** Tirer i avec probabilité proportionnelle à $(4i)^{\frac{1}{r}}$, soit à $\frac{1}{i^{r-1}}$
- **Angle.** Tirer un entier entre 1 et $4i$

2. Rejet

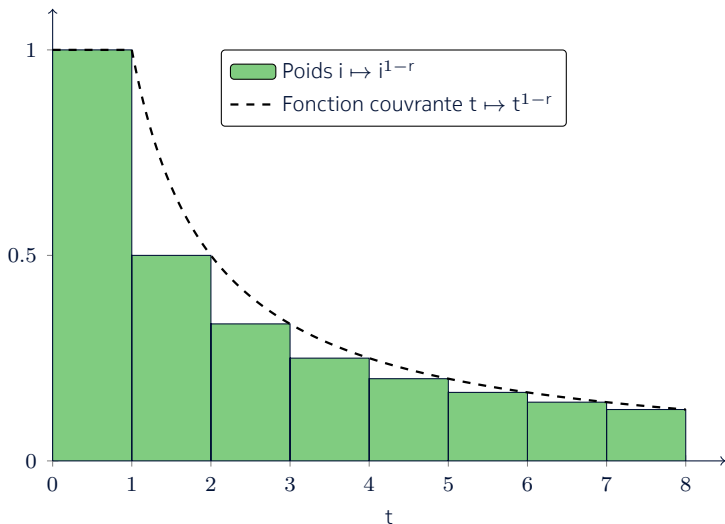
Utiliser la grille initiale comme un masque d'acceptation



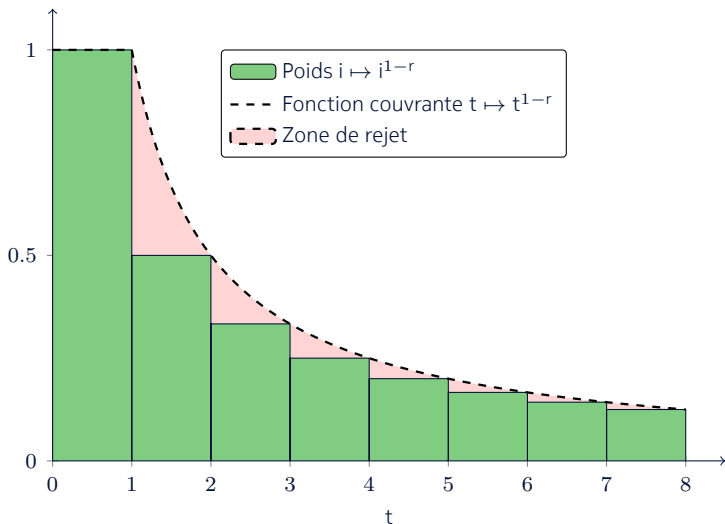
Tirage des rayons par rejet



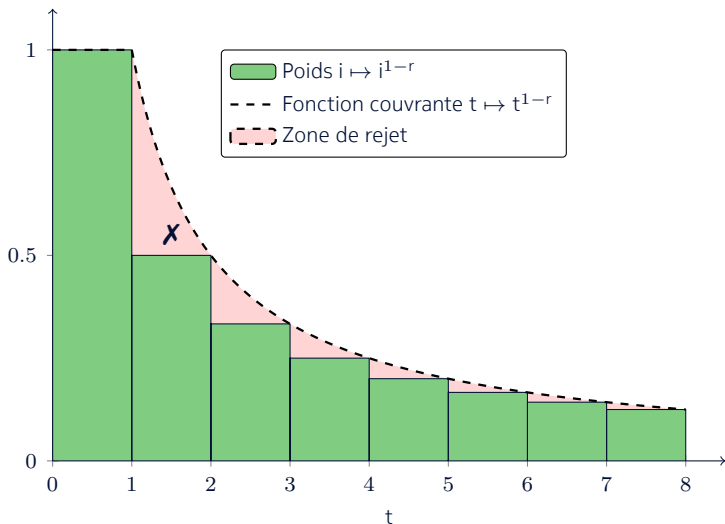
Tirage des rayons par rejet



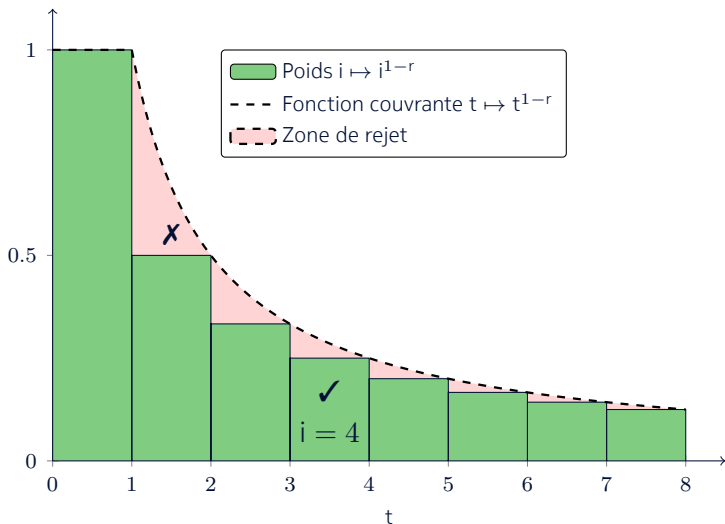
Tirage des rayons par rejet

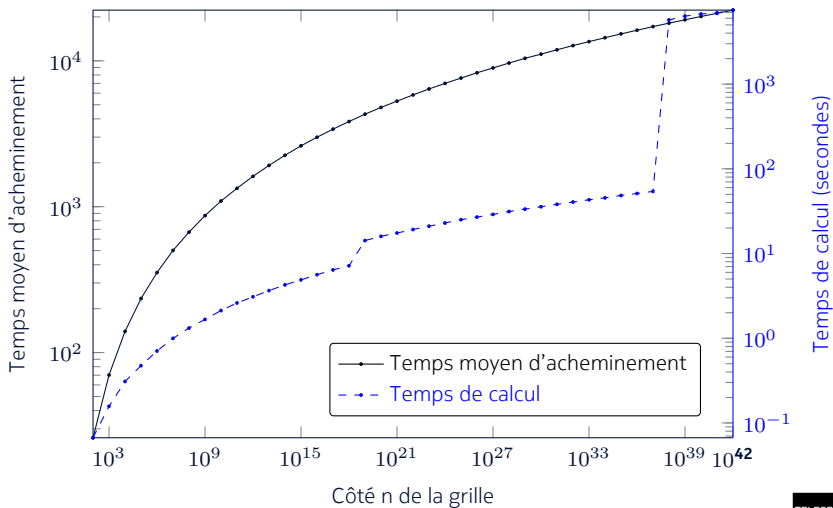


Tirage des rayons par rejet



Tirage des rayons par rejet



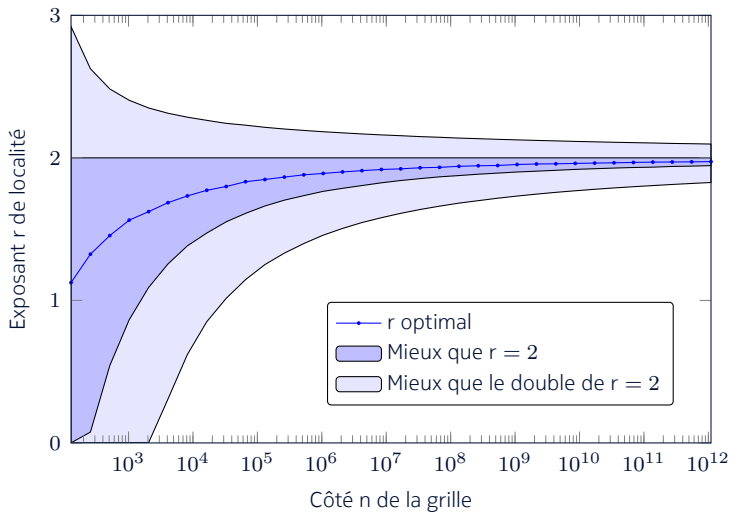
L'univers observable ($r = 2$)

L'effet petit monde

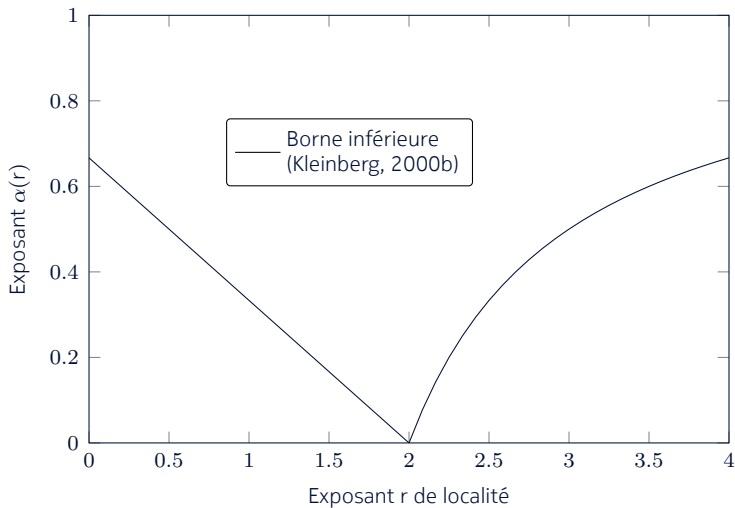
Simuler la grille de Kleinberg

Applications

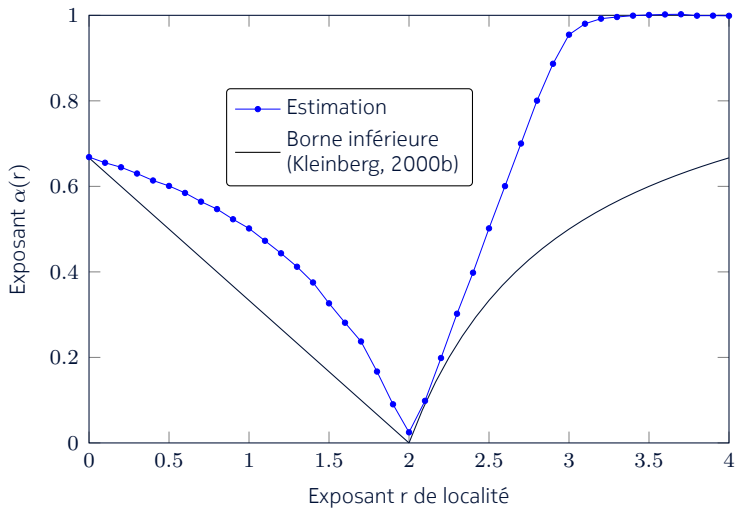
Valeurs efficaces de l'exposant r de localité



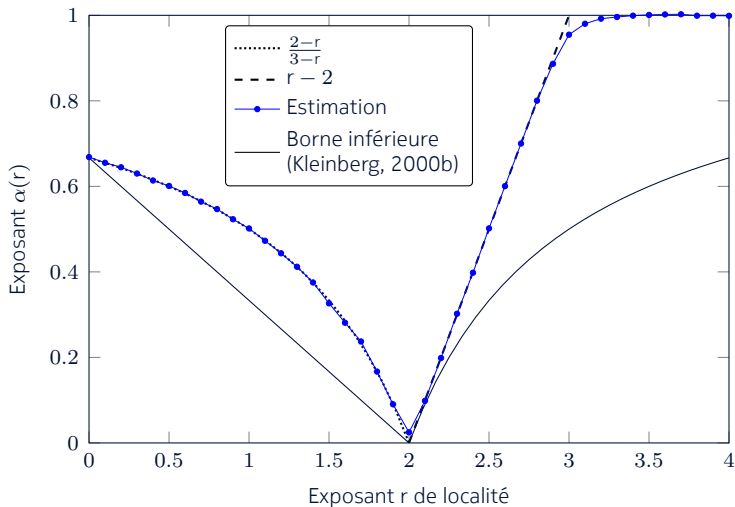
Nouvelles bornes asymptotiques



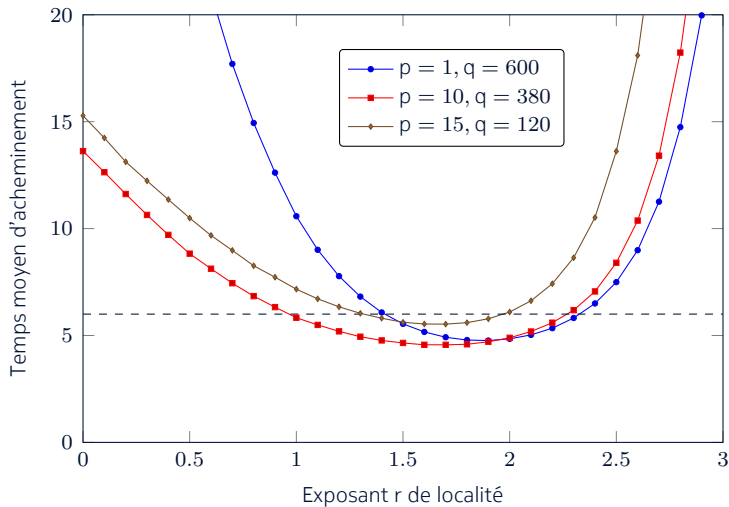
Nouvelles bornes asymptotiques



Nouvelles bornes asymptotiques



Six degrés de séparation - 72M d'habitants



Conclusion

- Méthode de double rejet dynamique
 - Simulateur rapide
 - Généralisation possible à d'autres types de routage
- Applications
 - Les performances asymptotiques sont pires qu'anticipé
 - En pratique, le modèle est robuste en plus d'être simple

Bibliography

- J. Kleinberg (2000a). “Navigation in a small world”. In : *Nature*.
- J. Kleinberg (2000b). “The Small-World Phenomenon : An Algorithmic Perspective”. In : *STOC 2000*, p. 163–170.
- L. Barrière et al. (2001). “Efficient Routing in Networks with Long Range Contacts”. In : *DISC '01*. London, UK, p. 270–284.