Contrôle sur le cours
Modèles et Algorithmes d'Ingénierie de Trafic

29 Mars 2024

Exercice 1 (13 points)

On considère un problème d'équilibrage de charge dans lequel K sources répartissent leur trafic sur N serveurs. On note ρ_i la demande en trafic de la source $i = 1, 2, \ldots, K$ (en paquet/s) et $x_{i,j}$ la quantité de trafic qu'elle envoie vers le serveur $j = 1, 2, \ldots, N$. Ce serveur est constitué de n_j unités de traitement pouvant travailler en parallèle, chacune ayant un taux de service de r paquet/s. On suppose que la capacité totale du système est supérieure à la demande en trafic, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{K} \rho_i < \sum_{k=1}^{N} n_k r$. Sous certaines hypothèses, on peut montrer que le nombre moyen de paquets sur le serveur j est alors $\mathbb{E}\left[N_j\right] = D_j(y_j)$, où $y_j = \sum_{i=1}^{K} x_{i,j}$ est le trafic offert total au serveur j et $D_j(y) = n_j y/(n_j r - y)$.

L'objectif est de déterminer la stratégie de routage $\mathbf{x}^* = (x^*_{i,j})$ qui minimise le délai moyen de traitement des paquets ou, de façon équivalente, le nombre moyen de paquets dans le système. Mathématiquement, le problème s'écrit

$$\text{Minimiser } D(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} D_j(y_j) \tag{P_1}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{N} x_{i,j} = \rho_i, \quad i = 1, \ldots, K,$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{K} x_{i,j} < n_j r, \quad j = 1, \ldots, N,$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, K, \; j = 1, \ldots, N.$$

Pour le résoudre, on va considérer le problème auxiliaire (également convexe) suivant :

$$\text{Minimiser } F(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{N} D_j(y_j) \tag{P_2}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = \sum_{i=1}^{K} \rho_i,$$

$$0 \leq y_j < n_j r, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Questions :

1. Dans le contexte du problème (P_2), rappeler brièvement les conditions d'optimalité du routage.

2. En déduire que pour une solution optimale $\mathbf{y}^*$ de (P_2), $y^*_j > 0$ implique que $y^*_j/n_j \leq y^*_k/n_k$ pour tout $k = 1, \ldots, N$.

3. En raisonnant par l'absurde, en déduire que pour toute solution optimale $\mathbf{y}^*$ de (P_2), on a $y^*_k > 0$ pour tout $k = 1, \ldots, N$.

4. En déduire que pour une solution optimale $\mathbf{y}^*$ du problème (P_2), on a nécessairement $y_j^* = \frac{n_j}{n_1} y_1^*$. En exploitant la contrainte de conservation du trafic, montrer que cela implique que

$$y_j^* = \frac{n_j}{\sum_{k=1}^N n_k} \times \sum_{i=1}^K \rho_i, \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, N.$$

5. Montrer que si $\mathbf{y}^*$ est une solution optimale du problème (P_2), la stratégie $\mathbf{x}^*$ définie par

$$x_{i,j}^* = \frac{\rho_i}{\sum_{k=1}^K \rho_k} y_j^*, \quad i = 1, \ldots, K, \; j = 1, \ldots, N,$$

est une solution optimale du problème (P_1).

Dans la suite, on suppose que l'on a $K = 2$ sources de trafic, avec les demandes $\rho_1 = \rho_2 = 2$. On a d'autre part $N = 2$ serveurs avec les paramètres suivants : $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ et $r = \frac{5}{2}$.

6. Calculer les charges optimales y_1^* et y_2^* des serveurs et une stratégie optimale pour chacune des deux sources de trafic.

7. En partant du point $\mathbf{y}^0 = (2, 2)$ pour (P_2), appliquer une itération de *Flow Deviation* avec le pas $\beta = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 (7 points)

On souhaite concevoir une topologie de réseau à moindre coût tout en garantissant que la communication restera possible même si un certain nombre de liens tombent en panne. On dispose en entrée du problème d'un graphe non-orienté $G = (N, E)$, où N est l'ensemble des nœuds et E un ensemble de liens potentiels. Le coût d'installation $c_{i,j}$ du lien $\{i, j\} \in E$ est connu. Une solution admissible est une topologie $G' = (N, E')$, où $E' \subseteq E$ est l'ensemble des liens retenus, telle que, pour chaque couple de nœuds s et t, la communication soit toujours possible entre s et t même si $r_{s,t}$ liens[1] sont supprimés du réseau G'. On souhaite déterminer les liens à installer de manière à satisfaire ces contraintes de connectivité à moindre coût.

Un résultat important en théorie des graphes, le Théorème de Menger, affirme que le nombre minimum de liens à supprimer pour déconnecter deux nœuds s et t est égal au nombre maximum de chemins lien-disjoints les reliant. L'objectif de l'exercice est d'exploiter ce résultat pour modéliser le problème comme un problème de flots dans un réseau et en proposer une *formulation nœud-lien.* Dans cette approche, à chaque paire $\{s, t\}$ de nœuds telle que $r_{s,t} \geq 1$, on associe un flot de trafic k de volume $q_k = r_{s,t}$ en choisissant arbitrairement un des nœuds comme la source. On note K l'ensemble des flots ainsi obtenus. On introduit deux types de variables de décision:

- x_{ij} est une variable binaire qui vaut 1 si le lien $\{i, j\}$ est retenu dans la topologie finale, et 0 sinon,
- $f_{i,j}^k$ est la quantité de trafic du flot k sur le lien $\{i, j\}$ dans le sens $i \longrightarrow j$.

Questions :

1. L'objectif est de minimiser le coût de la topologie finale. Comment formuler cet objectif d'optimisation ?

2. On définit pour chaque nœud $i \in N$, l'ensemble $V(i) = \{u \in N \;:\; \{u, i\} \in E\}$. Ecrire une contrainte de conservation garantissant la conservation de la demande de chaque flot k. On introduira pour cela des constantes z_i^k appropriées pour chaque nœud i et chaque flot k.

3. Proposer deux contraintes impliquant que le flot sur un lien $\{i, j\} \in E$ soit nul (dans les deux sens) si ce lien n'est pas retenu dans la topologie finale.

4. Ecrire la formulation complète du problème. De quel type de problème s'agit-il ? Avec quels algorithmes peut-on le résoudre ?

[1] On suppose que $r_{s,t} \geq 0$ et $r_{s,t} = r_{t,s}$ pour tout couple de nœuds $s, t \in N$.