Contrôle sur le cours

Modèles et Algorithmes d'Ingénierie de Trafic

Exercice 1 (12 points)

On considère le réseau de la Figure 1, qui doit écouler deux demandes. La première, dont l'origine est le nœud 1 et la destination le nœud 5, a pour volume $r_1 = 4$, et peut être partagée sur les chemins $p_1 = \{1, 4, 5\}$ et $p_2 = \{1, 3, 4, 5\}$. La seconde demande a pour origine le nœud 2 et pour destination le nœud 5, pour volume $r_2 = 8$, et elle peut être partagée sur les chemins $p_3 = \{2, 4, 5\}$ et $p_4 = \{2, 3, 4, 5\}$.

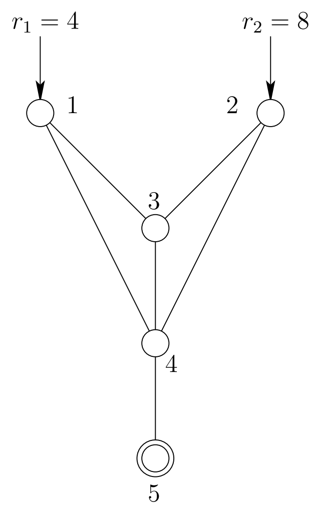

Figure 1: Un réseau avec deux demandes.

Dans la suite, on notera x_k la quantité de trafic envoyée sur le chemin p_k et $F_{i,j}$ le flot total sur le lien (i, j). Une stratégie de routage est un vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \mathbf{0}$ satisfaisant les contraintes $x_1 + x_2 = 4$ et $x_3 + x_4 = 8$. Le problème consiste à déterminer la stratégie de routage $\mathbf{x}$ qui minimise le coût suivant

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)} D_{i,j}\left(F_{i,j}\right), \quad \text{où } D_{i,j}\left(F_{i,j}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{i,j}\right)^2.$$

Questions :

Q1.1 Etant donnée une stratégie $\mathbf{x}$, exprimer le flot $F_{i,j}$ sur chacun des 6 liens du réseau en fonction des x_k.

Q1.2 En déduire que les coûts marginaux des chemins sont donnés par

$$\frac{\partial D}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = x_1 + 12 \qquad \frac{\partial D}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 2x_2 + x_4 + 12,$$
$$\frac{\partial D}{\partial x_3}(\mathbf{x}) = x_3 + 12 \qquad \frac{\partial D}{\partial x_4}(\mathbf{x}) = 2x_4 + x_2 + 12.$$

Q1.3 En utilisant les contraintes $x_1 + x_2 = 4$ et $x_3 + x_4 = 8$ et les expressions ci-dessus des coûts marginaux, montrer que le routage optimal est $\mathbf{x}^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$. On supposera qu'il est optimal de partager chacune des demandes sur ses deux chemins.

Q1.4 Soit $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 4, 0, 8)$. Déterminer le flot sur chaque lien et le coût de cette solution initiale.

Q1.5 En partant de la solution $\mathbf{x}^{(0)}$, appliquer une itération de l'algorithme *Flow Deviation* avec le pas $\beta = \frac{11}{16}$. Quel est le coût de la solution $\mathbf{x}^{(1)}$ obtenue ?

Exercice 2 (8 points)

Les applications parallèles de Big-Data comme MapReduce ou Spark alternent entre des phases de calcul et des phases de communication au cours desquelles les différentes tâches échangent des résultats intermédiaires en utilisant le réseau interne du datacenter. Un coflux est défini comme l'ensemble des flux de données transmis par une application entre deux étapes de calcul. Ces transferts de données pouvant représenter une proportion significative du temps total d'exécution, il est crucial de réduire le temps d'achèvement des coflux pour améliorer la performances des applications. Dans cet exercice, on considère les flux générés par des services en ligne ou des applications massivement parallèles critiques qui doivent être terminés dans des délais précis. L'objectif est de dériver une formulation mathématique du problème conjoint de contrôle d'admission et d'ordonnancement des coflux.

Le réseau du datacenter est modélisé par un graphe $G = (V, E)$. On note B_ℓ la capacité de transmission du lien $\ell \in E$. On considère un ensemble $\mathcal{C} = \{1, 2, ..., N\}$ de coflux, le coflux k arrivant dans le réseau du datacenter à l'instant a_k et devant être terminé avant l'instant d_k. On suppose que $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$. Chaque coflux k est une collection F_k de flots de données, le flot $j \in F_k$ ayant un volume $v_{k,j}$ de données à transférer à travers le réseau le long d'un chemin pré-déterminé $p_{k,j}$. On définit la constante $\delta_{k,j}^{\ell}$ comme valant 1 si $\ell \in p_{k,j}$ et 0 sinon.

Pour formuler le problème, on note $T = \max_{k=1,...,N} d_k$ la plus grande deadline et on partitionne l'intervalle de temps $[a_1, T]$ en $M = 2N - 1$ sous-intervalles disjoints Δ_m dont les extrémités valent soit a_k soit d_k pour certains coflux $k \in \mathcal{C}$ (voir Figure 2 pour une illustration avec $N = 3$ coflux). On note $|\Delta_m|$ la longueur en secondes de l'intervalle Δ_m. Dans la suite, on suppose que le débit alloué aux flots est constant sur ces intervalles et on note $x_{k,j}^m \geq 0$ le débit du flot $j \in F_k$ dans l'intervalle Δ_m. Le coflux k est considéré comme satisfait si tous les flots $j \in F_k$ peuvent transmettre leurs volumes $v_{k,j}$ de données dans l'intervalle $[a_k, d_k]$, auquel cas le coflux peut être admis. On définit la variable de décision z_k comme valant 1 si le coflux k est admis (i.e. sa deadline peut être satisfaite) et 0 sinon.

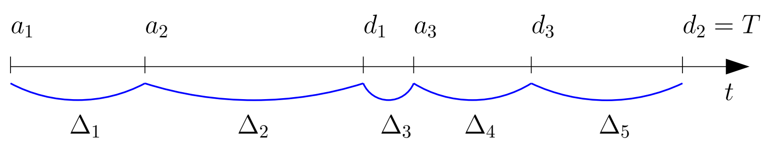

Figure 2: Les intervalles de temps Δ_m pour N=3.

Questions :

Q2.1 Ecrire les contraintes spécifiant les domaines de définition des variables $x_{k,j}^m$ et z_k.

Q2.2 Le but est d'admettre autant de coflux que possible. Comment formuler cet objectif d'optimisation ?

Q2.3 Ecrire la contrainte de capacité des liens.

Q2.4 Soit X_k l'ensemble des intervalles temporels Δ_m couvrant la durée de vie $[a_k, d_k]$ du coflux k, c'est-à-dire que $[a_k, d_k] = \bigcup_{m \in X_k} \Delta_m$. Ecrire une contrainte linéaire imposant qu'un coflux k n'est admis que si chacun de ses flots $j \in F_k$ peut transmettre son volume de données dans l'intervalle $[a_k, d_k]$.

Q2.5 Ecrire la formulation complète du problème. De quel type de problème s'agit-il ? Avec quels algorithmes peut-on le résoudre ?