Problèmes de Planification de Réseaux

Olivier Brun

brun@laas.fr

LAAS-CNRS
7 Av. Colonel Roche, 31077 Toulouse, France.

INSA, 2024.

Outline

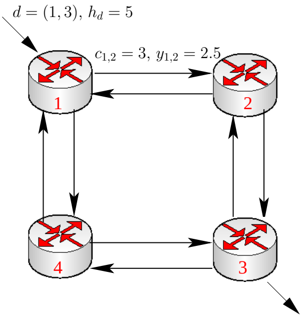
Introduction

- **Objectifs**
  - Montrer que la plupart des problèmes de planification de réseaux peuvent se formuler comme des problèmes de multiflot.
  - Introduire les formulations lien-chemin et noeud-lien.
  - Donner des exemples simples de problèmes de routage, de dimensionnement et de conception de topologie. La démarche de modélisation est plus importante que les exemples en eux-mêmes.
  - Introduire les concepts d'équité dans les réseaux et de planification robuste (incertitude sur la demande).

Formulations Lien-Chemin et Noeud-Lien

Notations

- **Réseau**
  - Graphe dirigé $G = (V, E)$.
  - Capacité du lien $e \in E$: c_e.
  - Trafic sur $e \in E$: y_e.
- **Flots de trafic**
  - Ensemble D de demandes en trafic.
  - Chaque flot $d \in D$ est caractérisé par :
    - sa source s_d,
    - sa destination t_d,
    - sa demande h_d.



Formulation Lien-Chemin d'un problème de Routage

- **Objectif :** minimiser la bande-passante totale consommée.
- **Chemins :**
  - On note Π_d l'ensemble des chemins candidats pour la demande d.
  - On note x_d^π la quantité de trafic du flot d sur le chemin $\pi \in \Pi_d$.
  - On pose $\delta_e^\pi = 1$ si le chemin π passe par le lien e, et $\delta_e^\pi = 0$ sinon.
- **Formulation :**

$$
\begin{array}{rccr}
\text{Minimiser} & \sum_e y_e & & (1) \\
\text{s.t} & & & \\
 & \sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d & d \in D & (2) \\
 & y_e = \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi & e \in E & (3) \\
 & y_e \leq c_e & e \in E & (4) \\
 & \mathbf{x} \geq 0 & & (5)
\end{array}
$$

Formulation Lien-Chemin (2)

- Variables de décision : x_d^π (éliminer les y_e).
- Contraintes de conservation : $\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d \quad d \in D$.
- Contraintes de capacité : $y_e \leq c_e \quad e \in E$.
- Problème de PL (algorithme du simplex)
- Avantages/Inconvénients :
  - Augmentation exponentielle du nombre de chemins : sous-optimalité (génération de colonnes).
  - Prise en compte des contraintes sur les chemins (nombre de hops, chemins disjoints, etc.)

Formulation Noeud-Lien d'un problème de Routage

- **Objectif :** minimiser la bande-passante totale consommée.
- **Notations :**
  - On note x_d^e la quantité de trafic du flot d sur le lien e.
  - On note $I(n)$ (resp. $O(n)$) les liens entrants (resp. sortants) au noeud n.
  - On définit les constantes suivantes :

$$z_d^n = \begin{cases} h_d & \text{si } n = s_d \\ -h_d & \text{si } n = t_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Formulation Noeud-Lien (2)

- **Formulation :**

$$\begin{aligned}
\text{Minimiser} \quad & \textstyle\sum_e y_e & & (6)\\
\text{s.t} \quad & & & \\
& \textstyle\sum_{e\in O(n)} x_d^e - \sum_{e\in I(n)} x_d^e = z_d^n & n \in V, d \in D \quad & (7)\\
& y_e = \textstyle\sum_{d\in D} x_d^e & e \in E \quad & (8)\\
& y_e \leq c_e & e \in E \quad & (9)\\
& \mathbf{x} \geq 0 & & (10)
\end{aligned}$$

- Problème de PL (algorithme du simplex)
- **Avantages/Inconvénients** :
  - Pas d'hypothèse sur les chemins candidats.
  - Augmentation du nombre de contraintes.

Problèmes de routage

Routage avec partage de charge équitable

- **Objectif :**
  - Router équitablement la demande d sur k_d chemins.
  - Variables de décision : $u_d^\pi = 1$ si π est utilisé par d, $u_d^\pi = 0$ sinon.
- **Formulation :**

$$
\begin{array}{lccr}
\text{Minimiser} & \sum_e y_e & & (11) \\
\text{s.t} & & & \\
 & \sum_{\pi \in \Pi_d} u_d^\pi = k_d & d \in D & (12) \\
 & y_e = \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi \, u_d^\pi \frac{h_d}{k_d} & e \in E & (13) \\
 & 0 \leq y_e \leq c_e & e \in E & (14) \\
 & u_d^\pi \in \{0, 1\} & \pi \in \Pi_d, d \in D & (15)
\end{array}
$$

- Problème de PLNE.
- Cas particulier : problème de monoroutage ($k_d = 1$)
  - Routage des LSP dans un réseau MPLS.

Minimisation du taux maximal d'utilisation

- **Objectif :**
  - Minimiser la bande-passante totale consommée a tendance à saturer des liens (pourquoi ?).
  - En général, on veut garantir une certaine performance aux flux.
  - Minimiser le taux maximal d'utilisation $\rho = \max_e \frac{y_e}{c_e}$
- **Formulation :**

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiser} \quad & \rho && && (16)\\
\text{s.t} \quad & && && \\
& \sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d && d \in D && (17)\\
& y_e = \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi && e \in E && (18)\\
& \frac{y_e}{c_e} \leq \rho && e \in E && (19)\\
& \mathbf{x} \geq 0 && && (20)
\end{aligned}
$$

Optimisation non-linéaire du routage

- **Objectif :**
  - Minimiser le délai moyen des paquets dans le réseau.
  - Formule M/M/1 et loi de Little : $\sum_e \frac{1}{c_e - y_e}$
- **Formulation :**

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiser} \quad & \sum_e \frac{1}{c_e - y_e} && && (21) \\
\text{s.t} \quad & && && \\
& \sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d && d \in D && (22) \\
& \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi = y_e && e \in E && (23) \\
& y_e \leq c_e && e \in E && (24) \\
& \mathbf{x} \geq 0 && && (25)
\end{aligned}
$$

- Problème de PNL.
- Cf. cours sur l'optimisation non-linéaire du routage.

Optimisation des métriques IP

- **Objectif :**
  - OSPF et ISIS routent le trafic au PCC suivant les métriques w_e des liens.
  - La métrique w_e est une variable entière : $w_e \in \Omega = \left[1, 2^{16} - 1\right]$
  - Variables de décision : vecteur $\mathbf{w} = (w_e)_{e \in E} \in \Omega^M$.
- **Formulation :**

$$\min_{\mathbf{w} \in \Omega^M} \sum_e \Phi_e \left[y_e(\mathbf{w})\right]$$

- La charge y_e dépend des PCC, et donc du vecteur $\mathbf{w}$.
- Problème combinatoire : formulation en PLNE possible mais lourde.
- Cf. cours sur l'optimisation des métriques IP.

Problèmes de dimensionnement

Problème de dimensionnement

- **Objectif :** minimiser le coût du trafic sur chaque lien
  - On note ζ_e le coût d'une unité de trafic sur le lien e.
  - La capacité à installer sur le lien e correspond à y_e.
- **Formulation :**

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimiser} && \textstyle\sum_e \zeta_e y_e && && (26)\\
&\text{s.t} && && && \\
& && \textstyle\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d && d \in D && (27)\\
& && \textstyle\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq y_e && e \in E && (28)\\
& && \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0 && && (29)
\end{aligned}
$$

Problème de dimensionnement

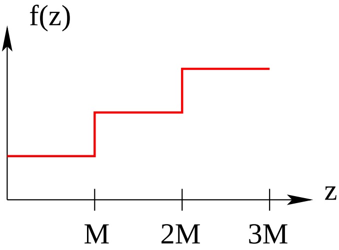
- **Propriétés d'une solution optimale :**
  - La contrainte de capacité est vérifiée en tant qu'égalité.
  - Chaque demande est routée sur un PCC au sens des métriques ζ_e.
  - S'il y a plusieurs PCC, le partage est arbitraire.

$$\begin{aligned}
\sum_{e} \zeta_e \, y_e &= \sum_{e} \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \zeta_e \delta_e^\pi \, x_d^\pi \\
&= \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \left(\sum_{e \in \pi} \zeta_e \right) x_d^\pi \\
&= \sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \zeta_d^\pi \, x_d^\pi
\end{aligned}$$

- $\zeta_d^\pi = \sum_{e \in \pi} \zeta_e$ est la longueur du chemin π.
- Résolution de plusieurs problèmes de PCC découplés : $min \sum_{\pi \in \Pi_d} \zeta_d^\pi \, x_d^\pi$ s.t. $\sum_{\pi} x_d^\pi = h_d$

Dimensionnement avec capacités modulaires

- **Capacité installée par modules de taille M**
  - Minimiser le coût total des modules installés.



Exemple : SDH au niveau VC-4 offre des liens de modularité 63 PCM (Pulse Code Modulation).

- Variables de décision : $y_e \in \mathbb{N}$ représente le nombre de modules installés sur le lien e.

Dimensionnement avec capacités modulaires

- **Formulation :**

$$\text{Minimiser} \quad \sum_e \zeta_e \, y_e \tag{30}$$

s.t

$$\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^{\pi} = h_d \qquad d \in D \tag{31}$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^{\pi} \, x_d^{\pi} \leq M \, y_e \qquad e \in E \tag{32}$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^{|E|} \tag{33}$$

- Problème de PLNE.
- La propriété de routage au PCC n'est plus vraie : il peut être intéressant de profiter de la capacité d'un module déjà installé.
- Variation : modules de capacités différentes.

Dimensionnement avec contraintes de délais

- **Objectif :** Minimiser le coût des liens
  - Routage fixé : y_e est une constante.
  - Variables de décision : c_e.
  - Contrainte non-linéaire sur le délais moyen des paquets.
- **Formulation :**

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiser} \quad & \sum_e \zeta_e c_e && (34) \\
\text{s.t} \quad & && \\
& y_e \le c_e \qquad e \in E && (35) \\
& \sum_e \frac{y_e}{c_e - y_e} \le d_{max} && (36) \\
& \mathbf{c} \ge 0 && (37)
\end{aligned}
$$

- Résolution avec les multiplicateurs de Lagrange : cf TD.

Conception de topologie

Conception de topologie

- **Objectif :** Minimiser le coût des liens installés
  - Coût ζ_e par unité de trafic et coût κ_e d'installation.
  - Variables de décision :

$$u_e = \begin{cases} 1 & \text{si le lien } e \text{ est installé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  - Minimiser le coût total du réseau $F = \sum_e (\zeta_e y_e + \kappa_e u_e)$.

- **Formulation :**

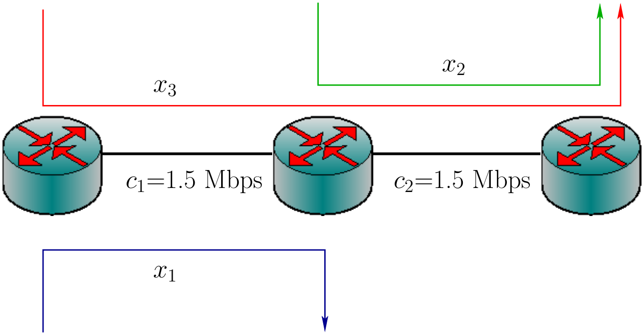
$$
\begin{aligned}
\text{Minimiser} \quad & \textstyle\sum_e \zeta_e y_e + \kappa_e u_e & & (38)\\
\text{s.t} \quad & & & \\
& \textstyle\sum_{\pi \in \Pi_d} x_d^\pi = h_d & d \in D \quad & (39)\\
& \textstyle\sum_{d \in D} \sum_{\pi \in \Pi_d} \delta_e^\pi x_d^\pi \leq y_e & e \in E \quad & (40)\\
& y_e \leq \Delta\, u_e & e \in E \quad & (41)\\
& y_e \geq 0, u_e \in \{0, 1\} & e \in E \quad & (42)
\end{aligned}
$$

- Δ est une constante suffisamment grande.
- La contrainte $y_e \leq \Delta\, u_e$ impose $y_e = 0$ si $u_e = 0$.

Equité dans les réseaux

Equité dans les réseaux

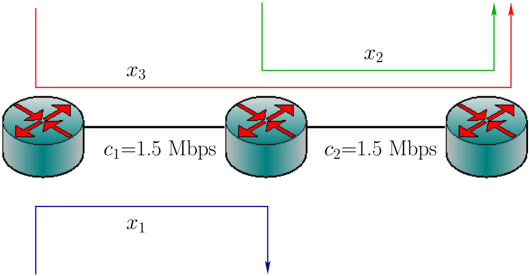
- **Demandes élastiques**



- **Comment partager la capacité du réseau entre les flots ?**
  - Garantir une certaine équité entre les flux.
  - Garantir un débit réseau élevé (volume de trafic écoulé).

Max-Min Fairness

- **Algorithme de Water-filling**
  - En partant de 0, augmenter toutes les demandes au même rythme jusqu'à saturation d'un lien.
  - Continuer pour les demandes ne passant pas par un lien saturé.



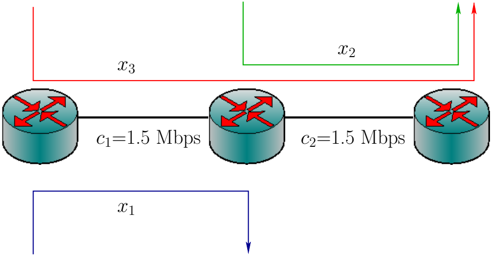
Solution MMF :

$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3}{4}$

- **Exemple :** c_1=1.5 Mbps, c_2=2 Mbps $\Longrightarrow x_1 = x_3 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{5}{4}$.
- **Maximisation du débit minimal des utilisateurs**
  - Solution équitable d'un point de vue utilisateur.

Maximisation du débit réseau

- **Objectif :**
  - Maximiser $x_1 + x_2 + x_3$ s.t. $x_1 + x_3 \leq c_1$ et $x_2 + x_3 \leq c_2$.
  - Problème de PL (algorithme du simplex).

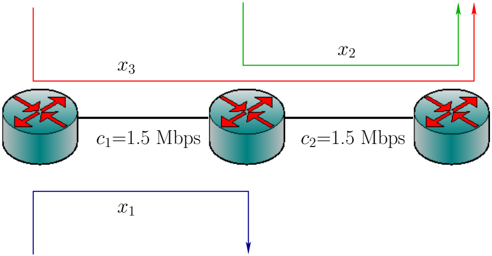


Solution : $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 0$.
Débit : $x_1 + x_2 + x_3$=3 Mbps.

- **Comparaison :** débit(MMF)= $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \times \frac{3}{4}$=2.25.
- **Conclusion :**
  - Ce qui est bon pour le réseau n'est pas forcément bon pour tous les utilisateurs.
  - Trouver un compromis entre équité et efficacité réseau.

Proportionnal fairness

- **Objectif :**
  - Max $\log(x_1) + \log(x_2) + \log(x_3)$ s.t. $x_1 + x_3 \leq c_1$, $x_2 + x_3 \leq c_2$.
  - Le log interdit la valeur 0 et rend non profitable d'affecter trop de trafic à une seule demande (concavité).
  - Problème de PNL.



Solution : $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$.
Débit : $x_1 + x_2 + x_3$=2.5 Mbps.

- **Moins équitable que MMF mais plus efficace.**

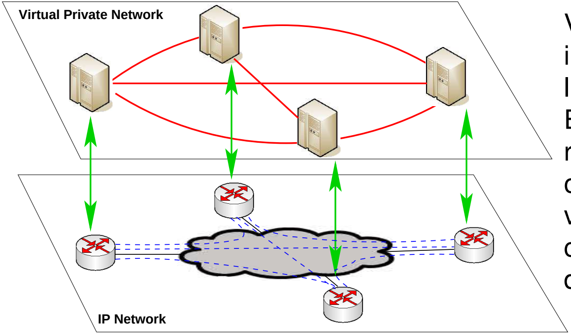
Incertitude sur la demande & Conception de VPN

Incertitude sur la demande

- **Motivation :**
  - Dans les problèmes précédents, on a supposé connaître la demande en trafic h_d du flot $d = (s, t)$.
  - En pratique, les opérateurs n'ont qu'une connaissance approximative de la demande
    - la mesure du trafic (avec NetFlow par exemple) peut générer beaucoup d'overhead.
    - la matrice de trafic $\mathbf{h} = (h_{s,t})_{s,t}$ évolue en permanence.
    - les prévisions de trafic peuvent être entachées d'erreur.
- **Planification robuste :**
  - Intégrer l'incertitude sur la demande aux problèmes de planification.
  - La matrice de trafic $\mathbf{h}$ appartient à un certain ensemble $\mathcal{H}$.
- **Exemple illustratif :**
  - Conception de VPN

Conception de VPN

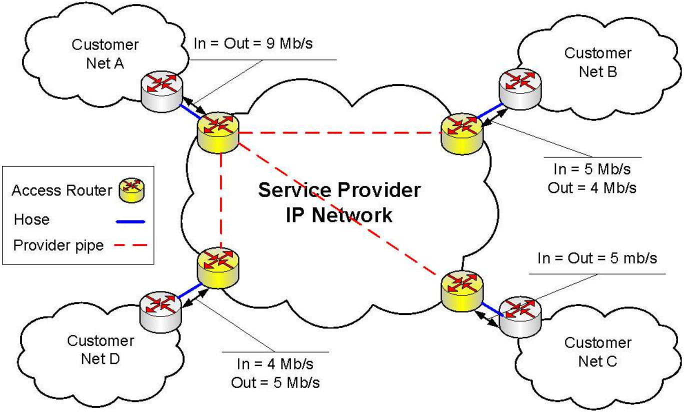
- **Réseaux Privés Virtuels (VPN) :**
  - Service proposé par les opérateurs.
  - Le client dispose d'une infrastructure privée et virtuelle de communication longue distance à moindre coût.



Pour le client, les noeuds du VPN sont directement interconnectés grâce à des liens virtuels.
En fait, ils sont reliés à des routeurs IP du réseau opérateur, et les liens virtuels correspondent à des chemins entre ces routeurs dans le réseau IP.

Conception de VPN (1)

- **Spécification de la demande avec le Hose Model**
  - Le client spécifie le trafic maximal qu'il peut envoyer/recevoir.
  - L'opérateur réserve des ressources en conséquence dans son réseau.



- **Ensemble d'incertitude sur la demande**
  - $Q \subseteq V$: ensemble des nœuds du VPN.
  - Ensemble $\mathcal{H}$ de matrices de trafic $\mathbf{h} \geq \mathbf{0}$ compatibles :

$$h_{s,s} = 0, \quad \sum_{t \in Q} h_{s,t} \leq b^{+}(s) \quad \text{et} \quad \sum_{t \in Q} h_{t,s} \leq b^{-}(s).$$

  où $b^{+}(v)$ (resp $b^{-}(v)$) est le débit maximal en émission (resp. réception) du nœud v.

- Exemple :

	A	B	C	D	Total
A	0	3	3	3	9
B	3	0	1	0	4
C	3	1	0	1	5
D	3	1	1	0	5
Total	9	5	5	4	23

	A	B	C	D	Total
A	0	4	3	2	9
B	2	0	1	1	4
C	3	1	0	1	5
D	4	0	1	0	5
Total	9	5	5	4	23

Conception de VPN (3)

- **Problème de l'opérateur :**
  - Router les liens virtuels $(s, t) \in Q^2$ de manière à minimiser la bande-passante réservée $\sum_e y_e$.
  - On note $f_{s,t}^e$ la fraction du flot (s, t) routée sur le lien e.

$$\sum_{e \in O(v)} f_{s,t}^e - \sum_{e \in I(v)} f_{s,t}^e = z_{s,t}^v = \begin{cases} 1 & \text{si } v = s \\ -1 & \text{si } v = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conception de VPN (4)

- **Formulation Noeud-Lien**

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiser} & \displaystyle\sum_{e \in E} y_e & \\
\text{s.t.} & & \\
& \displaystyle\sum_{e \in O(v)} f^e_{s,t} - \sum_{e \in I(v)} f^e_{s,t} = z^v_{s,t}, & s,t \in Q, v \in V \\
& \displaystyle\sum_{s,t \in Q} f^e_{s,t}\, h_{s,t} \le y_e, & e \in E, \mathbf{h} \in \mathcal{H} \\
& y_e \le c_e, & e \in E \\
& 0 \le f^e_{s,t} \le 1, y_e \ge 0 & e \in E, s,t \in Q
\end{array}
$$

  - Nombre infini de contraintes lié à $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$!

- **Flot maximal sur le lien *e* pour un routage fixé**
  - Les variables du problème primal sont les volumes de trafic $h_{s,t}$.

PRIMAL

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & \sum_{s,t} h_{s,t} f_e^{s,t} & \\
\text{s.t.} & & \\
& \sum_{t \neq s} h_{s,t} \leq b_s^+ & s \in Q \\
& \sum_{s \neq t} h_{s,t} \leq b_t^- & t \in Q \\
& h_{s,t} \geq 0 & s,t \in Q
\end{array}
$$

DUAL

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & \sum_s b_s^+ \lambda_{e,s}^+ + b_s^- \lambda_{e,s}^- & \\
\text{s.t.} & & \\
& f_e^{s,t} \leq \lambda_{e,s}^+ + \lambda_{e,s}^- & s,t \in Q \\
& \lambda_{e,s}^+ \geq 0, \lambda_{e,s}^- \geq 0 & s \in Q
\end{array}
$$

- **Formulation Noeud-Lien**

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{e \in E} y_e$$

s.t.

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{e \in O(v)} f^e_{s,t} - \sum_{e \in I(v)} f^e_{s,t} = z^v_{s,t}, & s,t \in Q, v \in V \\
\sum_s b^+_s \lambda^+_{e,s} + b^-_s \lambda^-_{e,s} \leq y_e, & e \in E, s \in Q \\
f^{s,t}_e \leq \lambda^+_{e,s} + \lambda^-_{e,s} & e \in E, s,t \in Q \\
y_e \leq c_e, & e \in E \\
0 \leq f^e_{s,t} \leq 1, y_e \geq 0 & e \in E, s,t \in Q \\
\lambda^+_{e,s} \geq 0, \lambda^-_{e,s} \geq 0 & e \in E, s \in Q
\end{array}
$$

- Résolution possible en PL avec le simplex.
- En pratique, les liens virtuels sont acheminés par des LSP dédiées qui sont monoroutés, i.e. $f^e_{s,t} \in \{0,1\}$. Problème beaucoup plus complexe.