Contrôle sur le cours
Modèles et Algorithmes d'Ingénierie de Trafic

29 Mars 2024

Exercice 1 (13 points)

On considère un problème d'équilibrage de charge dans lequel K sources répartissent leur trafic sur N serveurs. On note ρ_i la demande en trafic de la source $i = 1, 2, \ldots, K$ (en paquet/s) et $x_{i,j}$ la quantité de trafic qu'elle envoie vers le serveur $j = 1, 2, \ldots, N$. Ce serveur est constitué de n_j unités de traitement pouvant travailler en parallèle, chacune ayant un taux de service de r paquet/s. On suppose que la capacité totale du système est supérieure à la demande en trafic, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{K} \rho_i < \sum_{k=1}^{N} n_k r$. Sous certaines hypothèses, on peut montrer que le nombre moyen de paquets sur le serveur j est alors $\mathbb{E}\left[N_j\right] = D_j(y_j)$, où $y_j = \sum_{i=1}^{K} x_{i,j}$ est le trafic offert total au serveur j et $D_j(y) = n_j y/(n_j r - y)$.

L'objectif est de déterminer la stratégie de routage $\mathbf{x}^* = (x_{i,j}^*)$ qui minimise le délai moyen de traitement des paquets ou, de façon équivalente, le nombre moyen de paquets dans le système. Mathématiquement, le problème s'écrit

$$\text{Minimiser } D(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} D_j(y_j) \qquad (P_1)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{N} x_{i,j} = \rho_i, \quad i = 1, \ldots, K,$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{K} x_{i,j} < n_j r, \quad j = 1, \ldots, N,$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, K, \ j = 1, \ldots, N.$$

Pour le résoudre, on va considérer le problème auxiliaire (également convexe) suivant :

$$\text{Minimiser } F(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{N} D_j(y_j) \qquad (P_2)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = \sum_{i=1}^{K} \rho_i,$$

$$0 \leq y_j < n_j r, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Questions :

1. Dans le contexte du problème (P_2), rappeler brièvement les conditions d'optimalité du routage.

Solution: Le problème étant convexe, la stratégie $\mathbf{y}^*$ est optimale si et seulement si $y_j^* > 0$ implique $\frac{\partial F}{\partial y_j}(\mathbf{y}^*) \leq \frac{\partial F}{\partial y_k}(\mathbf{y}^*)$ pour tout $k = 1, \ldots, N$. Comme $\frac{\partial F}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = D_k'(y_k) = \frac{n_k^2 r}{(n_k r - y_k)^2}$, on en déduit que pour une solution optimale $\mathbf{y}^*$, $y_j^* > 0$ implique que

$$\frac{n_j^2 r}{(n_j r - y_j^*)^2} \le \frac{n_k^2 r}{(n_k r - y_k^*)^2},$$

pour tout $k = 1, \ldots, N$.

2. En déduire que pour une solution optimale $\mathbf{y}^*$ de (P_2), $y_j^* > 0$ implique que $y_j^*/n_j \le y_k^*/n_k$ pour tout $k = 1, \ldots, N$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\frac{n_j^2 r}{(n_j r - y_j^*)^2} \le \frac{n_k^2 r}{(n_k r - y_k^*)^2} &\iff \frac{n_j}{n_j r - y_j^*} \le \frac{n_k}{n_k r - y_k^*}, \\
&\iff \frac{n_j r - y_j^*}{n_j} \ge \frac{n_k r - y_k^*}{n_k}, \\
&\iff \frac{y_j^*}{n_j} \le \frac{y_k^*}{n_k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour une solution optimale $\mathbf{y}^*$, $y_j^* > 0$ implique que $y_j^*/n_j \le y_k^*/n_k$ pour tout $k = 1, \ldots, N$.

3. En raisonnant par l'absurde, en déduire que pour toute solution optimale $\mathbf{y}^*$ de (P_2), on a $y_k^* > 0$ pour tout $k = 1, \ldots, N$.

Solution: Supposons qu'il existe un serveur k tel que $y_k^* = 0$. La contrainte de conservation du trafic, $\sum_{j=1}^N y_j^* = \sum_{i=1}^K \rho_i$, implique qu'il existe au moins un serveur $j \ne k$ pour lequel $y_j^* > 0$. La solution $\mathbf{y}^*$ étant optimale, on doit alors avoir $y_j^*/n_j \le y_k^*/n_k$, c'est-à-dire $0 < y_j^* \le n_j \times 0/n_k = 0$. C'est une contradiction, donc si $\mathbf{y}^*$ est une solution optimale du problème (P_2), on a $y_k^* > 0$ pour tout $k = 1, \ldots, N$.

4. En déduire que pour une solution optimale $\mathbf{y}^*$ du problème (P_2), on a nécessairement $y_j^* = \frac{n_j}{n_1} y_1^*$. En exploitant la contrainte de conservation du trafic, montrer que cela implique que

$$y_j^* = \frac{n_j}{\sum_{k=1}^N n_k} \times \sum_{i=1}^K \rho_i, \qquad \text{pour tout } j = 1, \ldots, N.$$

Solution: Comme $y_k^* > 0$ pour tout $k = 1, \ldots, N$, tous les serveurs ont des coûts marginaux égaux, ce qui d'après la question (2) implique que $y_j^*/n_j = y_k^*/n_k$ pour tout j, k. En particulier $y_k^* = n_k y_1^*/n_1$. Avec la contrainte de conservation du trafic, on a donc

$$\sum_{k=1}^N y_k^* = \frac{y_1^*}{n_1} \sum_{k=1}^N n_k = \sum_{i=1}^K \rho_i,$$

d'où l'on déduit que $y_1^* = n_1 \times \left(\sum_{i=1}^K \rho_i\right) / \left(\sum_{k=1}^N n_k\right)$, et donc que $y_j^* = n_j \times \left(\sum_{i=1}^K \rho_i\right) / \left(\sum_{k=1}^N n_k\right)$. Puisque $\sum_{i=1}^K \rho_i < \sum_{k=1}^N n_k r$, on a bien $y_j^* < n_j r$.

5. Montrer que si $\mathbf{y}^*$ est une solution optimale du problème (P_2), la stratégie $\mathbf{x}^*$ définie par

$$x_{i,j}^* = \frac{\rho_i}{\sum_{k=1}^K \rho_k} y_j^*, \quad i = 1, \ldots, K, \; j = 1, \ldots, N,$$

est une solution optimale du problème (P_1).

Solution: On remarque tout d'abord que $\mathbf{x}^*$ est une solution admissible de (P_1). En effet, $y_j^* > 0$ implique que $x_{i,j}^* > 0$, $\forall i,j$. D'autre part, $\sum_{j=1}^N y_j^* = \sum_{k=1}^K \rho_k$ implique que $\sum_{j=1}^N x_{i,j}^* = \frac{\rho_i}{\sum_{k=1}^K \rho_k} \sum_{j=1}^N y_j^* = \rho_i$ pour tout $i = 1,\dots,K$. Enfin, on a bien $\sum_{i=1}^K x_{i,j}^* = y_j^* < n_j r$. Vu que $x_{i,j}^* > 0$, $\forall i,j$, cette solution admissible est optimale si et seulement si tous les coûts marginaux $\frac{\partial D}{\partial x_{i,j}}(\mathbf{x}^*)$ sont égaux. On a

$$\frac{\partial D}{\partial x_{i,j}}(\mathbf{x}^*) = D_j'(y_j^*) = D_k'(y_k^*) = \frac{\partial D}{\partial x_{i,k}}(\mathbf{x}^*), \quad i = 1,\dots,K,\ \ j,k = 1,\dots,N,$$

la seconde égalité découlant du fait que $\mathbf{y}^*$ est une solution optimale de (P_2). On conclut donc que $\mathbf{x}^*$ est une solution optimale de (P_1).

Dans la suite, on suppose que l'on a $K = 2$ sources de trafic, avec les demandes $\rho_1 = \rho_2 = 2$. On a d'autre part $N = 2$ serveurs avec les paramètres suivants : $n_1 = 1$, $n_2 = 3$ et $r = \frac{5}{2}$.

6. Calculer les charges optimales y_1^* et y_2^* des serveurs et une stratégie optimale pour chacune des deux sources de trafic.

Solution: On a $y_1^* = n_1 \times (\rho_1 + \rho_2)/(n_1 + n_2) = 1 \times 4/4 = 1$ et $y_2^* = n_2 \times (\rho_1 + \rho_2)/(n_1 + n_2) = 3 \times 4/4 = 3$. On en déduit que $x_{i,1}^* = \rho_i \times y_1^*/(\rho_1 + \rho_2) = 2 \times 1/4 = \frac{1}{2}$ et $x_{i,2}^* = \rho_i \times y_2^*/(\rho_1 + \rho_2) = 2 \times 3/4 = \frac{3}{2}$ pour $i = 1, 2$.

7. En partant du point $\mathbf{y}^0 = (2, 2)$ pour (P_2), appliquer une itération de *Flow Deviation* avec le pas $\beta = \frac{1}{2}$.

Solution: On commence par calculer les coûts marginaux de chacun des deux serveurs :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}^0) &= \frac{n_1^2 r}{(n_1 r - y_1^0)^2} = \frac{5/2}{(5/2 - 2)^2} = 10, \\
\frac{\partial F}{\partial y_2}(\mathbf{y}^0) &= \frac{n_2^2 r}{(n_2 r - y_2^0)^2} = \frac{3^2 \times 5/2}{(15/2 - 2)^2} = \frac{90}{121} \approx 0,74.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial y_2}(\mathbf{y}^0) < \frac{\partial F}{\partial y_1}(\mathbf{y}^0)$, on considère le point extrémal $\bar{\mathbf{y}} = (0, 4)$, et on obtient la solution

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^1 &= \mathbf{y}^0 + \beta\left[\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^0\right], \\
&= (2, 2) + \beta\left[(0, 4) - (2, 2)\right], \\
&= (2 - 2\beta, 2 + 2\beta), \\
&= (1, 3),
\end{aligned}$$

qui est la solution optimale du problème (P_2).

Exercice 2 (7 points)

On souhaite concevoir une topologie de réseau à moindre coût tout en garantissant que la communication restera possible même si un certain nombre de liens tombent en panne. On dispose en entrée du problème d'un graphe non-orienté $G = (N, E)$, où N est l'ensemble des nœuds et E un ensemble de liens potentiels. Le coût d'installation $c_{i,j}$ du lien $\{i, j\} \in E$ est connu. Une solution admissible est une topologie $G' = (N, E')$, où $E' \subseteq E$ est l'ensemble des liens retenus, telle que, pour chaque couple de nœuds s et t, la communication soit toujours possible entre s et t même si $r_{s,t}$ liens[1] sont supprimés du réseau G'. On souhaite déterminer les liens à installer de manière à satisfaire ces contraintes de connectivité à moindre coût.

[1]On suppose que $r_{s,t} \geq 0$ et $r_{s,t} = r_{t,s}$ pour tout couple de nœuds $s, t \in N$.

Un résultat important en théorie des graphes, le Théorème de Menger, affirme que le nombre minimum de liens à supprimer pour déconnecter deux nœuds s et t est égal au nombre maximum de chemins lien-disjoints les reliant. L'objectif de l'exercice est d'exploiter ce résultat pour modéliser le problème comme un problème de flots dans un réseau et en proposer une *formulation nœud-lien*. Dans cette approche, à chaque paire $\{s, t\}$ de nœuds telle que $r_{s,t} \geq 1$, on associe un flot de trafic k de volume $q_k = r_{s,t}$ en choisissant arbitrairement un des nœuds comme la source. On note K l'ensemble des flots ainsi obtenus. On introduit deux types de variables de décision:

- x_{ij} est une variable binaire qui vaut 1 si le lien $\{i, j\}$ est retenu dans la topologie finale, et 0 sinon,
- $f_{i,j}^k$ est la quantité de trafic du flot k sur le lien $\{i, j\}$ dans le sens $i \to j$.

Questions :

1. L'objectif est de minimiser le coût de la topologie finale. Comment formuler cet objectif d'optimisation ?

Solution: Il s'agit de minimiser $\sum_{\{i,j\}\in E} c_{i,j} x_{i,j}$.

2. On définit pour chaque nœud $i \in N$, l'ensemble $V(i) = \{u \in N \ : \ \{u, i\} \in E\}$. Ecrire une contrainte de conservation garantissant la conservation de la demande de chaque flot k. On introduira pour cela des constantes z_i^k appropriées pour chaque nœud i et chaque flot k.

Solution:

$$\sum_{u\in V(i)} f_{u,i}^k - \sum_{v\in V(i)} f_{i,v}^k = z_i^k \quad \text{pour tout } i \in N \text{ et } k \in K.$$

où la constante z_i^k est égale à $-q_k$ si le nœud i est l'origine du flot k, q_k si c'est sa destination, et 0 sinon.

3. Proposer deux contraintes impliquant que le flot sur un lien $\{i, j\} \in E$ soit nul (dans les deux sens) si ce lien n'est pas retenu dans la topologie finale.

Solution:

$$f_{i,j}^k \leq x_{i,j} \quad \text{pour tout } \{i, j\} \in E \text{ et } k \in K,$$
$$f_{j,i}^k \leq x_{i,j} \quad \text{pour tout } \{i, j\} \in E \text{ et } k \in K.$$

4. Ecrire la formulation complète du problème. De quel type de problème s'agit-il ? Avec quels algorithmes peut-on le résoudre ?

Solution:

$$\text{Minimize} \sum_{\{i,j\}\in E} c_{i,j} x_{i,j}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{u\in V(i)} f_{u,i}^k - \sum_{v\in V(i)} f_{i,v}^k = z_i^k \quad \text{pour tout } i \in N \text{ et } k \in K,$$
$$f_{i,j}^k \leq x_{i,j} \quad \text{pour tout } \{i, j\} \in E \text{ et } k \in K,$$
$$f_{j,i}^k \leq x_{i,j} \quad \text{pour tout } \{i, j\} \in E \text{ et } k \in K,$$
$$f_{i,j}^k, f_{j,i}^k \geq 0 \quad \text{pour tout } \{i, j\} \in E \text{ et } k \in K,$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pour tout } \{i, j\} \in E.$$

Il s'agit d'un problème linéaire mixte avec des variables binaires (les $x_{i,j}$) et des variables continues (les $f_{i,j}^k$). On peut le résoudre de manière exacte avec un algorithme de Branch-and-Bound ou de Branch-and-Cut.