Contrôle sur le cours

Modèles et Algorithmes d'Ingénierie de Trafic

Exercice 1 (12 points)

Questions :

Q1.1 Etant donnée une stratégie de routage $\mathbf{x}$, exprimer le flot $F_{i,j}$ sur chacun des 6 liens du réseau en fonction des x_k.
Réponse : De manière générale, on a $F_{i,j} = \sum_{p_k:(i,j)\in p_k} x_k$. On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} F_{1,3} &= x_2, & F_{1,4} &= x_1, & F_{2,3} &= x_4, \\ F_{2,4} &= x_3, & F_{3,4} &= x_2 + x_4, & F_{4,5} &= r_1 + r_2 = 12. \end{aligned}$$

Q1.2 En déduire que les coûts marginaux des chemins sont donnés par

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= x_1 + 12 & \frac{\partial D}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= 2x_2 + x_4 + 12, \\ \frac{\partial D}{\partial x_3}(\mathbf{x}) &= x_3 + 12 & \frac{\partial D}{\partial x_4}(\mathbf{x}) &= 2x_4 + x_2 + 12. \end{aligned}$$

Réponse : Vu que $D'_{i,j}(F_{i,j}) = F_{i,j}$, on a $\frac{\partial D}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)\in p_k} F_{i,j}$. Ainsi, $\frac{\partial D}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = F_{1,4} + F_{4,5} = x_1 + 12$ et $\frac{\partial D}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = F_{1,3} + F_{3,4} + F_{4,5} = 2x_2 + x_4 + 12$. Les autres coûts marginaux sont obtenus de manière similaire.

Q1.3 En utilisant les contraintes $x_1 + x_2 = 4$ et $x_3 + x_4 = 8$ et les expressions ci-dessus des coûts marginaux, montrer que le routage optimal est $\mathbf{x}^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$. On supposera qu'il est optimal de partager chacune des demandes sur ses deux chemins.
Réponse : Avec l'hypothèse suggérée, le routage optimal est tel que $\frac{\partial D}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial D}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)$ et $\frac{\partial D}{\partial x_3}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial D}{\partial x_4}(\mathbf{x}^*)$. Cela donne $x_1^* = 2x_2^* + x_4^*$ et $x_3^* = 2x_4^* + x_2^*$. Avec $x_2^* = 4 - x_1^*$ et $x_4^* = 8 - x_3^*$, on obtient $3x_1^* = 16 - x_3^*$ et $3x_3^* = 20 - x_1^*$. On en déduit $x_1^* = 16 - \frac{1}{3}(20 - x_1^*)$, ce qui donne $x_1^* = \frac{7}{2}$ et donc $x_3^* = \frac{11}{2}$.

Q1.4 On suppose que la stratégie de routage initiale est $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 4, 0, 8)$. Déterminer le flot sur chaque lien et le coût de cette solution.
Réponse : On a

$$\begin{aligned} F_{1,3} &= x_2^{(0)} = 4, & F_{1,4} &= x_1^{(0)} = 0, & F_{2,3} &= x_4^{(0)} = 8, \\ F_{2,4} &= x_3^{(0)} = 0, & F_{3,4} &= x_2^{(0)} + x_4^{(0)} = 12, & F_{4,5} &= 12. \end{aligned}$$

On en déduit que $D\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)} F_{i,j}^2 = 184$.

Q1.5 En partant de la solution $\mathbf{x}^{(0)}$, appliquer une itération de l'algorithme *Flow Deviation* avec le pas $\beta = \frac{11}{16}$. Quel est le coût de la solution $\mathbf{x}^{(1)}$ obtenue ?
Réponse : On a $\frac{\partial D}{\partial x_1}(\mathbf{x}^{(0)}) = 12$, $\frac{\partial D}{\partial x_2}(\mathbf{x}^{(0)}) = 28$, $\frac{\partial D}{\partial x_3}(\mathbf{x}^{(0)}) = 12$ et $\frac{\partial D}{\partial x_4}(\mathbf{x}^{(0)}) = 32$. Le point extrémal est donc $\bar{\mathbf{x}} = (4, 0, 8, 0)$ et on a donc

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \beta\left[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(0)}\right], \\
&= (0,4,0,8) + \beta\left[(4,0,8,0) - (0,4,0,8)\right], \\
&= (4\beta, 4(1-\beta), 8\beta, 8(1-\beta)),
\end{aligned}
$$

ce qui donne $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{11}{4}, \frac{5}{4}, \frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Le coût de cette solution est $D\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = 101,8$.

Exercice 2 (8 points)

Questions :

Q2.1 Ecrire les contraintes spécifiant les domaines de définition des variables $x_{k,j}^m$ et z_k.

Réponse :

$$
\begin{aligned}
&x_{k,j}^m \geq 0 \quad j \in F_k, k \in \mathcal{C}, m \in \{1, \ldots, M\}, \\
&z_k \in \{0,1\} \quad k \in \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Q2.2 Le but est d'admettre autant de coflux que possible. Comment formuler cet objectif d'optimisation ?

Réponse : Maximiser $\sum_{k \in \mathcal{C}} z_k$.

Q2.3 Ecrire la contrainte de capacité des liens.

Réponse :

$$
\sum_{k \in \mathcal{C}} \sum_{j \in F_k} x_{k,j}^m \delta_{k,j}^\ell \leq B_\ell, \quad \ell \in E,\ m \in \{1, \ldots, M\}.
$$

Q2.4 Soit X_k l'ensemble des intervalles temporels Δ_m couvrant la durée de vie $[a_k, d_k]$ du coflux k, c'est-à-dire que $[a_k, d_k] = \bigcup_{m \in X_k} \Delta_m$. Ecrire une contrainte linéaire imposant qu'un coflux k n'est admis que si chacun de ses flots $j \in F_k$ peut transmettre son volume de données dans l'intervalle $[a_k, d_k]$.

Réponse :

$$
\sum_{m \in X_k} x_{k,j}^m |\Delta_m| = v_{k,j}\, z_k, \quad j \in F_k,\ k \in \mathcal{C}.
$$

Q2.5 Ecrire la formulation complète du problème. De quel type de problème s'agit-il ? Avec quels algorithmes peut-on le résoudre ?

Réponse :

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximiser} \sum_{k \in \mathcal{C}} z_k, \\
&\text{s.c} \\
&\quad \sum_{m \in X_k} x_{k,j}^m |\Delta_m| = v_{k,j}\, z_k, \quad j \in F_k,\ k \in \mathcal{C}, \\
&\quad \sum_{k \in \mathcal{C}} \sum_{j \in F_k} x_{k,j}^m \delta_{k,j}^\ell \leq B_\ell, \quad \ell \in E,\ m \in \{1, \ldots, M\}, \\
&\quad x_{k,j}^m \geq 0 \quad j \in F_k, k \in \mathcal{C}, m \in \{1, \ldots, M\}, \\
&\quad z_k \in \{0,1\} \quad k \in \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'un problème linéaire mixte avec des variables binaires (les z_k) et des variables continues (les $x_{k,j}^m$). On peut le résoudre avec un algorithme de Branch-and-Bound ou de Branch-and-Cut.