Contrôle sur le cours

Modèles et Algorithmes d'Ingénierie de Trafic

On considère l'architecture d'une ferme de serveurs, telle que décrite sur la Figure 1. Dans cette architecture, on a K agents de routage qui reçoivent des requêtes (ou jobs) depuis l'extérieur et les routent vers des serveurs informatiques. On suppose que chaque agent de routage optimise indépendamment le temps de réponse de ses propres jobs. L'objectif est d'évaluer l'impact de la non-coordination des agents de routage sur les performances globales du système. Plus précisément, on veut comparer les performances obtenues avec un routage centralisé ($K = 1$) et avec un routage décentralisé ($K > 1$). Pour simplifier, si λ est le trafic total entrant dans le système (en nombre de jobs par seconde), on suppose que chaque agent de routage contrôle exactement la même quantité de trafic $\frac{\lambda}{K}$, et qu'il n' a que deux serveurs.

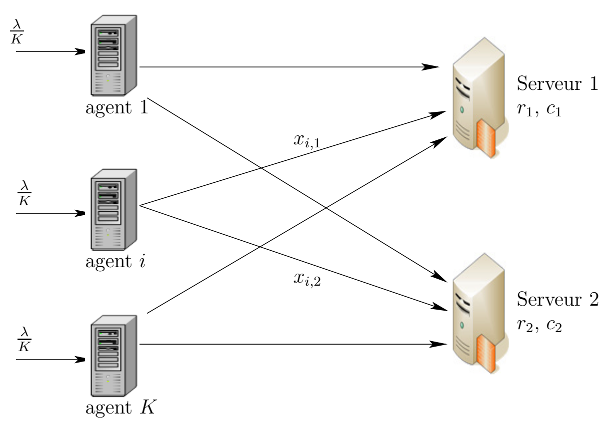

Figure 1: Architecture informatique considérée dans le sujet.

On note r_j la capacité (en job/s) du serveur $j = 1, 2$ et on suppose que le coût de traitement d'un job sur ce serveur est c_j euros/s. On fait l'hypothèse que $\frac{c_1}{r_1} < \frac{c_2}{r_2}$, c'est-à-dire que le coût par job est inférieur sur le serveur 1. On note $x_{i,j}$ la quantité de trafic envoyé par l'agent de routage i sur le serveur j, de sorte que le vecteur $\vec{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2})$ représente la stratégie de routage de l'agent i. On a bien sûr $x_{i,1}+x_{i,2} = \frac{\lambda}{K}$. Le vecteur $\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_K) = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{K,1}, x_{K,2})$ représente lui la stratégie de routage utilisée par l'ensemble des agents de routage.

L'objectif de l'agent de routage i est de minimiser le temps de traitement moyen de ses propres jobs, c'est-à-dire de déterminer la stratégie de routage $\vec{x}_i$ minimisant

$$T_i(\vec{x}_i, \vec{x}_{-i}) = c_1 \frac{x_{i,1}}{r_1 - y_1} + c_2 \frac{x_{i,2}}{r_2 - y_2}, \tag{1}$$

où $y_j = \sum_{k=1}^{K} x_{k,j}$ représente le trafic total arrivant au serveur $j = 1, 2$. On notera que le routage optimal $\vec{x}_i$ pour l'agent i dépend de la stratégie $\vec{x}_{-i} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \ldots \vec{x}_K)$ utilisée par les autres agents $k \neq i$, dans la mesure où $y_j = x_{i,j} + \sum_{k \neq i} x_{k,j}$.

Pour évaluer la performance globale du système, on considère la métrique suivante

$$\begin{aligned} D(y_1, y_2) &= \sum_{i=1}^{K} T_i(\vec{x}_i, \vec{x}_{-i}), \\ &= c_1 \sum_{i=1}^{K} \frac{x_{i,1}}{r_1 - y_1} + c_2 \sum_{i=1}^{K} \frac{x_{i,2}}{r_2 - y_2}, \\ &= c_1 \frac{y_1}{r_1 - y_1} + c_2 \frac{y_2}{r_2 - y_2}, \end{aligned} \tag{2}$$

qui représente[1] le coût de traitement moyen d'un job dans le système.

PREMIERE PARTIE: ROUTAGE CENTRALISE

Dans cette partie, on étudie le routage centralisé optimal, dans le cas où $K = 1$. Dans ce cas, $\vec{x} = (y_1, y_2)$ et $T_1(\vec{x}) = D(y_1, y_2)$ est la fonction objectif optimisée par l'unique agent de routage :

$$(OPT) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser :} & D(y_1, y_2) = c_1 \frac{y_1}{r_1 - y_1} + c_2 \frac{y_2}{r_2 - y_2} \\ \text{sous les contraintes :} & \\ & y_1 + y_2 = \lambda, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

On notera dans la suite (y_1^*, y_2^*) la stratégie de routage centralisée.

Questions :

Q1.1 Quelles sont les conditions d'optimalité du routage ?
Réponse: Le coût marginal du serveur j est $\frac{\partial D}{\partial y_j}(y_1, y_2) = c_j r_j / (r_j - y_j)^2$. Le point (y_1^*, y^*) est donc optimal si

[1] A un facteur λ près, d'après la loi de Little.

$$\begin{aligned} y_1^* > 0 \quad &\Longrightarrow \quad c_1 \frac{r_1}{(r_1 - y_1^*)^2} \leq c_2 \frac{r_2}{(r_2 - y_2^*)^2}, \\ y_2^* > 0 \quad &\Longrightarrow \quad c_1 \frac{r_1}{(r_1 - y_1^*)^2} \geq c_2 \frac{r_2}{(r_2 - y_2^*)^2}. \end{aligned}$$

Q1.2 Sous quelle condition sur λ, le routage centralisé n'utilise que le premier serveur (i.e. $y_1^* = \lambda$) ?
Réponse: Le routage optimal n'utilise que le premier serveur si $\frac{\partial D}{\partial y_1}(\lambda, 0) \leq \frac{\partial D}{\partial y_2}(\lambda, 0)$, c'est-à-dire si $c_1 \frac{r_1}{(r_1-\lambda)^2} \leq \frac{c_2}{r_2}$. En prenant la racine carrée des deux côtés de l'inégalité, on obtient après quelques manipulations la condition

$$\lambda < r_1 \left(1 - \sqrt{\frac{c_1}{r_1}\frac{r_2}{c_2}}\right).$$

Q1.3 Si les deux serveurs sont utilisés, quelle est la solution de routage (y_1^*, y_2^*) optimale ?
Réponse: Si les deux serveurs sont utilisés, on a $c_1 \frac{r_1}{(r_1-y_1^*)^2} = c_2 \frac{r_2}{(r_2-y_2^*)^2}$,. On en déduit $r_1 - y_1^* = \sqrt{\frac{c_1 r_1}{c_2 r_2}}(r_2 - y_2^*)$. En utilisant $y_2^* = \lambda - y_1^*$, on obtient

$$\begin{aligned} y_1^* &= \frac{\sqrt{c_1 r_1}}{\sqrt{c_1 r_1} + \sqrt{c_2 r_2}} \left(\lambda - r_2 + \sqrt{\frac{c_2}{c_1} r_1 r_2}\right), \\ y_2^* &= \frac{\sqrt{c_2 r_2}}{\sqrt{c_1 r_1} + \sqrt{c_2 r_2}} \left(\lambda - r_1 + \sqrt{\frac{c_1}{c_2} r_1 r_2}\right). \end{aligned}$$

Q1.4 Calculer la performance $D(y_1^*, y_2^*)$ à l'optimal pour les valeurs suivantes: $r_2 = c_2 = 1$, $r_1 = 2$, $c_1 = 0.995$, $\lambda = 1$.
Réponse: On a

$$r_1 \left(1 - \sqrt{\frac{c_1}{r_1}\frac{r_2}{c_2}}\right) = 2\left(1 - \sqrt{\frac{0.995}{2}}\right) = 0.589 < \lambda = 1.$$

Donc la solution optimale de routage utilise les deux serveurs et est donnée par

$$y_1^* = \frac{\sqrt{1,99}}{\sqrt{1,99} + 1}\left(1 - 1 + \sqrt{2,01}\right) \approx 0,83 \text{ et } y_2^* \approx 0.17,$$

ce qui donne $D(y_1^*, y_2^*) \approx 0,911$.

SECONDE PARTIE: ROUTAGE DECENTRALISE

Dans cette partie, on étudie le routage décentralisé, dans la cas où $K > 1$. On a vu avec l'équation (1) que la stratégie optimale pour l'agent i dépend de la stratégie $\vec{x}_{-i}$ des autres joueurs. Cette situation correspond à ce qu'on appelle un jeu de routage non coopératif entre les agents de routage. L'objectif dans cette partie est d'étudier la performance globale du système à l'équilibre de Nash de ce jeu[2]. Une stratégie de routage $\vec{x}^{ne}$ est un équilibre de Nash si aucun joueur ne peut améliorer ses performances par une déviation unilatérale du point $\vec{x}^{ne}$, c'est-à-dire si

$$\vec{x}_i^{ne} = \text{argmin}_{\vec{x}_i} T_i(\vec{x}_i, \vec{x}_{-i}^{ne}),$$

pour tout joueur $i = 1, \ldots, K$. On notera y_j^{ne} le trafic sur le serveur j à l'équilibre de Nash. On admettra dans un premier temps qu'à l'équilibre de Nash, tous les agents de routage utilisent la même stratégie : $x_{i,j}^{ne} = \frac{y_j^{ne}}{K}$ pour tout $i = 1, \ldots, K$.

Questions :

Q2.1 Justifier succinctement que $D(y_1^*, y_2^*) \leq D(y_1^{ne}, y_2^{ne})$, ce qui explique qu'on puisse parler de dégradation des performances.

Réponse: Par définition, la stratégie de routage centralisée (y_1^*, y_2^*) minimise $D(y_1, y_2)$, donc nécessairement $D(y_1^*, y_2^*) \leq D(y_1^{ne}, y_2^{ne})$.

Q2.2 Montrer que si la stratégie de routage $\vec{x}$ est telle que $x_{i,j} = y_j/K$ pour $j = 1, 2$ et $i = 1, \ldots, K$, alors le coût marginal du serveur j pour le joueur i s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,j}}(\vec{x}_i, \vec{x}_{-i}) = \frac{c_j}{K} \frac{1}{r_j - y_j} \left(\frac{r_j}{r_j - y_j} + K - 1 \right).$$

Réponse: Etant donnée la stratégie des autres joueurs, le coût marginal du serveur $j = 1, 2$ pour l'agent i est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,j}}(\vec{x}_i, \vec{x}_{-i}) = c_j \frac{r_j - y_j + x_{i,j}}{(r_j - y_j)^2} &= c_j \frac{r_j - y_j + \frac{1}{K} y_j}{(r_j - y_j)^2}, \\
&= \frac{c_j}{K} \frac{K r_j - (K-1) y_j}{(r_j - y_j)^2}, \\
&= \frac{c_j}{K} \left(\frac{r_j}{(r_j - y_j)^2} + \frac{K-1}{r_j - y_j} \right), \\
&= \frac{c_j}{K} \frac{1}{r_j - y_j} \left(\frac{r_j}{r_j - y_j} + K - 1 \right).
\end{aligned}$$

[2] On admettra ici que cet équilibre existe et qu'il est unique.

Q2.3 Montrer que le vecteur (y_1^{ne}, y_2^{ne}) est la solution optimale du problème suivant:

$$
(P)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{Minimiser :} & F(y_1,y_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \frac{c_j}{K}\left[\frac{y_j}{r_j - y_j} + (K-1)\log\left(\frac{r_j}{r_j - y_j}\right)\right] \\
\text{sous les contraintes :} & \\
 & y_1 + y_2 = \lambda, \\
 & 0 \le y_j < r_j, \quad j = 1,2.
\end{array}
\right.
$$

Réponse: Soit un vecteur positif (y_1, y_2) vérifiant $y_1 + y_2 = \lambda$. On considère la stratégie de routage $\vec{x}$ est définie par $x_{i,j} = y_j/K$ pour $j = 1,2$ et $i = 1,\dots,K$. On a

$$
\frac{\partial F}{\partial y_j}(y_1,y_2) = \frac{c_j}{K}\frac{1}{r_j - y_j}\left(\frac{r_j}{r_j - y_j} + K - 1\right) = \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,j}}(\vec{x}).
$$

Si (y_1, y_2) est la solution optimale du problème (P), la stratégie $\vec{x}$ ainsi définie verifie pour tout $i = 1,\dots,K$

$$
\begin{aligned}
x_{i,1} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,1}}(\vec{x}) \le \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,2}}(\vec{x}), \\
x_{i,2} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,1}}(\vec{x}) \ge \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,2}}(\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Ces conditions d'optimalité sont celles qui définissent un équilibre de Nash. Donc la solution optimale du problème (P) correspond à (y_1^{ne}, y_2^{ne}).

Q2.4 En utilisant les valeurs de la question Q1.4 et $K = 100$, appliquez une itération de l'algorithme *Flow Deviation* au problème précédent en partant de la solution initiale $y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \frac{1}{2}$. On prendra le pas $\beta = 0,996$. Calculez les coûts marginaux $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y_1, y_2)$ des serveurs pour le point obtenu.
Réponse: On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_1}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad &= \quad \frac{0.995}{100}\frac{1}{2-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{2-\frac{1}{2}} + 99\right) = 0,666 \\
\frac{\partial F}{\partial y_2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad &= \quad \frac{1}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 99\right) = 2,02.
\end{aligned}
$$

Le coût marginal du serveur 1 est inférieur, donc on met à jour la solution en direction du point extrémal $(1,0)$:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + 0,996 \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0,998 \\ 0,002 \end{pmatrix}.$$

Après calcul, on obtient les couts marginaux $\frac{\partial F}{\partial y_1}(0,998, 0,002) = 1,0029$ et $\frac{\partial F}{\partial y_2}(0,998, 0,002) = 1,0020$.

Q2.5 En supposant que l'algorithme a convergé, calculez $D(y_1^{ne}, y_2^{ne})$. Quelle est la valeur du ratio $\frac{D(y_1^{ne}, y_2^{ne})}{D(y_1^*, y_2^*)}$?
Réponse: En utilisant la formule (2), on obtient $D(y_1^{ne}, y_2^{ne}) \approx 0,993$, et donc une dégradation de performance donnée par $\frac{D(y_1^{ne}, y_2^{ne})}{D(y_1^*, y_2^*)} = 1,09$, soit une augmentation du délai moyen de 9%.

Q2.6 **Question Bonus** : Montrer qu'à l'équilibre de Nash tous les agents utilisent la même stratégie de routage, c'est-à-dire $x_{i,j}^{ne} = \frac{y_j^{ne}}{K}$. *Indication* : on pourra tout d'abord montrer que $x_{i,j}^{ne} < x_{k,j}^{ne}$ si et seulement si $\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,j}}(\vec{x}^{ne}) < \frac{\partial T_k}{\partial x_{k,j}}(\vec{x}^{ne})$. On raisonnera ensuite par l'absurde pour montrer que, le routage des agents étant optimal, $x_{i,1}^{ne} < x_{k,1}^{ne}$ conduit à une contradiction avec la conservation du trafic.
Réponse: On a $\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,j}}(\vec{x}) = c_j \frac{r_j - y_j + x_{i,j}}{(r_j - y_j)^2}$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,j}}(\vec{x}^{ne}) < \frac{\partial T_k}{\partial x_{k,j}}(\vec{x}^{ne}) \quad & \iff \quad c_j \frac{r_j - y_j + x_{i,j^{ne}}}{(r_j - y_j)^2} < c_j \frac{r_j - y_j + x_{k,j}^{ne}}{(r_j - y_j)^2} \\ & \iff \quad x_{i,j}^{ne} < x_{k,j}^{ne}. \end{aligned}$$

Si à l'équilibre de Nash, le routage n'utilise qu'un seul serveur, les stratégies des joueurs sont forcément identiques. Supposons donc que les deux serveurs sont utilisés. Raisonnons par l'absurde et supposons que $x_{i,1}^{ne} < x_{k,1}^{ne}$. Cela implique que $\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,1}}(\vec{x}^{ne}) < \frac{\partial T_k}{\partial x_{k,1}}(\vec{x}^{ne})$. Le routage de chaque agent étant optimal, on a $\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,2}}(\vec{x}^{ne}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_{i,1}}(\vec{x}^{ne})$ et de même $\frac{\partial T_k}{\partial x_{k,2}}(\vec{x}^{ne}) = \frac{\partial T_k}{\partial x_{k,1}}(\vec{x}^{ne})$. Il s'en suit que $\frac{\partial T_i}{\partial x_{i,2}}(\vec{x}^{ne}) < \frac{\partial T_k}{\partial x_{k,2}}(\vec{x}^{ne})$, et donc que $x_{i,2}^{ne} < x_{k,2}^{ne}$. On obtient ainsi $\frac{\lambda}{K} = x_{i,1}^{ne} + x_{i,2}^{ne} < x_{k,1}^{ne} + x_{k,2}^{ne} = \frac{\lambda}{K}$, ce qui est absurde. On conclu par conséquent qu'à l'équilibre de Nash on a forcément $x_{i,j}^{ne} = x_{k,j}^{ne}$ pour tout couple de joueurs i, k, et donc que $x_{i,j}^{ne} = y_j^{ne}/K$.