Contrôle sur le cours

Modèles et Algorithmes d'Ingénierie de Trafic

On considère le problème de routage sur deux liens parallèles illustré sur la Figure 1. Le trafic total de la source vers la destination est noté λ, et il peut être réparti sur deux liens. On note x_i la quantité de trafic envoyée sur le lien $i = 1, 2$ et $c_i x_i \phi(x_i)$ le coût qui en résulte. Dans la suite, on supposera que $\phi(x) = (1 + x)^2$.

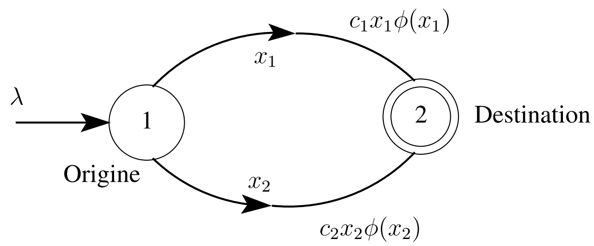

Figure 1: Routage sur deux liens parallèles.

Le problème à résoudre s'écrit mathématiquement sous la forme suivante :

$$(OPT) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser :} & F(x_1, x_2) = c_1 x_1 \phi(x_1) + c_2 x_2 \phi(x_2) \\ \text{sous les contraintes :} & \\ & x_1 + x_2 = \lambda, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

On notera dans la suite (x_1^*, x_2^*) la stratégie de routage optimale.

Questions :

Q1.1 Comment s'écrit le coût marginal du chemin i ? Quelles sont les conditions d'optimalité du routage ?
Réponse : Le coût marginal du chemin i est $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2) = c_i \left[\phi(x_i) + x_i \phi_i'(x_i)\right]$, ce qui donne $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2) = c_i \left[3x_i^2 + 4x_i + 1\right]$. Du coup, les conditions d'optimalité s'écrivent sous la forme suivante :

$$x_1^* > 0 \implies c_1\left[3(x_1^*)^2 + 4x_1^* + 1\right] \leq c_2\left[3(x_2^*)^2 + 4x_2^* + 1\right],$$
$$x_2^* > 0 \implies c_2\left[3(x_2^*)^2 + 4x_2^* + 1\right] \leq c_1\left[3(x_1^*)^2 + 4x_1^* + 1\right],$$

Q1.2 A partir de quelle valeur λ^* de λ le routage optimal utilise-t-il les deux liens ? On notera $\nu = \frac{c_2}{c_1}$ pour répondre.

Réponse : La valeur λ^* vérifie $\frac{\partial F}{\partial x_1}(\lambda^*, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(\lambda^*, 0)$, c'est-à-dire $3(\lambda^*)^2 + 4\lambda^* + 1 = \nu$. Comme une seule des solutions de cette équation est positive, on obtient

$$\lambda^* = \frac{\sqrt{4 + 3(\nu - 1)} - 2}{3}.$$

Q1.3 En supposant que $\lambda > \lambda^*$, écrire (sans la résoudre), l'équation permettant de déterminer x_1^*.

Réponse : Pour $\lambda > \lambda^*$, on a $c_1\left[3(x_1^*)^2 + 4x_1^* + 1\right] = c_2\left[3(x_2^*)^2 + 4x_2^* + 1\right]$. En utilisant $x_2^* = \lambda - x_1^*$, on obtient

$$3(x_1^*)^2 + 4x_1^* + 1 = \nu\left[3(\lambda - x_1^*)^2 + 4(\lambda - x_1^*) + 1\right],$$

d'où l'on peut déterminer la valeur de x_1^*.

Q1.4 Calculer la valeur de λ^* quand $c_1 = 1$ et $c_2 = 5$. En supposant que pour $\lambda > \lambda^*$, on a

$$x_1^* = \frac{3\nu\lambda + 2(\nu + 1) - \sqrt{\nu(3\lambda + 4)^2 + (\nu - 1)^2}}{3(\nu - 1)},$$

déterminer x_1^* et x_2^* quand $\lambda = 3\,\lambda^*$. Quel est le coût de cette solution ?

Réponse : Pour $\nu = 5$, on a $\lambda^* = \frac{\sqrt{4+12}-2}{3} = \frac{2}{3}$. Pour $\lambda = 3\,\lambda^* = 2$, on obtient en utilisant la formule donnée $x_1^* = 1,61$ et $x_2^* = 0,39$. Le coût de cette solution est $F(x_1^*, x_2^*) = 1,61 \times (2,61)^2 + 5 \times 0,39 \times (1,39)^2 \approx 14,74$.

Q1.5 Quel est le coût de la solution $x^{(0)} = (1, 1)$?

Réponse : On a $F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1 \times 1 \times 2^2 + 5 \times 1 \times 2^2 = 24$.

Q1.6 En partant de $x^{(0)} = (1, 1)$, appliquer une itération de l'algorithme *Flow Deviation* avec le pas $\beta = \frac{2}{3}$. Quel est le coût de la solution $x^{(1)}$ obtenue ?

Réponse : On a $\frac{\partial F}{\partial x_1}(1, 1) = 8$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2}(1, 1) = 40$, donc $\bar{x} = (2, 0)$. On obtient $x^{(1)} = (1, 1) + \frac{2}{3}\left[(2, 0) - (1, 1)\right] = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ et $F(x^{(1)}) = 1 \times \frac{5}{3} \times (\frac{8}{3})^2 + 5 \times \frac{1}{3} \times (\frac{4}{3})^2 = \frac{400}{27}$.