Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour l'analyse et la synthèse robuste

D. Arzelier - J. Bernussou - D. Peaucelle

LAAS - CNRS
7, Avenue du Colonel Roche 31077 Toulouse cedex - France
Tel. 05 61 33 64 17 fax : 05 61 33 69 69
email : arzelier@laas.fr - bernusou@laas.fr - peaucelle@laas.fr

1. Introduction

Ce chapitre est principalement dédié à la présentation de résultats récents en analyse et synthèse robuste des systèmes dynamiques à incertitude paramétrique réelle. Nous nous sommes volontairement limités à des modèles avec incertitude de type convexe polytopique et au cas particulier des modèles affines en les paramètres incertains. Les problèmes d'analyse et de synthèse robuste associés à ces modèles sont réputés difficiles, [16] et ont généralement été abordés dans le cadre de l'utilisation de la notion de stabilité quadratique, [9], [25], [2]. Ce concept très fructueux a permis de développer de nombreux outils d'analyse et de synthèse numériquement intéressant de par leur simplicté, (conditions impliquant la résolution d'équations de Riccati ou de $\mathcal{LMI}$). Toutefois, il est apparu que ce concept nécessitant l'utilisation d'une fonction de Lyapunov unique pour l'ensemble des incertitudes, génère un pessimisme irréductible des conditions proposées. Des travaux préliminaires ont permis de montrer que celui-ci pouvait être réduit dans certains cas par l'introduction de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres incertains ainsi que par l'usage systématique de la S-procédure, [22].
Les conditions proposées dans ce chapitre reposent également sur le concept de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres et prolongent ainsi les travaux récents sur le sujet, [22], [24]. Nous nous sommes intéressés à divers problèmes d'analyse et de synthèse en stabilité et en performance. Pour chacun des problèmes traités, nous nous sommes attachés à présenter notre nouvelle approche le plus synthétiquemnt possible en omettant sciemment les preuves trop techniques et qui auraientt alourdi inutilement ce chapitre. Le lecteur désireux d'aller plus loin dans la compréhesion des mécanismes techniques utilisés peut se reporter aux nombreuses références citées dans le texte. Chaque résultat

a d'autre part été évalué en le comparant aux résultats préexistants issus du domaine quadratique ou autre sur des exemples académiques.
Finalement, l'aspect le plus intéressant de ce travail est, peut être, lié au fait qu'il fait apparaitre une généricité des problèmes qui permet leur traitement dans un cadre unifié et leur extension aisée à d'autres types de modélisation incertaines, [50]. Il reste d'autre part un certain nombre de problèmes ouverts, particulièrement en synthèse, qui font que ce chapitre ne doit pas apparaitre comme un état de l'art d'une recherche définitive et figée mais bien plutôt comme un instantané d'une recherche en pleine évolution.
Notations : La matrice transposée de A is notée A' et A^* est la matrice complexe conjuguée transposée. Etant données des matrices symétriques A et B, $>$ $(\geq)$ est la relation d'ordre partiel. $A > (\geq) B$ si et seulement si $A - B$ est (semi) définie positive. $\mathbf{1}$ est la matrice identité et $\mathbf{0}$ la matrice nulle de dimensions appropriées. $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathcal{S}_n^+$, $(\mathcal{S}_n^{+*})$, le cône des matrices semi-définies, (définies) positives dans $\mathcal{S}_n$. $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. $\mathbb{R}^+$, $(\mathbb{R}^{+*})$ est l'ensemble des réels, (positifs). δ est l'opérateur de dérivation pour les systèmes en temps continu, $(\delta[x(t)] = \dot{x}(t))$ et l'opérateur de retard pour les systèmes en temps discret, $(\delta[x(t)] = x(t+1))$. $\otimes$ est le produit de Kronecker des matrices. Nous rappelons que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$. $co\{A_1, \cdots, A_N\}$ définit l'enveloppe convexe des matrices sommets $A_1, \cdots, A_N$. Le signe $\star$ indique dans une matrice, un terme symétrique qui se déduit du contexte. Pour une matrice A donnée, $sym(A) = A + A'$. Pour les normes de système, $\bullet = 2$ ou $\bullet = \infty$. De plus, $\sigma = s$ ou $\sigma = z$ suivant que l'on considère des modèles en temps continu ou discret.

2. Les modèles LTI incertains

2.1. *Introduction*

Les modèles Linéaires Temps-Invariant, (LTI) sont très largement utilisés en analyse et synthèse robustes du fait de leur simplicité et du fait qu'il existe de nombreux outils performants associés. Cette simplicité du modèle LTI n'est toutefois pas sans conséquence sur la précision relative de sa représentativité du système physique réel. Il est donc nécessaire, dans la plupart des cas, d'adjoindre au modèle LTI un modèle mathématique de l'incertitude représentant l'écart entre la réalité physique et le modèle mathématique simplifié.
L'incertitude affectant un modèle de comportement peut trouver son origine dans les erreurs et approximations inhérentes au processus de modélisation, résultant d'une linéarisation ou d'une réduction de modèle, dans la prise en compte de la variation des paramètres du modèle pour des systèmes variant dans le temps ou dans la prise en compte d'approximations numériques sur la valeur des paramètres du fait des problèmes de précision finie. Il est donc indispensable de définir des classes de modèles d'incertitude suivant l'origine de celle-ci permettant l'élaboration de modèles incertains adéquats. Le modèle d'incertitude peut ainsi être caractérisé par différents facteurs tels que ceux définissant la nature de l'incertitude considérée.

La nature mathématique peut être **réelle** ou complexe suivant que l'on considère des variations sur un certain nombre de paramètres physiques du système ou que l'on essaie d'évaluer l'influence d'une perturbation modélisée de manière LTI sur une plage de fréquences pré-définie.
Cette nature mathématique est donc directement induite par sa nature physique qui peut être **paramétrique** ou non paramétrique. Les incertitudes non paramétriques complexes permettent essentiellement de modéliser des dynamiques négligées alors que les incertitudes non paramétriques réelles sont plus utilisées afin de représenter les effets d'une linéarisation ou de la variation temporelle du système. Le modèle non paramétrique est utilisé afin de caractériser une classe de modèles incertains ne pouvant être paramétrée à l'aide d'un nombre fini de paramètres.
Dans le cadre des modèles paramétriques réels, la nature géométrique de l'ensemble d'appartenance peut également être défini. Cet ensemble est généralement **polytopique**, (paramètres appartenant à des intervalles) ou ellispsoidal, (paramètres H-dissipatifs).
L'information relative à la complexité plus ou moins grande de la structure du modèle de l'incertitue définit concrètement l'interconnection entre le modèle nominal LTI et le modèle d'incertitude. L'incertitude non structurée diffère de l'incertitude **structurée** par le fait que les éléments incertains du modèle sont implicitement supposés indépendants.
La nature du "bouclage" du modèle d'incertitude sur le modèle LTI peut être considéré également comme caractérisant la complexité du modèle incertain complet. Les paradigmes les plus usuels vont des modèles incertains Linéaires Fractionnaires, ($\mathcal{LFT}$) aux **inclusions différentielles** en passant par les modèles incertains **affines**, sous-classe du premier pour laquelle le bouclage est strictement propre.
L'obtention d'un modèle incertain résulte donc d'un travail complexe qui conditionne en majeure partie le choix de la méthode de résolution ainsi que son efficacité. Dans ce chapitre, afin de simplifier et de clarifier l'exposé des méthodes présentées, nous ne considèrerons que des modèles affines d'incertitude ainsi que les inclusions différentielles linéaires. Des conditions analogues peuvent être également développées dans le cadre plus général des incertitudes à structure $\mathcal{LFT}$, [48], [49].

2.2. *Les inclusions différentielles linéaires polytopiques*

Une approche très générale de la théorie des inclusions différentielles est donnée dans la référence [5]. Dans notre cas, nous nous intéressons plus particulièrement à l'interprétation de ces modèles en tant que système linéaire incertain possiblement variant dans le temps, [12]. Un système dynamique incertain décrit par une inclusion différentielle linéaire polytopique a la forme, [36],

$$\delta[x(t)] \in f(x) \quad , \quad f(x) = \{y \ : \ y = Mx \ , \ M \in \mathcal{M}\} \tag{1}$$

où $\mathcal{M}$ est un polytope de matrices réelles inclu dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ et défini par ses N matrices sommets $M^{[i]}$.

$$\mathcal{M} = co\left\{M^{[1]}, \cdots, M^{[N]}\right\} = \left\{M = \sum_{i=1}^{N} \xi_i M^{[i]} \ : \ \xi_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1\right\} \tag{2}$$

Ce type de modèles incertains est apparu dans de nombreux travaux récents en analyse et synthèse robustes, [6], [7], [9], [27], [36], [37], [39], [40], [41], [47]. La référence [12] offre une vision synthétique relativement complète des principaux résultats liés à ce type de modélisation même s'il y manque les résultats les plus récents utilisant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres.
Dans le cas le plus général considéré dans ce chapitre, nous définirons l'inclusion différentielle linéaire polytopique de manière étendue par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= M \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad M \in \mathcal{M} \end{aligned} \qquad [3]$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des sorties mesurées, $w \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur des perturbations exogènes et $z \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des sorties controllées.
Ce modèle a particulièrement été considéré dans la littérature du fait de sa simplicité mais également du fait qu'il recouvre une classe de modèles fréquemment rencontrée en pratique : les matrices intervalles, [7], [8], [10], [11], [56]. Une matrice intervalle est définie comme une matrice réelle dont les éléments sont connus comme appartenant à des intervalles,

$$M = [m_{ij}] \qquad \underline{m}_{ij} \leq m_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \qquad [4]$$

Il est alors possible de réécrire cette matrice intervalle afin de faire apparaitre un vecteur de paramètres incertains,

$$\begin{aligned} M(\delta) = \sum_{i=1}^{n^2} \delta_i M^{[i]} \qquad \delta \in \mathbb{R}^{n^2} \\ \forall \;\; i \;\; rang(M^{[i]}) = 1 \quad \underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \overline{\delta}_i \end{aligned} \qquad [5]$$

Cette structure a été très étudiée par l'approche algébrique. En effet, ce type de modèle possède la propriété remarquable d'avoir un polynôme caractéristique dont les coefficients sont des fonctions multilinéaires de δ. Il est alors possible d'appliquer de nombreux résultats issus de l'approche algébrique et notemment le "mapping theorem", [10]. Il va sans dire que l'hypothèse additionnelle sur le rang des matrices $M^{[i]}$ est très restrictive. Ce modèle a toutefois l'avantage d'être plus structuré et de faire apparaitre explicitement un vecteur de paramètres incertains. Dans ce cadre, une classe de modèles paramétriques réels peut être explicitement définie et utilisée en tant que telle.

2.3. *Les modèles affines paramétriques réels*

Le modèle LTI incertain considéré dans cette classe se définit comme suit :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\delta[x(t)]\\ z(t)\\ y(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A(\Delta) & B_1(\Delta) & B_2(\Delta)\\ C_1(\Delta) & D_{11}(\Delta) & D_{12}(\Delta)\\ C_2(\Delta) & D_{21}(\Delta) & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\\ u(t)\end{bmatrix}\\ &= M(\Delta)\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\\ u(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad [6]$$

La matrice système incertaine est caractérisée par :

$$\begin{aligned}M(\Delta) &= M_0 + \sum_{i=1}^{p}\delta_i M^{[i]} \quad |\delta_i| \leq 1 \ \ \forall\, i = 1, \cdots, p\\ &= M_0 + M_1\Delta M_2 \qquad \Delta \in \mathbf{\Delta}\end{aligned} \qquad [7]$$

où

$$\mathbf{\Delta} = \left\{ \Delta = \begin{bmatrix}\delta_1\mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \delta_p\mathbf{1}\end{bmatrix} \mid |\delta_i| \leq 1 \ \ \forall\, i = 1, \cdots, p \right\} \qquad [8]$$

et

$$M_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{1} & \cdots & \cdots & \mathbf{1}\end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix}M^{[1]}\\ \vdots\\ M^{[p]}\end{bmatrix} \qquad [9]$$

Les écritures scalaire ou matricielle de l'équation (7) sont parfaitement équivalentes. Ce modèle fait clairement apparaitre un vecteur de paramètres incertains possédant ou non une signification physique. Ce type de modélisation a été plus particulièrement utilisée dans les références [3], [38], [22], [24], [48]. Il est à noter que ce type de modèle peut toujours être réécrit comme une inclusion différentielle linéaire polytopique (2) mais l'écriture (6) peut être préférable du fait de sa structure plus détaillée.

2.4. *Un exemple illustratif*

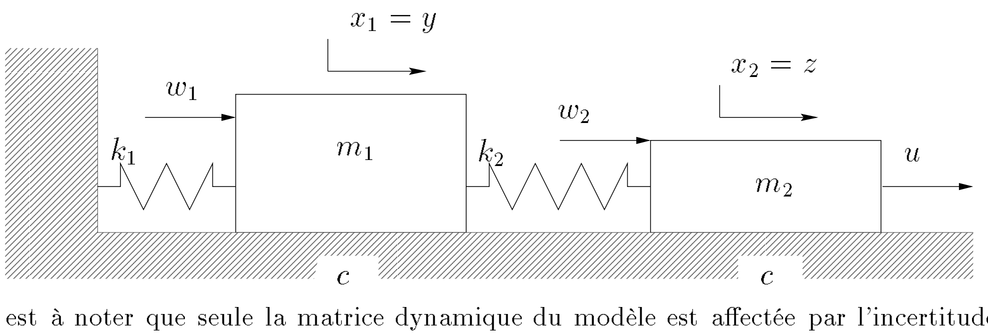
On considère à titre d'exemple illustratif le modèle en temps continu d'un système mécanique fréquemment utilisé dans la littérature et présenté particulièrement dans [32]. Les paramètres incertains sont les raideurs des deux ressorts ainsi que le coefficient de frottement, $k_1 = k_{10} + \delta_{k_1}$ avec $|\delta_{k_1}| \leq 0.4$ et $k_{10} = 1$, $k_2 = k_{20} + \delta_{k_2}$ avec $|\delta_{k_2}| \leq 0.4$ et

$k_{20} = 1$, $c = c_0 + \delta_c$ avec $c_0 = 1$ et $|\delta_c| \leq 0.4$, soit une variation de 40% sur les paramètres non connus précisément.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -(k_{10}+k_{20}) & k_{20} & -\frac{c_0}{m_1} & 0 \\ k_{20} & -k_{20} & 0 & -\frac{c_0}{m_2} \end{bmatrix} x(t) \\ \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} w_u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ z_u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \qquad w_u(t) = \Delta z_u(t) \\ \\ z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \qquad [10]$$

où $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ est défini par,

$$\mathbf{\Delta} = \left\{ \Delta = \begin{bmatrix} \delta_{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \; : \; (\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \delta_c) \in \mathbb{R}^3, \; ||\Delta|| \leq \mathbf{1} \right\} \qquad [11]$$



Il est à noter que seule la matrice dynamique du modèle est affectée par l'incertitude paramétrique. Ce modèle incertain peut être de manière équivalente considéré comme une inclusion différentielle linéaire polytopique à 8 sommets ou comme un modèle affine paramétrique réel. Dans le premier cas,

$$A \in \mathcal{A} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \; : \; A = \sum_{i=1}^{8} \xi_i A^{[i]} \; : \; \xi_i \geq \mathbf{0} \; , \; \sum_{i=1}^{8} \xi_i = 1 \right\} \qquad [12]$$

où les matrices sommets $A^{[i]}$ sont les images par A des sommets du polytope des paramètres.
Dans le second cas,

$$A = A_0 + \delta_{k_1} A_1 + \delta_{k_2} A_2 + \delta_c A_3 \qquad [13]$$

où,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/m_2 \end{bmatrix} \qquad [14]$$

La matrice A_3 n'étant pas de rang 1, cet exemple ne peut être considéré comme faisant partie de la classe des matrices intervalles. Cet exemple sera utilisé tout au long de ce chapitre afin d'illustrer les différents résultats présentés.

3. Analyse robuste

3.1. *Introduction*

Le choix d'un modèle incertain étant effectué, il est nécessaire d'effectuer une étape d'analyse des propriétés en stabilité et performance robustes du modèle proposé afin d'élaborer en suivant une stratégie de correction adéquate résultant en la synthèse d'un compensateur. Celui-ci obtenu, une nouvelle étape d'analyse du système bouclé intervient afin d'attester des propriétes réelles du système corrigé. L'étape d'analyse est donc doublement importante dans le processus de synthèse puisqu'elle va conditionner en partie les choix effectués pour la synthèse mais également sanctionner les résultats de cette étape. Cette étape d'analyse est usuellement séparée en deux problèmes présentatant des degrés de difficulté différents ; l'analyse de stabilité robuste et l'analyse de performance robuste. Si la notion de valeur singulière structurée, [44], a permis de donner un cadre général d'étude permettant de ramener l'analyse de performance robuste à celui d'analyse de stabilité robuste vis à vis d'incertitudes structurées, il n'en reste pas moins que les deux problèmes sont relativement différents. Autant la définition du premier est univoque et sans ambiguité, autant la notion même de performance robuste recouvre des acceptions fort diverses. Quoiqu'il en soit, aussi bien le problème d'analyse de stabilité robuste que celui d'analyse de performance robuste seront abordés dans le cadre de la théorie de Lyapunov dont on peut dire qu'elle fournit les outils et les concepts les plus simples, (fonctions de Lyapunov quadratiques, gramiens d'observabilité et de commandabilité, lemme borné réel, equation de Lyapunov...), pour l'étude de ces problèmes.

3.2. *Analyse robuste en stabilité*

Etant donné un modèle LTI et la représentation de l'incertitude associée, il s'agit de tester la stabilité au sens de Lyapunov du système pour l'ensemble des incertitudes admissibles. Devant la variété des modélisations, il n'est pas étonnant de retrouver une grande variété d'approches possibles de ce problème. Même si une typologie exacte et exhaustive est toujours délicate, il est possible toutefois de dégager trois grandes approches : algébrique fondée sur l'utilisation du polynôme caractéristique,[8], [10], fréquentielle, [44] et l'approche fondée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov, [9], [25], [8]. De nombreux travaux ont vu le jour suivant les différentes approches et cette problématique a atteint un état de maturité important qui implique que les problématiques actuelles sont en général d'une grande complexité. Ainsi, le problème de l'analyse robuste en stabilité vis à vis d'incertitudes structurées n'est-il pas complètement résolu et l'on doit faire face à un compromis inévitable entre la complexité de la méthode et le degré de pessimisme qu'elle implique. Nous proposons donc dans la suite de ce chapitre des solutions de faible complexité améliorant les résultats existants pour des problèmes réputés difficils.

Les modèles linéaires polytopiques

Dans cette partie, nous nous interessons à la stabilité de l'inclusion différentielle,

$$\delta[x(t)] = Ax(t) \qquad A \in \mathcal{A} = co\left\{A^{[1]}, \cdots, A^{[N]}\right\} \tag{15}$$

Afin d'utiliser une terminologie plus concise largement en usage, nous parlerons de stabilité robuste du polytope de matrices $\mathcal{A}$. Dans certains cas, la caractéristique discrète ou continue sera explicitement détaillée par les indices "d" ou "c" quand cela sera nécessaire. Le problème d'analyse de la stabilité robuste d'un polytope de matrices a été très largement évoqué dans la littérature et de nombreuses tentatives ont été faites afin d'obtenir des conditions sur les points extrêmes du polytope. Il n'existe pas toutefois de résultats définitifs sur le sujet excepté pour les matrices de dimension 2 et 3, [7]. Il a en effet été démontré que ce problème est NP-complet, [16]. La plupart des conditions proposées sont des conditions suffisantes faisant intervenir des restrictions importantes sur les matrices du polytope, (matrices symétriques...) ou utilisant une approche restrictive telle que la stabilité quadratique, [31]. Dans le cadre de la théorie de Lyapunov, quelques travaux ont proposé d'utiliser des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres afin de rendre les résultats de stabilité quadratique moins pessimistes, [6], [38]. Nous reprenons ici cette idée et montrons qu'une condition suffisante de stabilité robuste d'un polytope de matrices peut être donnée en termes de l'existence de solutions à des contraintes $\mathcal{LMI}$ ne faisant intervenir que les matrices sommets du polytope.

Dans la suite, pour plus de concision, nous utiliserons la notation suivante,

$$\begin{array}{ll} Temps\ discret\ : & \mathcal{P}(P) = \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \\ \\ Temps\ continu\ : & \mathcal{P}(P) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \qquad [16]$$

Définition 1 *:*

- *$\mathcal{A}$ est robustement stable ssi, pour chaque $A \in \mathcal{A}$, il existe une matrice $P \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que,*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & A \end{bmatrix} \mathcal{P}(P) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [17]$$

- *$\mathcal{A}$ est quadratiquement stable ssi pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe une unique matrice $P \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que,*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & A \end{bmatrix} \mathcal{P}(P) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [18]$$

• **Remarque 1** *:*

La différence majeure entre les deux définitions réside dans l'unicité de la matrice de Lyapunov attestant de la stabilité sur l'ensemble du domaine dans le cas de la stabilité robuste quand pour établir la stabilité robuste il est suffisant de disposer d'une matrice de Lyapunov pour chaque réalisation de la matrice A dans le polytope de matrices $\mathcal{A}$.

Il est bien connu depuis les travaux de [43], [51] que ces deux notions de stabilité ne sont équivalentes que sous des hypothèses très restrictives sur la nature de l'incertitude. Dans le cas des incertitudes linéaires polytopiques, une interprétation par la théorie des jeux de ces deux définitions a été proposé dans [13].Une borne supérieure de la distance entre stabilité robuste et stabilité quadratique peut ainsi être définie. Nous rappelons tout d'abord une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique.

Théorème 1 *: [31], [25]*

$\mathcal{A}$ est stable quadratiquement si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & A_i \end{bmatrix} \mathcal{P}(P) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_i' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [19]$$

Cette condition est intéressante puisqu'elle permet de tester la stabilité robuste du modèle incertain à partir d'un nombre fini de contraintes $\mathcal{LMI}$ écrites aux sommets du polytope. Elle ne constitue toutefois qu'une condition suffisante de stabilité robuste qui peut s'avérer parfois très pessimiste, (cf. exemples dans [13]).
La remarque 1 permet d'envisager de réduire le pessimisme de la stabilité quadratique et de se rapprocher de la stabilité robuste en considérant non plus une fonction de Lyapunov unique mais des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres.

Théorème 2 *: [27], [47]*

S'il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ telles que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N \qquad \mathcal{P}(P_i) + \left[\begin{array}{c} A_i \\ -\mathbf{1} \end{array}\right] H + H' \left[\begin{array}{cc} A_i' & -\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0} \qquad [20]$$

alors $\mathcal{A}$ est stable de manière robuste.

Une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres $P = \sum_{i=1}^{N} \xi_i P_i$ est associée à chaque élément $A = \sum_{i=1}^{N} \xi_i A_i$ du polytope $\mathcal{A}$.

Ce résultat permet essentiellement de faire apparaitre des variables de relaxation additionnelles à travers la matrice H et permet également l'utilisation de fonctions de Lyapunov dont la paramétrisation est polytopique. La condition suffisante proposée est écrite à partir d'un nombre fini de contraintes $\mathcal{LMI}$ définies aux sommets du polytope comme dans le cas quadratique. Sa complexité numérique est toutefois plus importante puisque le nombre de variables est cette fois égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}N + 2n^2$ pour $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dans le cas de la condition (19). Comme nous le verrons sur les tests numériques statistiques, le gain obtenu en terme de réduction du pessimisme est toutefois très important.
Un cas particulièreemnt remarquable est celui des modèles incertains en temps discret pour lesquels une condition suffisante de stabilité robuste plus simple peut être proposée.

Théorème 3 *: [40], [41]*

S'il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N\ \mathcal{P}(P_i) + \left[\begin{array}{c} A_i \\ -\mathbf{1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & G \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ G' \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} A_i' & -\mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0} \qquad [21]$$

alors le polytope $\mathcal{A}_d$ est stable de manière robuste.

Cette condition n'a pas d'intérêt majeur pour l'analyse de stabilité robuste puisqu'elle est clairement plus restrictive que la condition (20) sans pour autant réduire fortement sa complexité. Il est pourtant interessant de constater que la même opération n'est pas possible dans le cas des modèles incertains en temps continu. On verra par la suite que cette caractéstique a des répercussions importantes pour les méthodes de synthèse robuste à base de FLDP.
Le résultat essentiel concernant ces résultats d'analyse robuste en stabilité réside dans la hiérarchie qui peut en être déduite.

Théorème 4 *: [27]*

- *Si $\mathcal{A}$ est stable quadratiquement alors il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ vérifiant la condition (20).*
- *Si $\mathcal{A}_d$ est stable quadratiquement alors il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant la condition (21).*

• **Remarque 2** *:*

Cela n'est pas précisé dans le théorème 4 mais il est clair que la condition du théorème 3 implique la condition du théorème 2.

Afin d'illustrer ces résultats, 5000 polytopes de matrices de dimension $4,\ 5$ ont été générés aléatoirement pour un nombre de sommets $N = 3,\ 4,\ 5$ dans le das des modèles incertains en temps discret. Les matrices sommets sont construites stables, ($|\lambda| < 1$), ce qui ne garantit pas pour autant la stabilité robuste du polytope. Les pourcentages de réussite présentés dans le tableau 1 n'ont qu'une valeur relative. Les résultats de ce tableau nous

n	N	Théorème 1	Théorème 2	Théorème 3
4	3	8.8%	68.6%	91.0%
	4	1.0%	44.0%	75.4%
	5	0.2%	27.4%	63.0%
5	3	7.6%	68.6%	91.4%
	4	0.8%	46.4%	82.8%
	5	0.2%	28.2%	71.2%

Tableau 1. *Résultats statistiques pour 5000 polytopes discrets*

éclairent en plusieurs points.

- Les deux conditions utilisant les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres sont très nettement moins conservatives que la condition fondée sur la stabilité quadratique.
- La contrainte imposée sur la matrice $H = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & G \end{bmatrix}$ dans la condition du théorème 3 apparait relativement restrictive.
- Les écarts constatés entre les différentes méthodes tendent à s'accroitre avec la difficulté du problème, (taille du système, nombre de sommets du polytope).

Les modèles affines paramétriques

Les modèles incertains pour l'analyse robuste sont définis par :

$$\delta[x(t)] = (A_0 + \sum_{i=1}^{p} \delta_i A_i)x(t) = (A_0 + B\Delta C)x(t) \quad \forall\ i = 1, \cdots p\ |\delta_i| < 1 \qquad [22]$$

où $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ défini en (8) et

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} \qquad [23]$$

Ce modèle est un cas particulier du modèle linéaire polytopique précédent et il est donc possible de lui appliquer directement les résultats des théorèmes 1, 2 et 3 en utilisant un polytope de matrices Δ ayant $N = 2^p$ matrices sommets Δ_i.

Théorème 5 *:*

1- (22) est stable quadratiquement si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & A_0 + B\Delta_i C \end{bmatrix} \mathcal{P}(P) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ (A_0 + B\Delta_i C)' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [24]$$

2- S'il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ telles que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$
$$\mathcal{P}(P_i) + \begin{bmatrix} A_0 + B\Delta_i C \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} H + H' \begin{bmatrix} (A_0 + B\Delta_i C)' & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [25]$$

alors (22) est stable de manière robuste.

3- S'il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$
$$\mathcal{P}(P_i) + \begin{bmatrix} A_0 + B\Delta_i C \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_0 + B\Delta_i C)' & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [26]$$

alors (22) est stable de manière robuste.

Les fonctions de Lyapunov utilisées en 2 et 3 du théorème 5 sont polytopiques en l'incertitude. L'information concernant la dépendance affine de la matrice dynamique incertaine en fonction de l'incertitude n'est pas ici utilisée. Dans [22] et [24], il est proposé de rechercher une fonction de lyapunov dépendant des paramètres de manière affine. Deux conditions suffisantes de stabilité robuste exprimées en termes de solution à des contraintes $\mathcal{LMI}$ sont ainsi proposées. Dans [22], l'utilisation de la $\mathcal{S}$-procédure permet d'obtenir une condition suffisante interprétable comme un critère de Popov généralisé. Utilisant un argumant de multiconvexité, [24] propose un test $\mathcal{LMI}$ de stabilité robuste qui peut également prendre en compte une borne sur la vitesse de variation des paramètres. La recherche de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres de manière affine peut être relaxée également par l'introduction de variables de additionnelles.

Théorème 6 *:*

S'il existe L+1 matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*},\ i = 0, \cdots, L$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ telles que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$
$$\mathcal{P}(P_0 + \Delta_i P) + \begin{bmatrix} A_0 + B\Delta_i C \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix} H + H' \begin{bmatrix} (A_0 + B\Delta_i C)' & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [27]$$

où $P = diag(P_i),\ i = 1, \cdots, L$, alors (22) est stable de manière robuste.

n	Théorème 5-1	[22]	[24]	Théorème 6	Théorème 5-2
2	52.2%	60.3%	69.8%	71.1%	71.3%
3	51.7%	59.5%	65.4%	70.4%	70.4%
4	36.4%	47%	50.9%	57.1%	57.4%
5	34.2%	50.6%	51%	58.6%	59.3%

Tableau 2. *Résultats statistiques pour 5000 matrices incertaines continus*

Cette condition suffisante est surtout intéressante de par le fait que le nombre de variables impliquées est linéaire en le nombre de paramètres incertains, $(p+1)\dfrac{(n+1)n}{2}+2n^2$ pour un nombre de variables exponentiel en le nombre de paramètres incertains, $2^p\dfrac{(n+1)n}{2}+2n^2$, pour la condition 2 du théorème 5.
Ces différents résultats sont maintenant évalués et comparés à ceux proposés dans la littérature. 5000 polytopes de matrices dynamiques continues contenant $L=2$ paramètres incertains sont générés aléatoirement. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.2. Il apparait très clairement que la paramétrisation simplifiée de la fonction de Lyapunov n'a que peu de répercutions sur les résultats obtenus avec les variables de relaxation tout en accélérant la procédure de résolution. Sur des problèmes relativement simples, $(L=2)$, les nouvelles méthodes proposées font clairement apparaitre un gain substantiel par rapport aux méthodes existantes.

3.3. *Analyse robuste en performance*

$\mathcal{D}_R$-stabilité robuste

Dans ce qui suit, le problème d'analyse de stabilité robuste des modèles (15) et (22) est généralisé à celui de l'analyse robuste de la localisation des pôles du modèle dynamique incertain dans une sous-région $\mathcal{D}_R$ du plan complexe. Différentes caractérisations mathématiques d'une région $\mathcal{D}_R \subset \mathbb{C}$ ont été données dans la littérature, [29], [14], [47]. Seules les régions $\mathcal{LMI}$ définies comme dans cette dernière référence seront considérées dans ce chapitre.

Définition 2 *:*

Soit $R \in \mathcal{S}_{2d}$ une matrice partitionnée comme :

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R'_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \quad : \quad \begin{array}{l} R_{11} = R'_{11} \in \mathbb{R}^{d\times d} \\ R_{22} = R'_{22} \in \mathbb{R}^{d\times d} \end{array} \qquad [28]$$

Nous définissons la région du plan complexe $\mathcal{D}_R$:

$$\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \quad : \quad R_{11} + R_{12}z + R'_{12}z^* + R_{22}zz^* < 0\} \qquad [29]$$

Sans autres hypothèses sur la sous-matrice R_{22}, les régions ainsi définies ne sont pas convexes. Si $R_{22} \in \mathcal{S}_d^+$ alors la définition précédente est une reformulation simplificatrice de la définition des régions $\mathcal{LMI}$ donnée dans [14]. Une caractérisation de la $\mathcal{D}_R$-stabilité de type Lyapunov peut être facilement extrapolée des résultats de [14].

Théorème 7 *:*

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $\mathcal{D}_R$-stable si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que :

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA') + R_{12}' \otimes (AP) + R_{22} \otimes (APA') < \mathbf{0} \qquad [30]$$

En utilisant la forme linéaire de la condition (30), les résultats de stabilité robuste en continu et discret peuvent être étendu au problème d'analyse de $\mathcal{D}_R$-stabilité aussi bien pour les modèles incertains du type polytopique que pour ceux du type affine.

Théorème 8 *:*

1- *(15) est $\mathcal{D}_R$-stable quadratiquement si et seulement s'il existe $P \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que,*

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA_i') + R_{12}' \otimes (A_iP) & (\mathbf{1}_d \otimes A_i)(L \otimes P) \\ (L' \otimes P)(\mathbf{1}_d \otimes A_i') & -\mathbf{1}_d \otimes P \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [31]$$

où $R_{22} = LL'$.

2- *S'il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{dn\times 2dn}$ telles que,*

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$

$$R \otimes P_i + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_d \otimes A_i \\ -\mathbf{1}_{dn} \end{bmatrix} H + H' \begin{bmatrix} \mathbf{1}_d \otimes A_i' & -\mathbf{1}_{dn} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [32]$$

alors (15) est stable de manière robuste.

Dans le cas des modèles affines du type (22), la recherche de fonctions de Lyapunov peut être restreinte à la classe des fonctions dépendant des paramètres de manière affine.

Théorème 9 *:*

S'il existe L+1 matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}, i = 0, 1, \cdots, L$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{dn\times 2dn}$ telles que,

$$\forall\ i = 1, \cdots, N$$

$$R \otimes (P_0 + \Delta_i P) + sym \left[\begin{bmatrix} \mathbf{1}_d \otimes (A_0 + B\Delta_i C) \\ -\mathbf{1}_{dn} \end{bmatrix} H \right] < \mathbf{0} \qquad [33]$$

où $P = diag(P_i),\ i = 1, \cdots, L$, alors (22) est stable de manière robuste.

Les conditions de $\mathcal{D}_R$-stabilité robuste fondées sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres ne sont intéressantes que dans la mesure où elles améliorent les résultats bien connus issus du cadre de la stabilité quadratique. Le résultat d'analyse robuste de stabilité dans le disque unité (21) du théorème 3 peut ainsi être étendu à l'etude de la $\mathcal{D}_R$-stabilité dans les régions $\mathcal{LMI}$ bornées du plan complexe. De telles régions vérifient l'hypothèse supplémentaire $R_{22} > \mathbf{0}$.

Théorème 10 *:*

Si $\mathcal{A}$ est stable quadratiquement alors il existe N matrices $P_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $G \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ telles que :

$$\begin{gathered} \forall\ i = 1, \cdots, N \\ R \otimes P_i + sym \begin{bmatrix} \mathbf{1}_d \otimes A_i \\ -\mathbf{1}_{dn} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} (R_{22}^{-1} R_{12}) \otimes \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_{dn} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{gathered} \qquad [34]$$

$\mathcal{A}$ est alors robustement stable.

Ce résultat se déduit en factorisant la matrice H dans la condition (32) du théorème 8 comme :

$$H = G \begin{bmatrix} R_{12} R_{22}^{-1} \otimes \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_{dn} \end{bmatrix} \qquad [35]$$

et en posant :

$$\begin{gathered} H = \begin{bmatrix} R_{12} \otimes P & R_{22} \otimes P \end{bmatrix} \\ \forall\ i = 1, \cdots, N \quad P_i = P \end{gathered} \qquad [36]$$

ce qui permet de retrouver la condition de $\mathcal{D}_R$-stabilité quadratique (31). Ce résultat fait très clairement apparaitre la différence entre le cas continu, pour lequel $R_{22} = 0$, et le cas discret pour lequel $R_{12} = 0$, $R_{22} = 1$, ce qui permet le choix d'une matrice H factorisée sous la forme $H = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & G \end{bmatrix}$.
L'intérêt de l'utilisation des conditions à base de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres est maintenant illustré sur un exemple académique de faible dimension.
Soit le polytope de matrices $\mathcal{A}$ défini par ses deux matrices sommets :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1.2 \end{bmatrix} \qquad [37]$$

Différentes régions du plan complexe sont définies :

i) $Re(z) < -0.9$: $\quad R_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1.8 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$

ii) $Re(z) < -0.9$ et $\|z\| < 2.1$: $\quad R_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4.41 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

iii) $Re(z) < -0.9$ et $\|z+1\| < 1.1$: $\quad R_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.21 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

iv) $Re(z) < -0.9$ et $\|z+1\| < 0.9$: $$R_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.19 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La figure 1 montre la répartition des valeurs propres des matrices du polytope $\mathcal{A}$ quand le paramètre incertain varie de 0 à 1. Il est remarquable de constater que l'analyse menée à l'aide de la $\mathcal{D}_R$-stability quadratique donne une réponse positive uniquement dans le cas de la région définie en i) alors que la condition (32) du théorème 8 donne une réponse positive dans les trois premiers cas et échoue naturellement dans le cas de la région définie en iv).

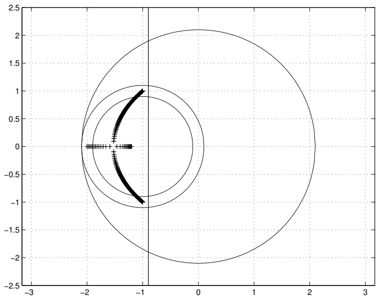


Figure 1. *$\mathcal{D}_R$ régions et localisations des pôles*

Critères de performance $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

On considère, dans cette section, le paradigme utilisé usuellement en analyse robuste de performance : où $w \in \mathbb{R}^l$, $z \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^m$. Le modèle LTI incertain est défini

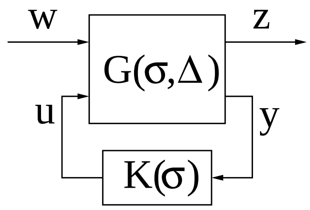


Figure 2. *Problème standard*

par sa représentation d'état (3) ou (6). Pour un contrôleur $K(\sigma)$ donné et pour une classe de vecteurs de perturbations $w(t)$, étudier la taille du vecteur des sorties controllées $z(t)$ revient à évaluer le degré de performance de la boucle fermée à partir d'un critère de performance défini comme une norme sur le transfert $T_{zw}(\sigma, K)$. Pour ce faire, il est nécessaire de définir une norme sur le vecteur des perturbations exogènes et une norme sur le vecteur des sorties. Cela permet en retour de définir la norme-système associée,

(induite ou non). Différentes normes, $\mathcal{H}_2$, [21], $\mathcal{H}_\infty$, [57], $\mathcal{L}_1$, [17], permettant de définir différents types de critères de performance ont été largement étudiées dans la littérature. Dans ce chapitre, nous nous interessons plus particulièrement aux critères de performance déduits de la norme $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$. D'autre part, du fait que les modèles incertains affines sont inclus dans les modèles polytopiques, ces derniers sont principalement utilisés pour la présentation générale des résultats. Les cas permettant la prise en compte de la structure affine seront explicitement mentionnés.
On suppose que le contrôleur $K(\sigma)$ est donné et que l'on désire analyser le degré de performance robuste $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ du modèle incertain en boucle fermée. Le modèle du système n'étant pas parfaitement connu, une façon raisonnable d'envisager le problème de performance robuste est de considérer le calcul de la norme $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ dans *le pire des cas*. Cela consiste à déterminer l'élément maximal de l'ensemble des normes $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ sur l'ensemble des modèles possibles. Nous présentons en détails en premier lieu le problème d'analyse $\mathcal{H}_2$ qui servira de référence pour la présentation du cas $\mathcal{H}_\infty$.

Problème 1 *: analyse $\mathcal{H}_2$ dans le pire des cas*

Le modèles polytopique en boucle fermée étant caractérisé par la fonction de transfert en boucle fermée,

$$T_{zw}(\sigma, K) = C_1(K)(\sigma \mathbf{1} - A(K))^{-1} B_1(K) \qquad [38]$$

dont le le modèle d'état associé est donné par,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(K) & B_1(K) \\ C_1(K) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \end{bmatrix} &= M(K) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \qquad M(K) \in \mathcal{M} \end{aligned} \qquad [39]$$

le problème consiste à calculer $\Gamma_2 = \max\limits_{M(K) \in \mathcal{M}} ||T_{zw}(\sigma, K)||_2$.

Ce problème est en général très difficile et l'approche classique consiste à dériver des bornes supérieures γ_2 que l'on appelle **coûts garantis** $\mathcal{H}_2$. De nombreuses références ainsi qu'une présentation détaillée et des comparaisons entre différentes méthodes $\mathcal{LMI}$ sont proposées dans les chapitres 7 et 8 de la référence [21]. Le calcul des bornes supérieures fait le plus souvent appel à la formulation $\mathcal{LMI}$ et nous rappellons tout d'abord la caractérisation $\mathcal{LMI}$ de la norme $\mathcal{H}_2$.

Lemme 1 *: norme $\mathcal{H}_2$*

Etant donné un modèle d'état certain strictement propre de fonction de transfert,

$$T_{zw}(\sigma, K) = C_1(K)(\sigma \mathbf{1} - A(K))^{-1} B_1(K) \qquad [40]$$

l'inégalité $||T_{zw}(\sigma, K)||_2^2 < \gamma_2$ *est vérifiée si et seulement s'il existe* $X \in \mathcal{S}_n^{+*}$ *et* $T \in \mathcal{S}_q^{+*}$

telles que l'ensemble $\mathcal{LMI}$ défini par,

$$trace(T) < \gamma_2$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A(K) \end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & N_2(A) \end{array}\right]} \mathcal{R}_2(X, B_1) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & A'(K) \end{array}\right] < \mathbf{0} \qquad [41]$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & C_1(K) \end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & N_2(C_1) \end{array}\right]} \mathcal{T}_2(X, T) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & C_1'(K) \end{array}\right] < \mathbf{0}$$

admet une solution. Les notations utilisées correspondent aux définitions suivantes,

$$\mathcal{R}_2(X, B_1) = \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{1} & \left[\begin{array}{cc} B_1'(K) & \mathbf{0} \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c} B_1(K) \\ \mathbf{0} \end{array}\right] & \mathcal{P}(X) \end{array}\right] \qquad [42]$$

$$[43]$$

$$\mathcal{T}_2(X, T) = \left[\begin{array}{ccc} -T & \mathbf{0} & X \\ \mathbf{0} & -X & \mathbf{0} \\ X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \qquad [44]$$

• **Remarque 3** *Une caractérisation duale de la norme $\mathcal{H}_2$ est toujours possible. Il suffit de choisir,*

$$\mathcal{R}_2(X, C_1) = \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{1} & \left[\begin{array}{cc} C_1(K) & \mathbf{0} \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c} C_1'(K) \\ \mathbf{0} \end{array}\right] & \mathcal{P}(X) \end{array}\right] \qquad [45]$$

$$N_2(A) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ A'(K) \end{array}\right] \qquad [46]$$

$$N_2(C_1) = N_2(B_1) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ B_1'(K) \end{array}\right] \qquad [47]$$

Dans le cas certain, ces deux formulations sont strictement identiques. Il n'en est rien dans le cas incertain.

Le théorème suivant fournit différentes méthodes $\mathcal{LMI}$ fournissant différents coûts garantis $\mathcal{H}_2$.

Théorème 11 *: coûts garantis $\mathcal{H}_2$*

Etant donné le polytope de matrices défini en (39), avec N sommets, $\mathcal{M} = \{M^{[1]}(K), \cdots, M^{[N]}(K)\}$, 1- *S'il existe une matrice* $X \in \mathcal{S}_n^{+*}$ *et une matrice* $T \in \mathcal{S}_q^{+*}$ *solutions optimales du problème de programmation semi-définie positive (48) d'argument optimal* γ_2^{quad}*,*

$$\min \quad \gamma_2$$

$$\begin{aligned} & Trace(T) < \gamma_2 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & N_2(A^{[i]}) \end{bmatrix} \mathcal{R}_2(X, B_1^{[i]}) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ N_2'(A^{[i]}) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & N_2(C_1^{[i]}) \end{bmatrix} \mathcal{T}_2(X, T) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ N_2'(C_1^{[i]}) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \end{aligned} \qquad [48]$$

alors le polytope de matrices $\mathcal{M}$ *est stable quadratiquement et* γ_2^{quad} *est un coût garanti* $\mathcal{H}_2$*.*

2- *S'il existe* N *matrices* $X^{[i]} \in \mathcal{S}_n^{+*}$*, une matrice* $T \in \mathcal{S}_q^{+*}$ *et deux matrices* $(H_1,\ H_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2n} \times \mathbb{R}^{n\times(q+n)}$ *solutions optimales du problème de programmation semi-définie positive (49) d'argument optimal* $\gamma_2^{fldp_1}$*,*

$$\min \quad \gamma_2$$

$$\begin{aligned} & Trace(T) < \gamma_2 \\ & \mathcal{R}_2(X^{[i]}, B_1^{[i]}) + sym \left[\begin{bmatrix} N_2(A^{[i]}) \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & H_1 \end{bmatrix} \right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \\ & \mathcal{T}_2(X^{[i]}, T) + sym \left[\begin{bmatrix} N_2(C_1^{[i]}) \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & H_2 \end{bmatrix} \right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \end{aligned} \qquad [49]$$

alors le polytope de matrices $\mathcal{M}$ *est stable robustement et* $\gamma_2^{fldp_1}$ *est un coût garanti* $\mathcal{H}_2$*.*

3- *S'il existe* N *matrices* $X^{[i]} \in \mathcal{S}_n^{+*}$*, une matrice* $T \in \mathcal{S}_q^{+*}$ *et une matrice* $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *solutions optimales du problème de programmation semi-définie positive (50) d'argument optimal* $\gamma_2^{fldp_2}$*,*

$$\min \quad \gamma_2$$

$$\begin{aligned} & Trace(T) < \gamma_2 \\ & \mathcal{R}_2(X^{[i]}, B_1^{[i]}) + sym \left[\begin{bmatrix} N_2(A^{[i]}) \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & G \end{bmatrix} \right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \\ & \mathcal{T}_2(X^{[i]}, T) + sym \left[\begin{bmatrix} N_2(C_1^{[i]}) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & G \end{bmatrix} \right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \end{aligned} \qquad [50]$$

alors le polytope discret de matrices $\mathcal{M}$ est stable robustement et $\gamma_2^{fldp_2}$ est un coût garanti $\mathcal{H}_2$.

• **Remarque 4** *:*

La différence entre la condition 2- et la condition 3- réside dans la structuration des matrices H_1 et H_2 en une matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & G \end{bmatrix}$.

• **Remarque 5** *:*

Pour les conditions 1- à 3-, une formulation duale existe qui conduit à des coûts garantis différents de ceux fournis par la méthode primale sans que l'on puisse montrer qu'une formulation ait un avantage sur l'autre. La formulation proposée a l'avantage de pouvoir être directement utilisée pour les problèmes de synthèse par retour d'état. Les différentes formulations seront toutefois tetsées sur un exemple numérique.

Nous abordons maintenant le problème d'analyse robuste en norme H_∞.

Problème 2 *: analyse $\mathcal{H}_\infty$ dans le pire des cas*

Le modèles polytopique en boucle fermée étant caractérisé par la fonction de transfert en boucle fermée,

$$T_{zw}(\sigma, K) = C_1(K)(\sigma\mathbf{1} - A(K))^{-1}B_1(K) + D11(K) \tag{51}$$

dont le le modèle d'état associé est donné par,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(K) & B_1(K) \\ C_1(K) & D_{11}(K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ z(t) \end{bmatrix} &= M(K) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \qquad M(K) \in \mathcal{M} \end{aligned} \tag{52}$$

le problème consiste à calculer $\Gamma_\infty = \max\limits_{M(K)\in\mathcal{M}} ||T_{zw}(\sigma, K)||_\infty$.

De même que dans le cas de l'analyse du pire des cas $\mathcal{H}_2$, des bornes supérieures γ_∞ sont calculées à l'aide d'une formulation de type $\mathcal{LMI}$.

Lemme 2 *: norme $\mathcal{H}_\infty$*

Etant donné un modèle d'état certain de fonction de transfert,

$$T_{zw}(\sigma, K) = D_{11}(K) + C_1(K)(\sigma\mathbf{1} - A(K))^{-1}B_1(K) \tag{53}$$

l'inégalité $||T_{zw}(\sigma, K)||_\infty^2 < \gamma_\infty$ est vérifiée si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telle que l'ensemble $\mathcal{LMI}$ défini par,

- *Pour les modèles en temps continu,*

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \begin{matrix} A(K) \\ C_1(K) \end{matrix} \end{array}\right]}_{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & N_\infty(A, C_1) \end{bmatrix}} \mathcal{R}_\infty^c(X) \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline \begin{matrix} A'(K) & C_1'(K) \end{matrix} \end{array}\right] < \mathbf{0} \tag{54}$$

où,

$$\mathcal{R}^c_\infty(X,B_1,D_{11}) = \begin{bmatrix} B_1(K)B_1'(K) & B_1(K)D_{11}'(K) & X \\ \star & -\gamma_\infty \mathbf{1} + D_{11}(K)D_{11}'(K) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad [55]$$

- *Pour les modèles en temps discret,*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1} & \begin{array}{c} A(K) \\ C_1(K) \end{array} \end{array}\right] \mathcal{R}^d_\infty(X,B_1,D_{11}) \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline A'(K) \quad C_1'(K) \end{array}\right] < \mathbf{0} \qquad [56]$$

où,

$$\mathcal{R}^d_\infty(X) = \begin{bmatrix} B_1(K)B_1'(K) - X & B_1(K)D_{11}'(K) & \mathbf{0} \\ \star & -\gamma_\infty \mathbf{1} + D_{11}(K)D_{11}'(K) & \mathbf{0} \\ \star & \star & X \end{bmatrix} \qquad [57]$$

admet une solution.

Différents calculs des coûts garantis $\mathcal{H}_\infty$ peuvent être proposés.

Théorème 12 *: coûts garantis $\mathcal{H}_\infty$*

Etant donné le polytope de matrices défini en (39), avec N sommets, $\mathcal{M} = \{M^{[1]}(K), \cdots, M^{[N]}(K)\}$,

1- *S'il existe une matrice $X \in \mathcal{S}_n^{+*}$ solution optimale du problème de programmation semi-définie positive (58) d'argument optimal γ_∞^{quad},*

$$\min \quad \gamma_\infty$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & N_\infty(A^{[i]}, C_1^{[i]}) \end{bmatrix} \mathcal{R}_\infty(X, B_1^{[i]}, D_{11}^{[i]}) \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ N_\infty(A^{[i]}, C_1^{[i]}) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \qquad [58]$$

alors le polytope de matrices $\mathcal{M}$ est stable quadratiquement et γ_∞^{quad} est un coût garanti $\mathcal{H}_\infty$.

2- *S'il existe N matrices $X^{[i]} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times(2n+q)}$ solutions optimales du problème de programmation semi-définie positive (59) d'argument optimal $\gamma_\infty^{fldp_1}$,*

$$\min \quad \gamma_\infty$$

$$\mathcal{R}^c_\infty(X^{[i]}, B_1^{[i]}, D_{11}^{[i]}) + sym\left[\begin{bmatrix} N_\infty(A^{[i]}, C_1^{[i]}) \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix} H\right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \qquad [59]$$

alors le polytope de matrices $\mathcal{M}$ est stable robustement et $\gamma_\infty^{fldp_1}$ est un coût garanti $\mathcal{H}_\infty$.

3- *S'il existe N matrices $X^{[i]} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times(3n+q)}$ solutions optimales du problème de programmation semi-définie positive (60) d'argument optimal*

$\gamma_\infty^{fldp_1}$,

$$\min \quad \gamma_\infty$$
$$\mathcal{R}_\infty^d(X^{[i]}, B_1^{[i]}, D_{11}^{[i]}) + sym\left[\left[\begin{array}{c} N_\infty(A^{[i]}, C_1^{[i]}) \\ \mathbf{-1} \end{array}\right] H\right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \qquad [60]$$

4- S'il existe N matrices $X^{[i]} \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et une matrice $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ solutions optimales du problème de programmation semi-définie positive (61) d'argument optimal $\gamma_\infty^{fldp_2}$,

$$\min \quad \gamma_\infty$$
$$\mathcal{R}_\infty^d(X^{[i]}, B_1^{[i]}, D_{11}^{[i]}) + sym\left[\left[\begin{array}{c} N_\infty(A^{[i]}, C_1^{[i]}) \\ \mathbf{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & G \end{array}\right]\right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \qquad [61]$$

alors le polytope discret de matrices $\mathcal{M}$ est stable robustement et $\gamma_\infty^{fldp_2}$ est un coût garanti $\mathcal{H}_\infty$.

- **Remarque 6** *:*

La remarque concernant les caractérisations duales de la norme $\mathcal{H}_2$ ne peut être extrapolée au cas de la norme $\mathcal{H}_\infty$. En effet, écrire la condition duale dans le cas certain ou sur la condition de stabilité quadratique revient à écrire une condition strictement équivalente. Dans le cas des conditions utilisant les FLDP, cela n'est pas le cas et il peut être intéressant de distinguer la formulation duale et primale en considérant les changements suivant :

$$\mathcal{R}_\infty^c(X, C_1, D_{11}) = \left[\begin{array}{ccc} C_1'(K)C_1(K) & C_1'(K)D_{11}(K) & X \\ \star & -\gamma_\infty\mathbf{1} + D_{11}'(K)D_{11}(K) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{array}\right] \qquad [62]$$
$$\mathcal{R}_\infty^d(X, C_1, D_{11}) = \left[\begin{array}{ccc} C_1'(K)C_1(K) - X & C_1'(K)D_{11}(K) & \mathbf{0} \\ \star & -\gamma_\infty\mathbf{1} + D_{11}'(K)D_{11}(K) & \mathbf{0} \\ \star & \star & X \end{array}\right] \qquad [63]$$
$$N_\infty(A, C_1) = N_\infty(A, B_1) = \left[\begin{array}{c} A'(K) \\ B_1'(K) \end{array}\right] \qquad [64]$$

Corollaire 1 *:*

Les coûts garantis définis aux théorèmes 11 et 12 vérifient,

$$\gamma_\bullet^{fldp_1} \leq \gamma_\bullet^{fldp_2} \leq \gamma_\bullet^{quad} \qquad [65]$$

Afin d'illustrer les résultats précédents d'analyse robuste en performance, deux exemples numériques, respectivement en temps continu et en temps discret ont été choisis et les

Coût garanti	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$
$\gamma_\bullet^{quad}$	2.2886	7.1124
$\gamma_\bullet^{quad}$ dual	2.8369	7.1124
$\gamma_\bullet^{fldp}$	1.3748	3.7308
$\gamma_\bullet^{fldp} dual$	1.4728	3.7268

Tableau 3. *Bornes de coût garanti : exemple en temps continu*

coûts garantis $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont calculés dans les deux cas. Le premier exemple en temps continu consiste en l'exemple illustratif du système masse-ressort présenté en section 2.4.

Le tableau 3 montre très clairement la réduction du pessimisme entre la borne $\gamma_\bullet^{quad}$ et la borne $\gamma_\bullet^{fldp}$ ainsi que les différences entre la formulation duale et la formulation primale. L'exemple en temps discret est l'exemple 2 repris de la publication [26]. Pour celui-ci, un gain stabilisant ainsi que le coût garanti $\mathcal{H}_2$ ont été recalculés en utilisant la condition proposée dans [26]. Le système bouclé par ce gain est ensuite analysé en termes de norme $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ par les différentes méthodes du théorème 12 et les formulations duales associées. Si la réduction du pessimisme est très importante en ce qui concerne le passage

Coût garanti	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$
$\gamma_\bullet^{quad}$	37.8396	215.91
$\gamma_\bullet^{quad} dual$	58.9865	-
$\gamma_\bullet^{fldp_1}$	20.6043	102.6566
$\gamma_\bullet^{fldp_1}$ dual	29.0052	-
$\gamma_\bullet^{fldp_2}$	21.7306	102.6566
$\gamma_\bullet^{fldp_2} dual$	36.0741	102.6566

Tableau 4. *Bornes de coût garanti : exemple en temps discret*

des conditions quadratiques aux conditions avec fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres, cette réduction est moins sensible entre les bornes $\gamma_\bullet^{pdlf_1}$ et $\gamma_\bullet^{pdlf_2}$, voir inexistante pour la norme $\mathcal{H}_\infty$. Il ne faut toutefois pas en déduire nécessairement que cela est toujours le cas.

4. Synthèse robuste

4.1. *Introduction*

Au centre des préoccupations de l'Automatique moderne, le problème de la synthèse de compensateurs robustes vis à vis d'incertitudes structurées a suscité un intérêt considérable durant ces dernières années. Cette problématique est toujours largement ouverte

puisqu'il n'existe pas actuellement d'approche permettant de l'aborder dans toute sa généralité tout en garantissant une complexité faible des calculs et des performances garanties. Ainsi, le cadre de travail de la valeur singulière structurée si fécond en analyse a permis de développer la μ-synthèse fondée sur la méthode itérative des $''D-K''$-itérations, [57]. Il s'agit principalement d'alterner les étapes d'analyse, (recherche de multiplieurs, séparateurs quadratiques ou autres "scalings") avec les étapes de synthèse d'un compensateur. Si l'on peut montrer que chaque étape individuelle peut être ramenée à un problème d'optimisation convexe, la procédure globale ne possède pas la propriété de convexité. De fait, les méthodes de synthèse fondées sur l'utilisation de multiplieurs, [52], de séparateurs quadratiques, [21] ou de scalings, [57], conduisent à des conditions bilinéaires en les variables recherchées. Dans la majorité des cas, la prise en compte de l'incertitude implique nécessairement une complexité importante. Il existe toutefois un certain nombre de cas qui permettent de conserver aux problèmes de synthèse robuste le caractère $\mathcal{LMI}$ des conditions proposées. Nous présentons dans cette partie quelques aspects du problème de synthèse pour lesquels l'emploi de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres et des nouvelles conditions proposées permettent une avancée significative tout en garantissant une amélioration certaine des résultats antérieurs.
Il est ainsi toujours possible dans le cas du retour d'état, [9], et dans le cas du retour de sortie d'ordre plein nominal, [53], d'utiliser un changement de variables sur les paramètres du compensateur, linéarisant afin de traduire une spécification d'analyse en boucle fermée en une spécification correspondante de synthèse, tout en conservant le caractère $\mathcal{LMI}$ des conditions. Les problèmes de $\mathcal{D}_R$-stabilisation robuste par retour d'état, de synthèse de retour d'état à coût garanti $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont ainsi abordés dans ce cadre en considérant que le modèle incertain est du type polytopique. Finalement, le problème de synthèse multi-objectifs, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, dans le cas nominal est également abordé.

4.2. *$\mathcal{D}_R$-stabilisation robuste par retour d'état*

Le problème particulier que nous allons étudier dans cette section est celui de la $\mathcal{D}_R$ stabilisation d'un polytope de matrices par retour d'état. Nous nous sommes limités au problème du retour d'état du fait que le problème plus général du retour de sortie dynamique d'ordre plein est extrêmement délicat à aborder pour une description polytopique de l'incertitude. A notre connaissance, seule l'approche par décomposition croisée proposée dans [28] qui fournit une solution itérative, permet d'aborder ce problème. Le modèle d'état considéré est le suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta[x(t)] \\ y(t) \end{bmatrix} &= M \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad M \in \mathcal{M} \end{aligned} \qquad [66]$$

On suppose, de plus, que le vecteur d'état complet est accessible, $C = \mathbf{1}$ et $D = \mathbf{0}$. Ce problème a une solution $\mathcal{LMI}$ dans le cas où la région de placement considérée est telle que $R_{22} > \mathbf{0}$. Cette restriction exclut les régions non bornées telles que le demi-plan ou le secteur ainsi que les régions produits de l'intersection de régions comprenant au moins une région telle que $R_{22} \geq \mathbf{0}$ mais comprend les régions bornées telles que le disque ou l'ellipse. Sous cette hypothèse, une condition suffisante de $\mathcal{D}_R$ stabilisation robuste peut être définie en termes d'existence de solutions d'inégalités linéaires matricielles.

Théorème 13
S'il existe des matrices $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et N matrices $X_i \in \mathcal{S}_n^{+*}$ telles que $\forall i \in \{i, \cdots, N\}$:

$$R \otimes X_i + \begin{bmatrix} sym\left[R_{12} \otimes (A_i H + B_i S)\right] & -R_{12}' \otimes H' + R_{22} \otimes (A_i H + B_i S) \\ -R_{12} \otimes H + R_{22} \otimes (A_i H + B_i S)' & -R_{22} \otimes (H + H') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad [67]$$

alors (66) est robustement $\mathcal{D}_R$-stabilisable par un gain de retour d'état donné par :

$$K = SH^{-1} \quad [68]$$

Cette condition est fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres du type polytopique et généralise la condition proposée dans [40] pour les systèmes en temps discret.
Afin d'illustrer ces résultats, nous définissons un polytope de matrices en temps continu pour lequel nous souhaitons synthétiser un retour d'état robuste plaçant les pôles dans un disque du demi-plan gauche. Afin de comparer la condition proposée avec celle issue du cadre quadratique, nous choisissons de minimiser le rayon du disque tangentant à la droite verticale définissant un degré donné de stabilité absolue. Le tracé des pôles en boucle fermée pour une discrétisation du paramètre incertain ainsi que les deux disques associés à la méthode quadratique et à la méthode proposée sont représentés à la figure 3.

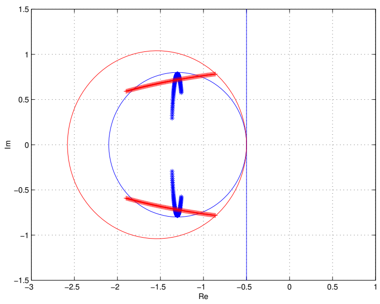


Figure 3. *Placement des pôles dans un disque*

4.3. *Synthèse en temps discret à coût garanti $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$*

L'étape naturelle après celle d'analyse robuste en performance présentée à la section 3.2 est celle de la synthèse de compensateurs optimisant le degré de performance suivant un critère choisi. Le cas de la stabilisation dans une région prédéfinie du plan complexe ayant été abordé dans la section précédente, il s'agit maintenant de proposer des méthodes de synthèse de compensateurs garantissant une borne sur les normes $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ du transfert entre les perturbations exogènes et les sorties controllées. L'objectif est alors évidemment de choisir le compensateur garantissant une borne minimale définissant ainsi une loi de commande à coût garanti $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Ainsi que nous l'avons déjà indiqué dans la section précédente, pour les modèles incertains polytopiques, nous nous limitons volontairement au cas de la synthèse par retour d'état. Le modèle incertain est donc caractérisé par la représentation d'état (69) :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t+1) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x(t+1) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= M \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad M \in \mathcal{M}
\end{aligned} \qquad [69]$$

On suppose de plus que le vecteur d'état complet est accessible, $C_2 = \mathbf{1}$ et $D_{21} = \mathbf{0}$. Les matrices système en boucle fermée sont alors :

$$\begin{array}{ll} A_{cl} = A + B_2 K & B_{1cl} = B_1 \\ C_{1cl} = C_1 + D_{12} K & D_{cl} = D_{11} \end{array} \qquad [70]$$

Nous distinguerons le cas de la commande à coût garanti $\mathcal{H}_2$ pour lequel $D_{11} = \mathbf{0}$ de celui de la commande à coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ pour lequel $D_{11} \neq \mathbf{0}$.

Théorème 14 *: Synthèse à coût garanti $\mathcal{H}_2$*

La solution du problème de minimisation convexe (71) défini par,

$$\begin{array}{lll} & min & \gamma_2 \\ sous & & \\ & & trace(T) < \gamma_2 \\ & & \begin{bmatrix} -T & C_1^{[i]} H + D_{12}^{[i]} S \\ \star & X_i - H - H' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \\ & & \begin{bmatrix} -X_i & A^{[i]} H + B_2^{[i]} S & B_1^{[i]} \\ \star & X_i - H - H' & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \end{array} \qquad [71]$$

fournit une commande à coût garanti $\mathcal{H}_2$ par retour d'état de gain,

$$K_2 = S H^{-1} \qquad [72]$$

Un coût garanti $\mathcal{H}_2$ du système en boucle fermée est donnée par $\sqrt{\gamma_2}$.

Théorème 15 *: synthèse à coût garanti $\mathcal{H}_\infty$*

La solution du problème de minimisation convexe (73) défini par,

$$\begin{array}{ll} & \min \quad \gamma_\infty \\ \text{sous} & \\ & \left[\begin{array}{cccc} -X_i & A^{[i]}H + B_2^{[i]}S & B_1^{[i]} & \mathbf{0} \\ \star & X_i - H - H' & \mathbf{0} & H'C_1^{[i]'} + S'D_{12}^{[i]'} \\ \star & \star & -\mathbf{1} & D_{11}^{[i]'} \\ \star & \star & \star & -\gamma_\infty \mathbf{1} \end{array}\right] < \mathbf{0} \quad \forall\ i = 1, \cdots, N \end{array} \qquad [73]$$

fournit une commande à coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état de gain,

$$K_\infty = SH^{-1} \qquad [74]$$

Un coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée est donnée par $\sqrt{\gamma_\infty}$.

Nous reprenons l'exemple en temps discret de la section 3.2 issu de la référence [26]. Nous avons donc calulé un gain de retour d'état à coût garanti $\mathcal{H}_2$ et un gain de retour d'état à coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ et les coûts garantis $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ respectivement associés obtenus par la résolution des problèmes d'optimisation convexe des théorèmes 14 et 15. Le système bouclé par ces deux gains robustes est ensuite analysé à l'aide des méthodes utilisant les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. Nous n'avons conservé que le meilleur des résultats d'analyse dans tous les cas. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus dans [26] fondés sur le calcul d'un gain quadratiquement stabilisant. L'amélioration

Coût garanti $\mathcal{H}_2$	synthèse	analyse
γ_2^{quad}	37.8396	20.6043
γ_2^{fldp}	19.2374	18.2723

Tableau 5. *Bornes de coût garanti : exemple en temps discret*

des performances est donc sensible pour la norme $\mathcal{H}_2$ et la norme $\mathcal{H}_\infty$, même si cet exemple précis est particulièrement spectaculaire pour la norme $\mathcal{H}_\infty$.

Coût garanti $\mathcal{H}_\infty$	synthèse	analyse
γ_∞^{quad}	215.91	102.6566
γ_∞^{fldp}	69.0818	67.9876

Tableau 6. *Bornes de coût garanti : exemple en temps discret*

4.4. *Synthèse nominale multi-objectifs en temps discret*

La reformulation des problèmes de stabilité et de performance robustes telle qu'elle a été présentée jusqu'ici, fait apparaitre, en analyse et en synthèse, un découplage entre les matrices système et les matrices définissant la fonction de Lyapunov dépendant des paramètres. Cette caractéristique des conditions proposées permet également d'aborder le problème de la synthèse nominale multi-objectifs et de généraliser le Lyapunov Shaping Paradigm qui semblait indépassable depuis [53]. Considérant un problème de synthèse multi-objectifs décrit par différentes spécifications formulées en termes de $\mathcal{LMI}$, le Lyapunov Shaping Paradigm consiste à imposer une fonction de Lyapunov en boucle fermée unique pour l'ensemble des spécifications. Du fait de l'introduction des variables additionnelles et du découplage qui s'en suit, cela n'est plus nécessaire. Le compensateur unique que l'on souhaite calculer s'exprime directement en fonction des nouvelles variables qui doivent donc être communes pour toutes les spécifications, ce qui résulte en un nouveau shaping paradigm, [42]. Afin de ne pas alourdir ce chapitre, nous présentons cette technique pour les spécifications $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, étant bien entendu que la prise en compte de contraintes de performances additionnelles est possible si une formulation associée $\mathcal{LMI}$ existe. Nous définissons le modèle du système comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B \\ C_1 & D_{11} & D \\ C & D_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad [75]$$

avec,

$$z = \begin{bmatrix} z_\infty \\ z_2 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_\infty \\ w_2 \end{bmatrix} \qquad [76]$$

où $w_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ et $z_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$ alors que $w_\infty \in \mathbb{R}^{m_\infty}$ et $z_\infty \in \mathbb{R}^{r_\infty}$, et conséquement,

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} B_\infty & B_2 \end{bmatrix} \qquad D_{11} = \begin{bmatrix} D_\infty & D_{\infty 2} \\ D_{2\infty} & D_2 \end{bmatrix} \\ D_{21} &= \begin{bmatrix} D_{y\infty} & D_{y2} \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} C_\infty \\ C_2 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} D_{\infty u} \\ D_{2u} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad [77]$$

Nous définissons un compensateur dynamique d'ordre plein défini par sa représentation d'état,

$$\begin{aligned} x_K(t+1) &= A_K x(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{aligned} \qquad [78]$$

où $x_K \in \mathbb{R}^n$. Le système en boucle fermée est donc caractérisé par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + BD_K D_{21} \\ B_K D_{21} \end{bmatrix} \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} C_1 + DD_K C & DC_K \end{bmatrix} \quad D_{cl} = [D_{11} + DD_K D_{21}] \end{aligned} \qquad [79]$$

On définit les transferts en boucle fermée $T_{z_\infty w_\infty}(z,K)$ et $T_{z_2 w_2}(z,K)$. Le problème de synthèse multi-objectifs consiste à déterminer un compensateur dynamique (78) tel que :

$$\begin{array}{ll} min & \alpha\gamma_2 + \beta\gamma_\infty \\ sous & \\ & \|T_{z_\infty w_\infty}\|_\infty^2 < \gamma_\infty \\ & \|T_{z_2 w_2}\|_2^2 < \gamma_2 \end{array} \quad [80]$$

Il est à noter que les paramètres α et β sont des paramètres de synthèse permettant de définir précisément le problème que l'on souhaite traiter : minimisation $\mathcal{H}_2$ sous contrainte $\mathcal{H}_\infty$, $(\alpha = 1,\ \beta = 0)$, minimisation $\mathcal{H}_\infty$ sous contrainte $\mathcal{H}_2$, $(\alpha = 0,\ \beta = 1)$ ou une version mixte de ces problèmes.
Afin de résoudre ce type de problèmes, on applique les résultats d'analyse nominale fournis dans les théorèmes 11-3 et 12-4 tout en mettant en oeuvre une généralisation du changement de variables linéarisant de [53]. Pour cela, on note,

$$G = \begin{bmatrix} X & U_2 \\ U_1 & \bullet \end{bmatrix} \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V_2 \\ V_1 & \bullet \end{bmatrix} \quad [81]$$

De même, chaque fonction de Lyapunov en boucle fermée associée à chaque spécification est définie par,

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ Y' & V_1' \end{bmatrix} \mathcal{P}_{cl}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{1} & Y \\ \mathbf{0} & V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & J_2 \\ J_2' & H_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ Y' & V_1' \end{bmatrix} \mathcal{P}^\infty \begin{bmatrix} \mathbf{1} & Y \\ \mathbf{0} & V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\infty & J_\infty \\ J_\infty' & H_\infty \end{bmatrix} \end{array} \quad [82]$$

Le résultat principal est alors le suivant :

Théorème 16 *: [42]*

S'il existe des matrices $T \in \mathcal{S}_{m_2}^{+*}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $P_2 \in \mathcal{S}_n^{+*}$, $H_2 \in \mathcal{S}_n^{+*}$, $P_\infty \in \mathcal{S}_n^{+*}$, $H_\infty \in \mathcal{S}_n^{+*}$, $J_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $J_\infty \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et deux scalaires* $\gamma_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\gamma_\infty \in \mathbb{R}^{+*}$ *solutions du problème* *d'optimisation convexe :*

$$
\begin{array}{ll}
min & \alpha\gamma_2 + \beta\gamma_\infty \\
sous &
\end{array}
$$

$$Trace(T) < \gamma_2$$

$$
\begin{bmatrix} -T & C_2X + D_{2u}\hat{C} & C_2 + D_{2u}\hat{D}C \\ \star & P_2 - X - X' & \mathbf{1} + S' - J_2 \\ \star & \star & H_2 - Y - Y' \end{bmatrix} < \mathbf{0}
$$

$$
\begin{bmatrix} -P_2 & J_2 & AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C & B_2 + B\hat{D}D_{y2} \\ \star & -H_2 & \hat{A} & YA + \hat{B}C & YB_2 + \hat{B}D_{y2} \\ \star & \star & P_2 - X - X' & \mathbf{1} + S' - J_2 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & H_2 - Y - Y' & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}
$$

$$
\begin{bmatrix} -P_\infty & J_\infty & AX + B\hat{C} & A + B\hat{D}C & B_\infty + B\hat{D}D_{y\infty} & \mathbf{0} \\ \star & -H_\infty & \hat{A} & YA + \hat{B}C & YB_\infty + \hat{B}D_{y\infty} & \mathbf{0} \\ \star & \star & P_\infty - X - X' & \mathbf{1} + S' - J_\infty & \mathbf{0} & X'C'_\infty + \hat{C}'D'_{\infty u} \\ \star & \star & \star & H_\infty - Y - Y' & \mathbf{0} & C'_\infty + C'\hat{D}'D'_{\infty u} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{1} & D'_\infty + D'_{y\infty}\hat{D}'D'_{\infty u} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma_\infty \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \qquad [83]
$$

alors le compensateur dynamique dont la représentation d'état est définie par les matrices :

$$
\begin{aligned}
A_K &= V_1^{-T}\left[\hat{A} - Y(A + B\hat{D}C)X - V_1'B_KCX - YBC_KU_1\right]U_1^{-1} \\
B_K &= V_1^{-T}(\hat{B} - YB\hat{D}) \\
C_K &= (\hat{C} - \hat{D}CX)U_1^{-1} \\
D_K &= \hat{D}
\end{aligned} \qquad [84]
$$

résoud le problème de synthèse multi-objectifs (80).

• **Remarque 7** *:*

Etant donnée une solution du problème d'optimisation $\mathcal{LMI}$ (83), la reconstruction du compensateur s'effectue en choisissant V_1 et U_1 matrices non singulières telles que,

$$V_1'U_1 = S - YX \qquad [85]$$

et en remontant par D_K les formules (84).

Différentes illustrations numériques de cette approche peuvent être retrouvées dans la référence [42].

5. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'utilisation d'une nouvelle formulation des conditions de stabilité et de performance robustes a permis l'élaboration d'un cadre de travail très intéressant fondé sur les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. La paramétrisation des fonctions de Lyapunov peut être directement reliée à la modélisation incertaine retenue. Nous n'avons présenté que le cas des modèles incertains polytopiques convexes et affines mais tous les résultats présents dans ce chapitre peuvent être étendus aux modèles incertains de type $\mathcal{LFT}$, [49]. Il est nécessaire de faire appel à des arguments de séparation quadratique afin de retrouver des conditions numériquement solvables, [34]. Dans la plupart des cas, les résultats obtenus avec ces nouvelles conditions sont meilleurs que ceux fournis par la stabilité quadratique. Les problèmes d'analyse et de synthèse robustes apparaissent toutefois de complexité différente dans ce cadre de travail. Autant les résultats d'analyse robuste en stabilité et en performance se sont avérés intéressants, autant peut-on être relativement déçus par les avancées réalisées en synthèse robuste. Il est d'ailleurs tout à fait remarquable de constater la différence entre modèles en temps discret et modèles en temps continu. Les résultats obtenus en temps discret n'ont jusqu'à présent pas pu être totalement étendu aux modèles en temps continu en ce qui concerne les problèmes de synthèse. La compréhension des mécanismes exacts de ces différences ou la levée de celles-ci constituent un champ d'investigations futures d'importance.
Un certain nombre de techniques ont été récemment développées afin d'attaquer numériquement les problèmes impliquant des inégalités matricielles bilinéaires en les variables. Pour mémoire, on peut citer les méthodes de décompositions croisées apparentées aux techniques de DK-itérations, les méthodes de minimisation concave, [1] ou encore les méthodes fondées sur la complémentarité conique, [20]. Les premiers résultats obtenus sur la stabilisation par retour d'état d'un polytope de matrices utilisant cette dernière technique, [4], sont suffisamment prometteurs pour que l'on considère cette direction de recherche avec attention.

Références

[1] P. Apkarian, H.D. Tuan, “Robust control via concave minimization local and global algorithms”, *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 45, No. 2, pp. 299-305, février 2000.

[2] D. Arzelier, J. Bernussou, G. Garcia, "Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector via a Lyapunov-Type Approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-38, No. 7, pp. 1128-1132, 1993.

[3] D.Arzelier, D. Peaucelle, "Robust multi-objective output-feedback control for real parametric uncertainties via parameter-dependent Lyapunov functions", *Proceedings of the 3rd Symposium on Robust Control Design, ROCOND 2000*, Prague, juin 2000.

[4] D.Arzelier, D. Henrion, D. Peaucelle, “Robust $\mathcal{D}_R$ stabilization of a polytope of matrices”, *rapport technique LAAS-CNRS No.* , soumis à Systems & Control Letters, juin 2000.

[5] J.P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer Verlag, 1984.

[6] B.R. Barmish, C.L. DeMarco, "A new method for improvement of robustness bounds for linear state equations", *Proceedings of the Princeton Conf. Inform. Sci. Syst.*, 1986.

[7] B.R. Barmish, H.I. Kang, "A survey of extreme point results for robustness of control systems", *Automatica*, Vol. 29, pp. 13-35, 1993.

[8] B.R. Barmish, *New tools for robustness of linear systems*, Mac Millan, New York, 1994.

[9] J. Bernussou, P.L.D. Peres, J.C. Geromel, "A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp.65-72, 1989.

[10] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel, *Robust control : the parametric approach*, Prentice Hall Information and System Sciences Series, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.

[11] S. Bialas, "A necessary and sufficient condition for stability of interval matrix", *Int. J. Control*, Vol. 39, No. 5, pp. 1103-1104,1983.

[12] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[13] W.H. Chen, “On relationship between quadratic and robust stability of uncertain systems”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 9, pp. 51-58, 1999.

[14] M. Chilali, P. Gahinet, "$\mathcal{H}_\infty$ Design with pole placement constraints : an $\mathcal{LMI}$ approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 3, pp. 358-367, 1996.

[15] M. Chilali, P. Gahinet, P. Apkarian, “Robust pole placement in $\mathcal{LMI}$ regions”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-44, No. 12, pp. 2257-2270, 1999.

[16] G.E. Coxson, C.L. DeMarco, “Testing robust stability of general matrix polytopes is an NP-hard computation”, *Proc. Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, Allerton House, Monticello, IL, pp.105-106, 1991.

[17] M.A. Dahleh, I.J. Diaz-Bobillo, *Control of uncertain systems : a linear programming approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[18] S. Dasgupta, G. Chockalingam, B.D.O. Anderson, M. Fu, “Lyapunov functions for uncertain systems with applications to the stability of time varying systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, Vol. 41, No. 2, Février 1984.

[19] M. Dettori, C.W. Scherer, "Robust stability analysis for parameter-dependent systems using full block S-procedure", *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, décembre 1998.

[20] L. El Ghaoui, F. Oustry, M. Ait Rami, “ A cone complementarity algorithm for static output-feedback and related problems”, *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 42, pp. 1171-1176, 1997.

[21] L. El Ghaoui, S.I. Niculescu, *Advances in linear matrix inequality methods in control*, SIAM Advances in Design and Control, 2000.

[22] E. Feron, P. Apkarian, P. Gahinet, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 7, pp. 1041-1046, 1996.

[23] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali, "$\mathcal{LMI}$ Control Toolbox User's Guide", The Mathworks Partner Series, 1995.

[24] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, "Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-41, No. 3, pp. 436-442, 1996.

[25] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, J. Bernussou, "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems", *SIAM J. on Cont. Opt.*, Vol. 29, pp. 381-402, 1991.

[26] J.C. Geromel, P.L.D. Peres, S.R. Souza, "$\mathcal{H}_2$ guaranted cost control for uncertain discrete-time linear systems", *Int. J. Control*, Vol. 57, No. 4, pp. 853-864, 1993.

[27] J.C. Geromel, M.C. de Oliveira, L. Hsu, "LMI Characterization of structural and robust stability", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 285, 1-3, pp. 69-80, décembre 1998.

[28] J.C. Geromel, J. Bernussou, M.C. de Oliveira, "$\mathcal{H}_2$-norm optimization with contrained dynamic output feedback controllers : decentralized and reliable control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-44, pp. 1449-1454, 1999.

[29] S. Gutman, E.I. Jury, "A general theory for matrix root clustering in subregion of the complex plane", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 853-863, 1981.

[30] A. Helmersson, "Parameter dependent Lyapunov functions based on linear fractional transformation", *Proceedings of the 14th World IFAC Congress*, Beijing, P.R. China, juillet 1999.

[31] H.P. Horisberger, P.R. Belanger, "Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-21, pp. 705-707, octobre 1976.

[32] T. Iwasaki, "Robust performance analysis for systems with structured uncertainty", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, pp. 85-99, 1996.

[33] T. Iwasaki, "Robust stability analysis with quadratic separator : parametric time-varing uncertainty case", *Proceedings of the 36rd Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, décembre 1997.

[34] T. Iwasaki, S. Hara, "Well-posedness of feedback systems : insights into exact robustness analysis and approximate computations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 619-630, 1998.

[35] T. Iwasaki, "LPV system analysis with quadratic separator for uncertain implicit systems", *$\mathcal{LMI}$ methods in Optimisation, Identification and Control*, Seminar, Compiègne, France, mai 1999.

[36] V.A. Kamenetskiy, Y.S. Pyanitskiy, "An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions", *Systems & Control Letters*, Vol. 8, pp. 445-451, 1987.

[37] H. Kokame, H. Kida, T. Mori, "A polytopic quadratic Lyapunov functions approach to stability of a matrix polytope", *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, Hawai, décembre 1990.

[38] M.A. Leal, J.S. Gibson, "A first-order Lyapunov robustness method for linear systems with uncertain parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 9, septembre 1990.

[39] A.P. Molchanov, E.S. Pyatnitskyi, "Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory", *Systems & Control Letters*, Vol. 13, pp.59-64, 1989.

[40] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, J.C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition", *Systems & Control Letters*, Vol. 37, No. 4, juillet 1999.

[41] M.C. de Oliveira, J.C. Geromel, L. Hsu, "$\mathcal{LMI}$ Characterization of structural and robust stability : the discrete-time case", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 296, 1-3, pp.27-38, juillet 1999.

[42] M.C. Oliveira, J.C. Geromel, J. Bernussou, "An $\mathcal{LMI}$ optimization approach to multiobjective and robust $\mathcal{H}_\infty$ controller design for discrete-time systems", *Proceedings of the Control and Decision Conference*, Phoenix, Ar., USA, décembre 1999.

[43] A. Packard, J. Doyle, "Quadratic stability with real and complex perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 2, Février 1990.

[44] A. Packard, J.C. Doyle, "The complex structured singular value", *Automatica*, Vol. 29, no. 1, pp. 71-109, 1993.

[45] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Robust Disk Pole Assignment by state and dynamic output feedback
for Generalised Uncertainty Models - An $\mathcal{LMI}$ Approach", *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Fl., décembre 1998.

[46] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion, "Performance and Quadratic Stabilisability via Dynamic Output Feedback for Uncertain Generalised Models", *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, Beijing, P.R. China, juillet 1999.

[47] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, J. Bernussou, "A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty", *Systems and Control Letters*, vol. 40, pp.21-30, mai 2000.

[48] D. Peaucelle, D. Arzelier, "New $\mathcal{LMI}$-based conditions for robust $\mathcal{H}_2$ performance analysis", *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, Chicago, Il., USA, juin 2000.

[49] D. Peaucelle, D. Arzelier, "Robust performance analysis with $\mathcal{LMI}$ based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions", *rapport technique LAAS-CNRS No. 99231*, submitted for publication in IEEE Transactions on Automatic Control, en révision, juin 1999.

[50] D. Peaucelle, *Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres*, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 04 juillet 2000.

[51] M.A. Rotea, M. Corless, D. Da, I.R. Petersen, "Systems with structured uncertainty : relations between quadratic and robust stability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-38, No. 5, Mai 1993.

[52] M.G. Safonov, R.Y. Chiang, "Real/complex k_m synthesis without curve fitting", *Control and Dynamical Systems*, Vol. 56, Academic, New York, pp. 303-324, 1993.

[53] C. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via $\mathcal{LMI}$ optimisation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911, 1997.

[54] C. Scherer, "A full block S-procedure with applications", *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, CA. , décembre 1997.

[55] R.E. Skelton, T. Iwasaki, K. Grigoriadis, *A unified algebraic approach to linear control design*, Taylor and Francis, 1998.

[56] L.X. Xin, "Necessary and sufficient conditions for stability of a class of interval matrices", *Int. J. Control*, Vol. 45, No. 1, pp. 211-214,1987.

[57] K.Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.