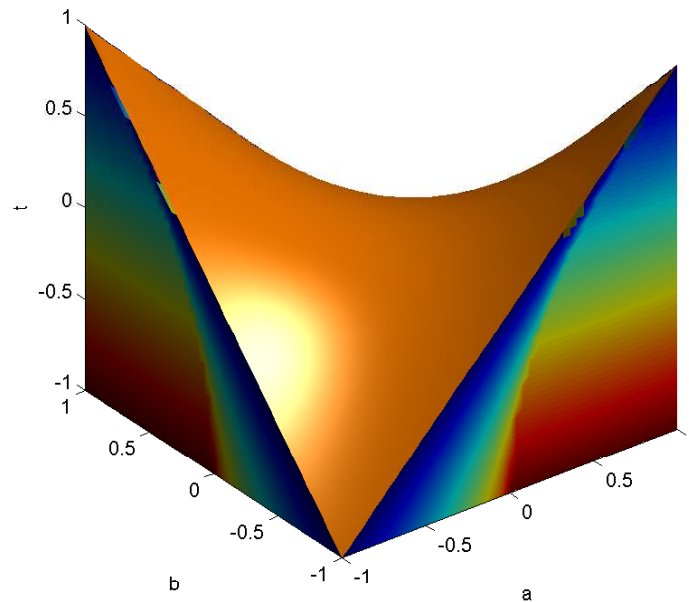
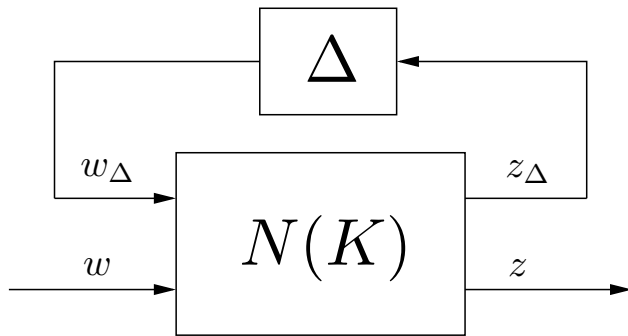


**Analyse et synthèse robustes
des systèmes linéaires**

Cours 9

Analyse de stabilité robuste (suite)



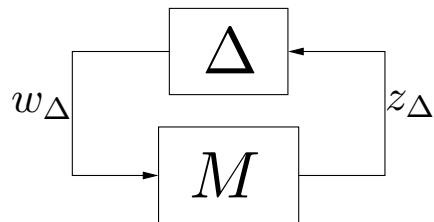


- Forme $N - \Delta$ pour l'analyse robuste :

$$N(K) = \mathcal{L}_l(K, G) = G_{11} + G_{12}K(\mathbf{1} - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

$$\mathcal{S}(\Delta, K) = \mathcal{L}_u(\Delta, N) = N_{22} + N_{21}\Delta(\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}$$

$$M = N_{11}$$



- La forme $M - \Delta$ est-elle stable $\forall \Delta \in \Delta_s$?
- $\Delta = \text{diag} \{ \delta_1 \mathbf{1}, \dots, \delta_{n_r} \mathbf{1}, q_1 \mathbf{1}, \dots, q_{n_c} \mathbf{1}, \Delta_1, \dots, \Delta_{n_f} \} \in \Delta_s$
 - n_r blocs réels répétés avec $\delta_j \in \mathbb{R}$
 - n_c blocs complexes répétés avec $q_j \in \mathbb{C}$
 - n_f blocs complexes pleins avec $\Delta_j \in \mathbb{C}^{p_j \times l_j}$

↳ Hypothèses 1 :

- $N(K)$ est stable de manière interne (stabilité nominale)
- $\Delta \in \Delta_s \Rightarrow \bar{\sigma}(\Delta) < \gamma$, $\tau\Delta \in \Delta_s$, $\forall \tau \in [0, 1]$ et $\forall \Delta \in \Delta_s$, $(\mathbf{1} - N_{11}(\infty)\Delta)^{-1}$ existe
- $B\Delta_s = \{\Delta \in \Delta_s, \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$

□ Théorème 1 :

Pour M et Δ stables, la structure $M - \Delta$ est **stable de manière robuste** ssi

- Le lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} - M(j\omega)\Delta(j\omega))$ n'entoure pas le point $(0, 0)$, $\forall \omega \in \mathbb{R} \cup \infty$, $\forall \Delta \in \Delta_s$
- $\det(\mathbf{1} - M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \Delta \in \Delta_s, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \infty$
- $\lambda_i(M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 1 \quad \forall i, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \infty, \forall \Delta \in \Delta_s$

Nota : conditions difficiles à vérifier

- On suppose que $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ avec $\delta_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$
- On rappelle que la matrice de transfert vue par Δ est donnée par :

$$z_\Delta = - \underbrace{(\mathbf{1} + KF(s))^{-1} KF(s)}_{T_u(s)} w_\Delta = M(s)w_\Delta \quad M(s) = -T_u(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix}$$

- On calcule

$$\mathbf{1} - M(s)\Delta = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\delta_1}{s+1} & \frac{a\delta_2}{s+1} \\ \frac{-a\delta_1}{s+1} & 1 + \frac{\delta_2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{1} - M(s)\Delta) = \frac{1}{(s+1)^2} (s^2 + (2 + \delta_1 + \delta_2)s + 1 + \delta_1 + \delta_2 + (a^2 + 1)\delta_1\delta_2)$$

- CNS de stabilité robuste : Routh-Hurwitz

$$2 + \delta_1 + \delta_2 > 0$$

$$(1 + \delta_1 + \delta_2) + (a^2 + 1)\delta_1\delta_2 > 0$$

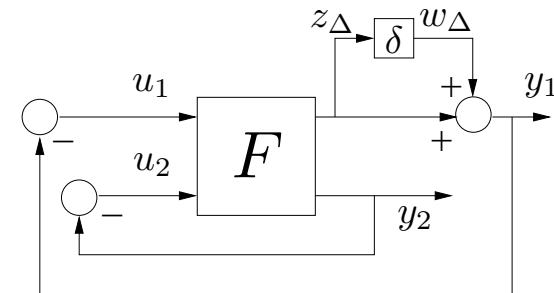
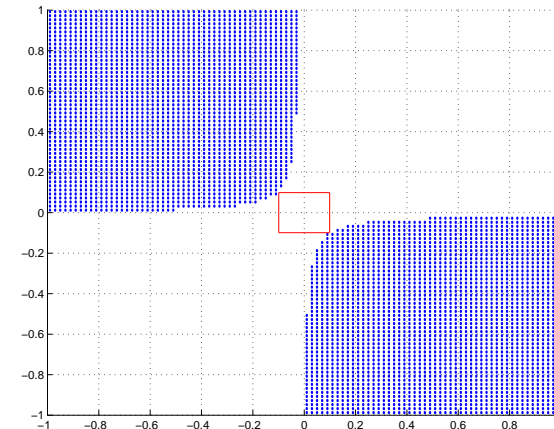
- CNS de stabilité robuste : faible gain

$$\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

- Condition "par boucle" :

$$\frac{z(s)}{w(s)} = -T_{11} = -\frac{1}{s + 1} \quad \|\delta\|_\infty < \frac{1}{\|T_{11}\|_\infty} = 1$$

CNS du faible gain ($\Delta \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$) \Rightarrow CNS de Routh-Hurwitz ($\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$)



Test de stabilité robuste = $\det(\mathbf{1} - M(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 ? , \forall \Delta \in \Delta_s, \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \infty$

Question : pour $M(s) \in \mathbb{C}^{q \times p}$, quelle est la plus petite perturbation (mesurée par $\bar{\sigma}(\Delta)$) $\Delta \in \Delta_s$ telle que $\det(\mathbf{1} - M\Delta) = 0$?

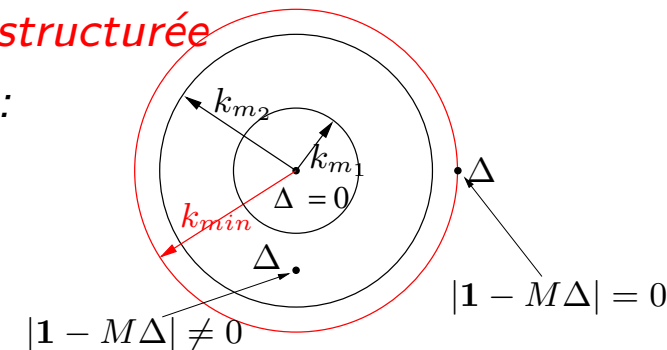
$$k_{min} = \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(\mathbf{1} - M\Delta) = 0 \Delta \in \Delta_s \}$$

$$k_{min} = \inf \{ k_m : \det(\mathbf{1} - k_m M\Delta) = 0 \Delta \in \mathbf{B}\Delta_s \} = \frac{1}{\max_{\Delta \in \mathbf{B}\Delta_s} \rho(M\Delta)}$$

▼ **Définition 1** : *valeur singulière structurée*

Etant donnée une matrice complexe $M \in \mathbb{C}^{q \times p}$, *la valeur singulière structurée* de M respectivement à l'ensemble d'incertitude Δ_s est définie par :

$$\mu_{\Delta_s}(M) = \frac{1}{\min \{ k_m \mid \det(\mathbf{1} - k_m M\Delta) = 0 \forall \Delta \in \Delta_s \}}$$



Si un tel Δ n'existe pas alors $\mu_{\Delta_s}(M) = 0$

□ Théorème 2 : *stabilité robuste et μ*

Si M et $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ alors la structure $M - \Delta$ est *stable de manière robuste* vis-à-vis de $B\Delta_s$ ssi

$$\mu_{B\Delta_s}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \cup \infty$$

♥ Propriétés 1 :

☞ $\mu_{\Delta_s}(M) = \max_{\Delta \in \Delta_s} \rho(M\Delta) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction *continue*

☞ μ_{Δ} croît avec la taille de l'ensemble d'incertitude

$$\Delta_{s1} \subset \Delta_{s2} \Rightarrow \mu_{\Delta_{s1}}(M) \leq \mu_{\Delta_{s2}}(M)$$

☞ $\mu_{\Delta}(\alpha M) = |\alpha| \mu_{\Delta}(M)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

☞ Si $\mu_{\Delta_s}(M) \leq \gamma_1$ alors $M - \Delta$ est *stable de manière robuste* $\forall \Delta \in \frac{1}{\gamma_1} \Delta_s$

☞ Si $\mu_{\Delta_s}(M) > \gamma_2$ alors *il existe* $\Delta \in \frac{1}{\gamma_2} \Delta_s$ telle que $M - \Delta$ est *instable*

Nota : dans le cas général, le calcul de μ est numériquement très difficile

- Incertitude non structurée : $\Delta_s = \Delta = \{\Delta \in \mathbb{C}^{p \times q} \mid \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$

$$\boxed{\mu_{\Delta}(M_c) = \bar{\sigma}(M_c)} \quad \Delta^H = \frac{1}{\bar{\sigma}(M_c)} v_1 u_1^H$$

- Incertitude répétée 1 bloc $\Delta_s = \{\delta \mathbf{1} \mid \delta \in \mathbb{C} \mid |\delta| < 1\}$

$$\boxed{\mu_{\Delta}(M_c) = \rho(M_c)}$$

- Incertitude générale : $\Delta_s = \{\Delta = \text{diag}(q_1 \mathbf{1}, \dots, q_{n_c} \mathbf{1}, \Delta_1, \dots, \Delta_{n_f}) \mid \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$

$$\boxed{\rho(M_c) \leq \mu_{\Delta}(M_c) \leq \bar{\sigma}(M_c)}$$

Exemple : [Skogestad 96]

$$M = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \quad \mu_{\Delta_s}(M) = \begin{cases} \rho(M) = |a + b| & \text{pour } \Delta = \delta \mathbf{1} \\ |a| + |b| & \text{pour } \Delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2\} \\ \bar{\sigma}(M) = \sqrt{2|a|^2 + 2|b|^2} & \text{pour } \Delta \text{ pleine} \end{cases}$$

- $\mu_{\Delta_s}(M) = \max_{\Delta \in \mathcal{B}\Delta_s} \rho_R(M\Delta)$
- **Incertitude répétée 1 bloc** : $\Delta_s = \{\delta \mathbf{1} \mid \delta \in \mathbb{R} \mid |\delta| < 1\}$

$$\mu_{\Delta_s}(M) = \rho_r(M)$$

En général,

$$\{\delta \mathbf{1} \mid \delta \in \mathbb{R} \mid |\delta| < 1\} \subset \Delta_s \subset \{\Delta \in \mathbb{C}^{p \times q} \mid \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$$

d'où **les bornes** :

$$\rho_r(M) \leq \mu_{\Delta_s}(M) \leq \bar{\sigma}(M)$$

Exemple : [Zhou96]

$$M = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rho(M) = 0 \\ \bar{\sigma}(M) = \mu_{\Delta_s} = 1 \end{array}$$

Nota : l'écart entre les bornes inférieure et supérieure peut être grand

Soit l'ensemble $\mathbf{U} = \{U \in \Delta_s \mid UU^H = \mathbf{1}\}$. Pour tout $U \in \mathbf{U}$, alors

$$\mu_{\Delta_s}(M) = \mu_{\Delta_s}(MU)$$

donc :

$$\rho(MU) \leq \mu_{\Delta_s}(MU) = \mu_{\Delta_s}(M)$$

On obtient alors la borne inférieure :

$$\sup_{U \in \mathbf{U}} \rho(MU) \leq \mu_{\Delta_s}(M)$$

$$\max_{U \in \mathbf{U}} \rho(MU) = \mu_{\Delta_s}(M)$$

Nota : la quantité $\rho(MU)$ peut avoir de multiples maxima locaux non globaux. Un algorithme de recherche globale ne peut donc garantir l'obtention de μ

Soit

$$\mathbf{D} = \{\text{diag}(P_1, \dots, P_{n_r}, D_1, \dots, D_{n_c}, d_1 \mathbf{1}, \dots, d_{n_f} \mathbf{1}) \\ P_j = P_j^H > \mathbf{0}, D_j = D_j^H > \mathbf{0}, d_j \in \mathbb{R}^{+*}\}$$

alors $\forall D \in \mathbf{D}$, $D\Delta = \Delta D$, $\det(D) \neq 0$ et $\det(\mathbf{1} - M\Delta) = \det(\mathbf{1} - (D^{-1}MD)\Delta)$

Ainsi

$$\mu_{\Delta_s}(M) = \mu_{\Delta_s}(D^{-1}MD) \leq \bar{\sigma}(D^{-1}MD)$$

$$\mu_{\Delta_s}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(D^{-1}MD)$$

Nota :

- Calcul de la borne supérieure aisé (problème d'optimisation convexe)
- L'écart entre la borne et la valeur réelle peut être grand
- Si $2(n_r + n_c) + n_f \leq 3$ alors il y a égalité

→ $\mu_{\Delta_s}(M)$ est totalement caractérisée par M et par un ensemble structuré Δ_s

→ Calcul exact difficile en général mais on dispose de bornes :

$$l_{\Delta_s}(M) \leq \mu_{\Delta_s}(M) \leq u_{\Delta_s}(M)$$

→ Borne supérieure : $u_{\Delta_s}(M) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(D^{-1}MD)$

$$\det(\mathbf{1} - M\Delta) \neq 0 \quad \forall \Delta \in \frac{1}{u_{\Delta_s}(M)} \Delta_s$$

→ Borne inférieure :

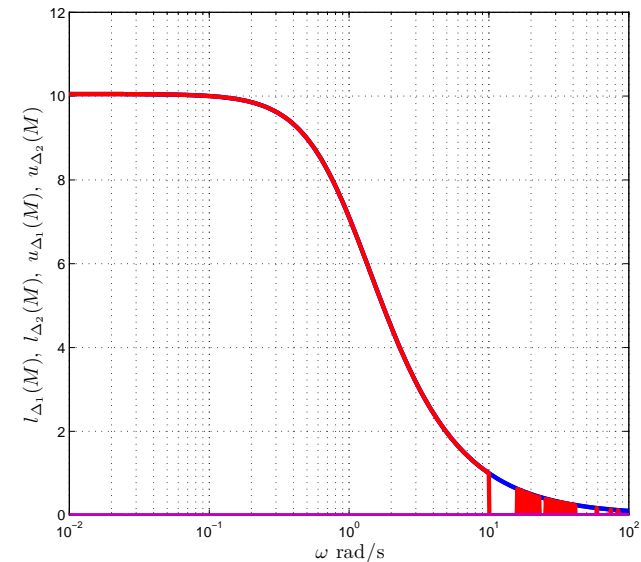
$$\exists \tilde{\Delta} \in \frac{1}{l_{\Delta_s}(M)} \Delta_s \quad \det(\mathbf{1} - M\tilde{\Delta}) = 0$$

μ -analyse pour différentes structures d'incertitude

- Incertitude complexe :

- $\Delta \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$
- $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$
- $\Delta = \text{diag}(\delta, \delta)$

$$\mu(M) = \mu(T) = \bar{\sigma}(T) = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{1 + \omega^2}$$



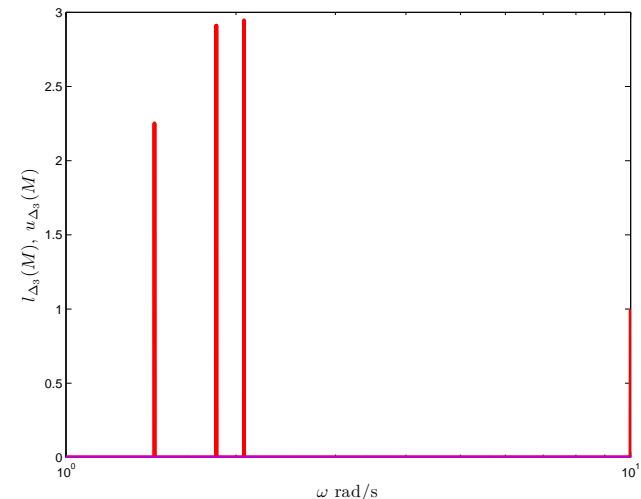
- Incertitude réelle :

- $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2)$

$$\mu(M) = \mu(T) \leq \bar{\sigma}(T) = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{1 + \omega^2}$$

- $\Delta = \text{diag}(\delta, \delta)$

$$\mu(T(10j)) = 1$$



```
>> M=tf([-1] [-10];[10] [-1]},{[1 1] [1 1];[1 1] [1 1]});
>> freqs1=logspace(-2,2,200);Mfrd1=frd(M,freqs1,'Units','rad/s');
>> freqs2=logspace(-2,2,1000);Mfrd2=frd(M,freqs2,'Units','rad/s');
>> freqs3=logspace(0,1,5000);Mfrd3=frd(M,freqs3,'Units','rad/s');
>> deltaset1=[1 0;1 0];deltaset2=[-1 0;-1 0];deltaset3=[-2 0];
>> [ssv1]=mussv(Mfrd1,deltaset1);[ssv2]=mussv(Mfrd2,deltaset2);
>> [ssv3]=mussv(Mfrd3,deltaset3);
>> [SSV1_data,w]=frdata(ssv1);[SSV2_data,w]=frdata(ssv2);
>> [SSV3_data,w]=frdata(ssv3);
>> SSV1_bounds=reshape(SSV1_data,2,200);
>> SSV2_bounds=reshape(SSV2_data,2,1000);
>> SSV3_bounds=reshape(SSV3_data,2,5000);
>> figure(1);semilogx(freqs1,SSV1_bounds(1,:),'b','LineWidth',3);hold;
>> semilogx(freqs1,SSV1_bounds(2,:),'b','LineWidth',3);
>> semilogx(freqs2,SSV2_bounds(1,:),'r','LineWidth',3);
>> semilogx(freqs2,SSV2_bounds(2,:),'color',[0.75 0 0.75],'LineWidth',3);
>> figure(2);semilogx(freqs3,SSV3_bounds(1,:),'r','LineWidth',3);hold;
>> semilogx(freqs3,SSV3_bounds(2,:),'color',[0.75 0 0.75],'LineWidth',3);
```

On suppose $M \in \mathcal{RH}_\infty$

➡ CNS de stabilité robuste :

$$\text{stabilité robuste} \Leftrightarrow \mu_{\mathbf{B}\Delta_s}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

➡ Si

$$\mu_{\Delta_s}(M(j\omega)) \leq \gamma_1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

alors la structure $M - \Delta$ est **stable** pour tout $\Delta \in \frac{1}{\gamma_1} \Delta_s$

➡ Si

$$\mu_{\Delta_s}(M(j\omega)) > \gamma_2 \quad \text{pour } \omega_0 \text{ donnée}$$

alors il existe $\Delta \in \frac{1}{\gamma_2} \Delta_s$ pour laquelle la structure $M - \Delta$ **n'est pas stable**

Soit

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{s-2}{2s+4} \\ -1 & \frac{s+1}{s^2+s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{-1}{2s+1} & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}$$

On définit Δ_s comme l'ensemble des matrices telles que $\bar{\sigma}(\Delta) < 1$ et structurées comme :

- **Cas 1 : deux blocs complexes pleins**

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \Delta_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \\ \Delta_2 \in \mathbb{C} \end{array}$$

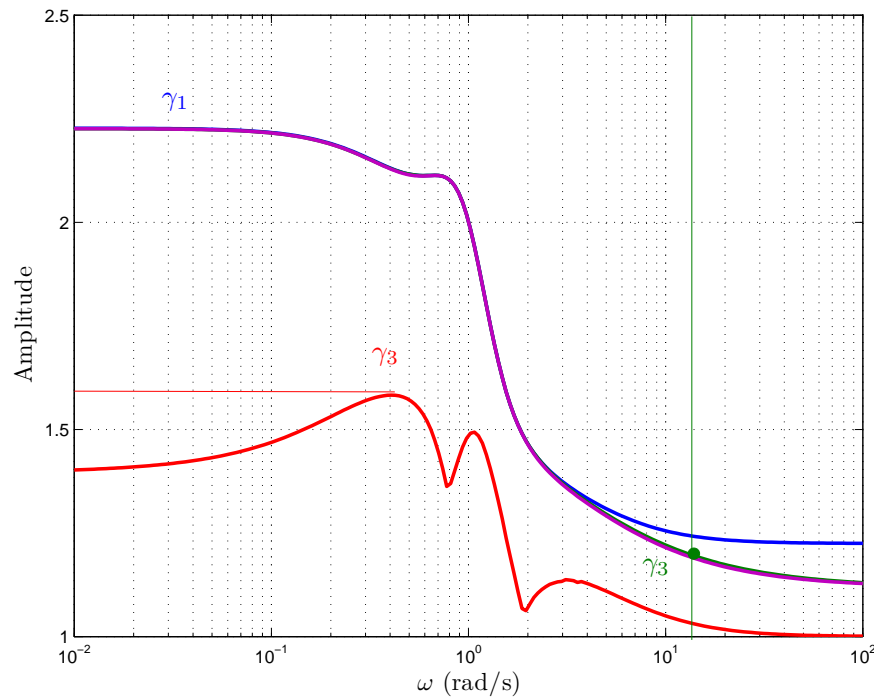
- **Cas 2 : deux blocs complexes répétés et un bloc complexe plein**

$$\Delta_1 = \text{diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \Delta_2 \in \mathbb{C}$$

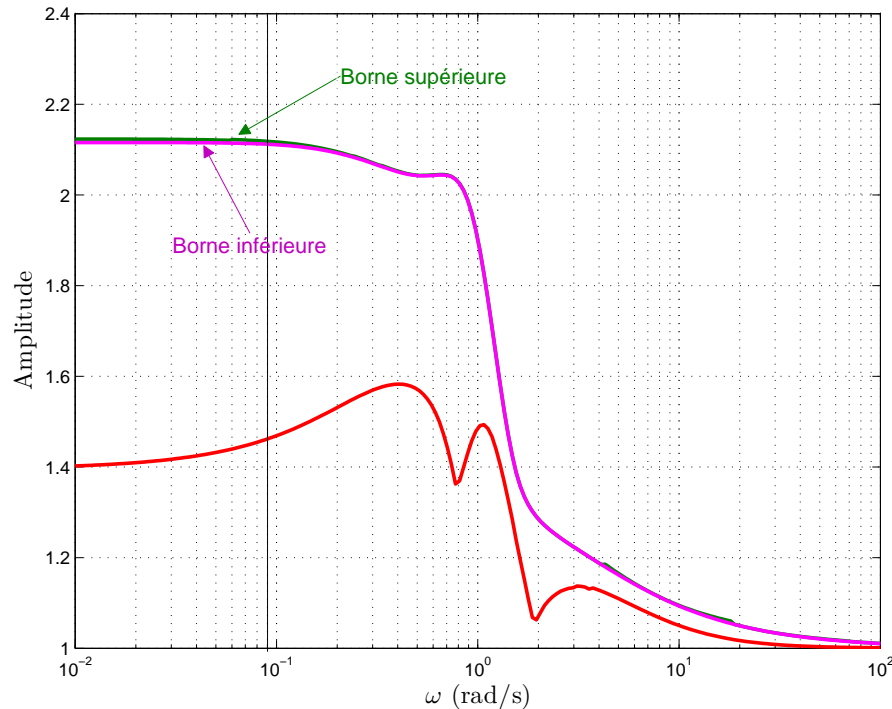
- **Cas 3 : deux blocs réels répétés et un bloc complexe plein**

$$\Delta_1 = \text{diag}(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \Delta_2 \in \mathbb{C}$$


```
>> M=tf({[1 1] 1 [1 -2];-1 [1 1] 1;1 -1 [1 -1]},...
{[2 1] [1 1] [2 4];1 [1 1 1] [1 2 1];[1 3] [2 1] [1 1]});
>> freqs=logspace(-2,2,200);
>> Mfrd=frd(M,freqs,'Units','rad/s');
>> deltaset0=[3 3];deltaset1=[3 0];deltaset2=[2 2;1 1];
>> [Norm]=mussv(Mfrd,deltaset0);[ro_c]=mussv(Mfrd,deltaset1);
>> [ssv]=mussv(Mfrd,deltaset2);
>> [Norm_data,w]=frdata(Norm);[Ro_data,w]=frdata(ro_c);
>> [SSV_data,w]=frdata(ssv);
>> Norm_bounds=reshape(Norm_data,2,200);
>> Ro_bounds=reshape(Ro_data,2,200);
>> SSV_bounds=reshape(SSV_data,2,200);
>> semilogx(freqs,Ro_bounds(1,:), 'r');hold
>> semilogx(freqs, Norm_bounds(1,:), 'm', freqs, Norm_bounds(2,:), 'b');
>> semilogx(freqs, SSV_bounds(1,:), 'g');
>> semilogx(freqs, SSV_bounds(2,:), 'color', [0.75 0 0.75]);
```

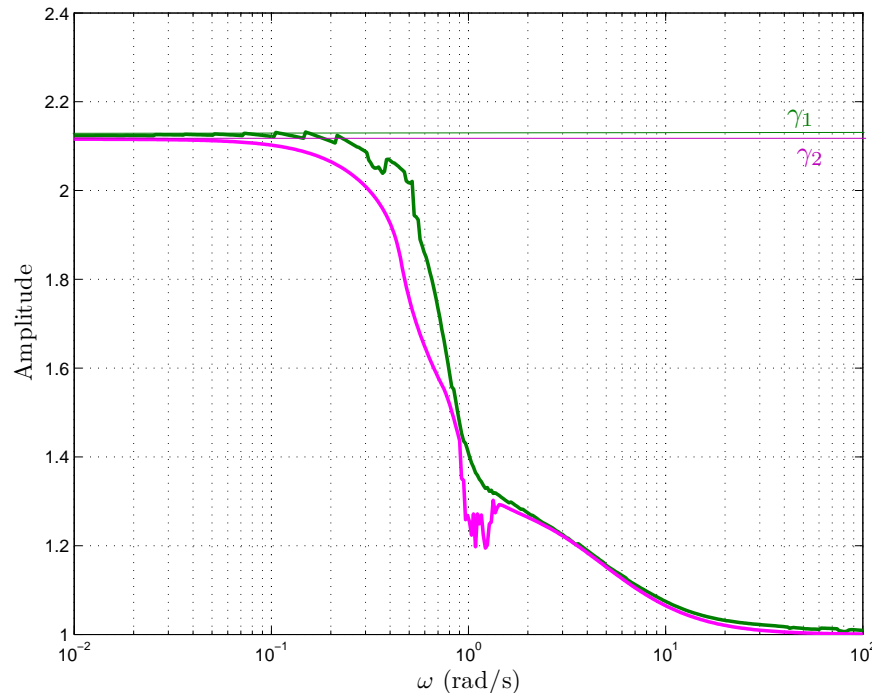


- $\omega_0 = 10$ rad/s
- $\forall \Delta \in \frac{1}{\gamma_2} \mathbf{\Delta}_s, \det(\mathbf{1} - M(j\omega_0)\Delta) \neq 0$
- Pour $\gamma \leq \gamma_2$ alors $\exists \tilde{\Delta} \in \frac{1}{\gamma} \mathbf{\Delta}_s, \det(\mathbf{1} - M(j\omega_0)\tilde{\Delta}) = 0$
- $1/\gamma_1$ est la marge pour un bloc complexe plein 3×3
- $1/\gamma_3$ est la marge pour un bloc complexe répété 3×3



- $\omega_0 = 0.09$ rad/sec
- $\forall \Delta \in \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{\Delta}_s, \det(\mathbf{1} - M(j\omega_0)\Delta) \neq 0$
- $\exists \tilde{\Delta} \in \frac{1}{\gamma_2} \mathbf{\Delta}_s, \det(\mathbf{1} - M(j\omega_0)\tilde{\Delta}) = 0$

```
>> deltaset4=[1 1;1 1;1 1];[ssv2]=mussv(Mfrd,deltaset4,'s');
>> [SSV2_data,w]=frdata(ssv2);SSV2_bounds=reshape(SSV2_data,2,200);
>> semilogx(freqs,Ro_bounds(1,:), 'r',freqs,...
SSV2_bounds(1,:), 'g',freqs,SSV2_bounds(2,:), 'm');
```



- Borne sup $\leq \gamma_1 \quad \forall \omega : (\mathbf{1} - M(j\omega)\Delta(j\omega))^{-1}$ est propre et stable $\forall \Delta \in \frac{1}{\gamma_1} \Delta_s$
- Borne inf $> \gamma_2$ pour certaines pulsations : $\exists \tilde{\Delta} \in \frac{1}{\gamma_2} \Delta_s$ déstabilisant $(\mathbf{1} - M(j\omega)\tilde{\Delta}(j\omega))^{-1}$

```
>> deltaset5=[-1 0;-1 0;1 1];
>> [ssv3]=mussv(Mfrd,deltaset5,'s');
>> [SSV3_data,w]=frdata(ssv3);
>> SSV3_bounds=reshape(SSV3_data,2,200);
>> semilogx(freqs,SSV3_bounds(1,:), 'g',freqs,SSV3_bounds(2,:), 'm');
```