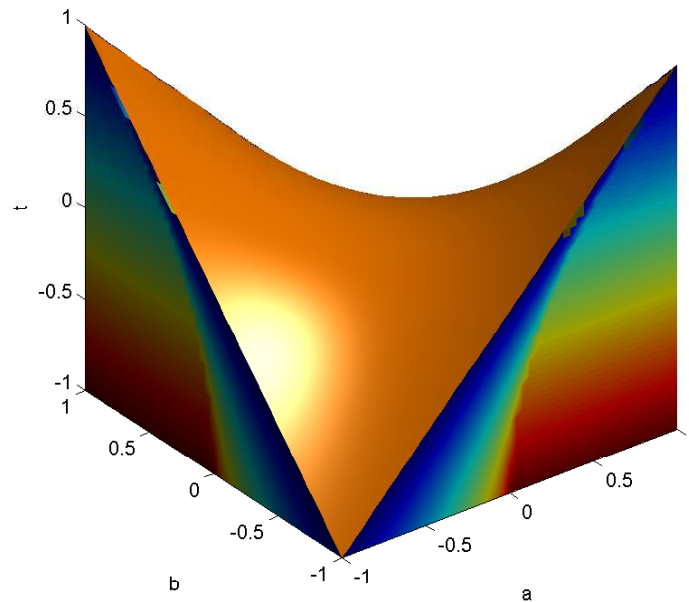


Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires

Cours 6

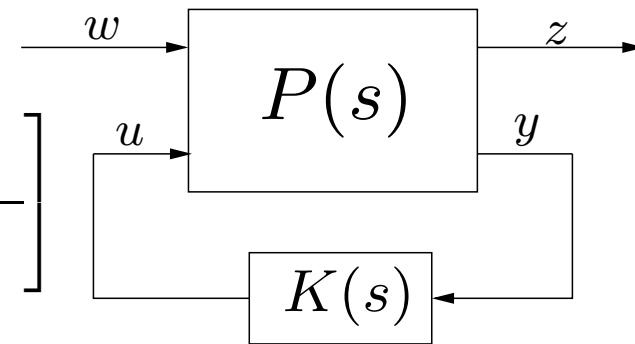
La synthèse optimale standard \mathcal{H}_∞



Modèle généralisé :

$$P(s) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & \mathbf{0} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

$$K(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right]$$



→ **Hypothèses 1 :**

1- (A, B_1) et (A, B_2) stabilisables, (C_1, A) et (C_2, A) détectables

2- $D'_{12}[C_1 \ D_{12}] = [\mathbf{0} \ \mathbf{1}]$ et $[B'_1 \ D'_{21}]'D'_{21} = [\mathbf{0} \ \mathbf{1}]'$

3- P, K sont rationnelles, réelles et propres

4- $\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ sont de rang plein $\forall \omega$

Nota : \mathcal{K} est l'ensemble des **correcteurs admissibles** :

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathbb{C}^{m \times r} \mid T_{zw}(s) \in \mathcal{RH}_\infty\}$$

➔ **Problème 1 : Synthèse optimale et sous-optimale \mathcal{H}_∞**

- 1- $\gamma > 0$ et P étant donnés, déterminer un correcteur K^{sub} tel que $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$
- 2- Déterminer $\gamma_\infty^* = \arg \left[\min_{K \in \mathcal{K}} \|T_{zw}\|_\infty \right]$
- 3- Déterminer le correcteur K minimisant une norme \mathcal{H}_∞ du transfert entre les sorties exogènes z et les entrées exogènes w :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|T_{zw}\|_\infty = \gamma_\infty^*$$

Soient les deux matrices hamiltoniennes et les équations de Riccati associées :

$$H_\infty(\gamma) = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 B_2' \\ -C_1' C_1 & -A \end{bmatrix} \quad J_\infty(\gamma) = \begin{bmatrix} A' & \gamma^{-2} C_1' C_1 - C_2' C_2 \\ -B_1 B_1' & -A \end{bmatrix}$$

$$A' X_\infty + X_\infty A + X_\infty [\gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 B_2'] X_\infty + C_1' C_1 = \mathbf{0} \quad A Y_\infty + Y_\infty A' + Y_\infty [\gamma^{-2} C_1' C_1 - C_2' C_2] Y_\infty + B_1 B_1' = \mathbf{0}$$

□ **Théorème 1 :**

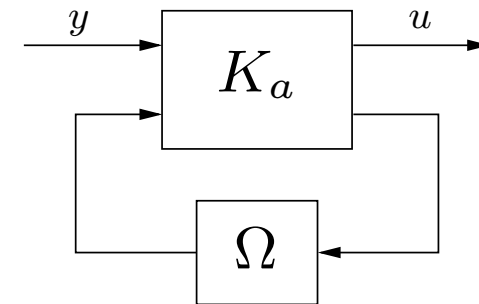
1- $K^{sub}(s)$ stabilise T_{zw} de manière interne et de plus $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ ssi les trois conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

- i- $\Lambda(H_\infty(\gamma)) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$ et $\exists X_\infty = X'_\infty \geq \mathbf{0}$ solution unique de l'équation de Riccati
- ii- $\Lambda(J_\infty(\gamma)) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$ et $\exists Y_\infty = Y'_\infty \geq \mathbf{0}$ solution unique de l'équation de Riccati
- iii- $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

L'ensemble de tous les correcteurs $K(s)^{sub} \mathcal{H}_\infty$ -sous-optimaux sont donnés par :

$$K_{\mathcal{H}_\infty} = \mathcal{L}_l(K_a, \Omega)$$

$$K_a \sim \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{m_2} \\ -C_2 & \mathbf{1}_{p_2} & \mathbf{0} \end{array} \right]$$



où

$$\begin{aligned} \|\Omega\|_\infty < \gamma & \quad \Omega \in \mathcal{RH}_\infty^{m_2 \times p_2} & \hat{A}_\infty &= A + \gamma^{-2} B_1 B'_1 X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ L_\infty &= -Y_\infty C'_2 & F_\infty &= -B'_2 X_\infty & Z_\infty &= \mathbf{1} - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty \end{aligned}$$

□ Théorème 2 : (suite)

2- Pas de formule explicite pour γ_∞^* mais calcul par bisection à la précision voulue

$$\gamma_\infty^* = \inf_{i,ii,iii} \gamma$$

3- Si en γ_∞^* , la condition iii n'est pas vérifiée alors le correcteur optimal est donné sous forme descripteur par

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \gamma_\infty^{*-2} Y_\infty X_\infty) \dot{x}_K &= A_s x_K - L_\infty y \\ u &= F_\infty x_K \end{aligned}$$

$$\text{où } A_s = A + B_2 F_\infty + L_\infty C_2 + \gamma_\infty^{*-2} Y_\infty A' X_\infty + \gamma_\infty^{*-2} B_1 B_1' + \gamma_\infty^{*-2} Y_\infty C_1' C_1$$

Nota : Si $\gamma_2 \geq \gamma_1 > \gamma_\infty^*$ alors

$$\begin{aligned} X_\infty(\gamma_1) &\geq X_\infty(\gamma_2) \\ Y_\infty(\gamma_1) &\geq Y_\infty(\gamma_2) \\ \rho(X_\infty(\gamma_1) Y_\infty(\gamma_1)) &\geq \rho(X_\infty(\gamma_2) Y_\infty(\gamma_2)) \end{aligned}$$

- Résolution de deux équations de Riccati paramétrées par γ
- L'ensemble des correcteurs est paramétré par la matrice de transfert $\Omega(s)$ à travers la \mathcal{LFT} $\mathcal{L}_l(\Omega, K_a)$:
- Le correcteur tel que $\Omega = 0$ est appelé **correcteur central** défini par :

$$K_c \sim \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

- Structure du correcteur central : $(\sim \mathcal{H}_2, \gamma \rightarrow \infty)$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_2u + Z_\infty L_\infty (C_2\hat{x} - y)$$

$$u = F_\infty \hat{x}$$

$$\hat{w} = \gamma^{-2} B_1' X_\infty \hat{x}$$

- Difficultés numériques pour γ_∞^* et $\gamma \rightarrow \gamma_\infty^*$ (γ -itération)
- Structure identique au problème de synthèse H_2 avec principe de séparation (FI+OE)

Réalisation minimale d'état du modèle généralisé :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{22} = 0$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{12} = 1 \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Modèle généralisé :

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{s-1} & 1 & \frac{3}{s^2-1} \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 1;0 -1];B1=[1 0;0 0];B2=[0;3];C1=[0 0];C2=[1 0];D11=[0 0];D12=1;
>> D21=[0 1];D22=0;
>> P=ss(A,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);
```

Synthèse \mathcal{H}_∞ :

```
>> [k,N,g] =hinfsyn(P,1,1,'GMIN',1.6,'GMAX',1.7,'TOLGAM',0.001,'METHOD',...
'ric','DISPLAY','on')
```

```
Test bounds:      1.6000 < gamma <=      1.7850
```

gamma	hamx_eig	xinf_eig	hamy_eig	yinf_eig	nrho_xy	p/f
1.785	1.0e+000	1.1e-016	1.0e+000	0.0e+000	0.7827	p
1.692	1.0e+000	0.0e+000	1.0e+000	0.0e+000	0.8867	p
1.646	1.0e+000	0.0e+000	1.0e+000	0.0e+000	0.9472	p
1.623	1.0e+000	1.1e-016	1.0e+000	0.0e+000	0.9799	p
1.612	1.0e+000	0.0e+000	1.0e+000	0.0e+000	0.9969	p
1.606	1.0e+000	0.0e+000	1.0e+000	0.0e+000	1.0056#	f
1.609	1.0e+000	0.0e+000	1.0e+000	0.0e+000	1.0012#	f
1.610	1.0e+000	1.1e-016	1.0e+000	0.0e+000	0.9990	p
1.609	1.0e+000	0.0e+000	1.0e+000	0.0e+000	1.0001#	f

Gamma value achieved: 1.6101

Calcul du compensateur central :

```
>> gamma=1.7;
>> Hinf=[A (gamma^(-2)*B1*B1')-(B2*B2');-C1'*C1 -A'];
>> [x1,x2,flag]=ric_schr(Hinf);
>> Xinf=x2/x1;
>> Jinf=[A' (gamma^(-2)*C1'*C1-C2'*C2);-B1*B1' -A];
>> [x1,x2,flag]=ric_schr(Jinf);
>> Yinf=x2/x1;
>> Finf=-B2'*Xinf;
>> Linf=-Yinf*C2';
>> Zinf=(eye(2)-gamma^(-2)*Yinf*Xinf)^(-1);
>> Ainf=A + gamma^(-2)*B1*B1'*Xinf + B2*Finf + Zinf*Linf*C2;
>> Kc=ss(Ainf,-Zinf*Linf,Finf,zeros);
```

Réalisation minimale d'état :

$$K_c = K_{1.7} \sim \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 18.34 & 1.18 & 19.7074 \\ -4.73 & -3.36 & 0 \\ \hline -1.58 & -0.79 & 0 \end{array} \right]$$

>> `[num,den]=ss2tf(Ainf,-Zinf*Linf,Finf,0);`

Fonction de transfert :

$$K_c = K_{1.7}(s) = -31.05 \frac{s + 1}{s^2 + 21.7s + 67.29}$$

$$\|T_{zw}\|_\infty = 1.698$$

Pôles en boucle fermée :

$$\Lambda = \{-1, -1, -1.41, -18.29\}$$

Pour $\gamma \rightarrow \gamma^*$

$$\gamma = 1.65 \quad \rightarrow \quad K_c(s) = -\frac{s+1}{0.015s^2 + 0.66s + 2.14}$$

$$\gamma = 1.61 \quad \rightarrow \quad K_c(s) = -\frac{s+1}{0.0004s^2 + 0.62s + 2.12}$$

$$\gamma = 1.60949 \quad \rightarrow \quad K_c(s) = -\frac{s+1}{3 \times 10^{-7}s^2 + 0.62s + 2.14}$$

$$K_{opt}(s) = -\frac{s+1}{0.62s + 2.12}$$

Nota :

Le compensateur central subit une réduction d'ordre à l'optimum γ_∞^*

Pour $\gamma \rightarrow \infty$

$$\gamma = 2.9 \quad \rightarrow \quad K_c(s) = -\frac{-4.651s - 4.651}{s^2 + 5.304s + 11.28}$$

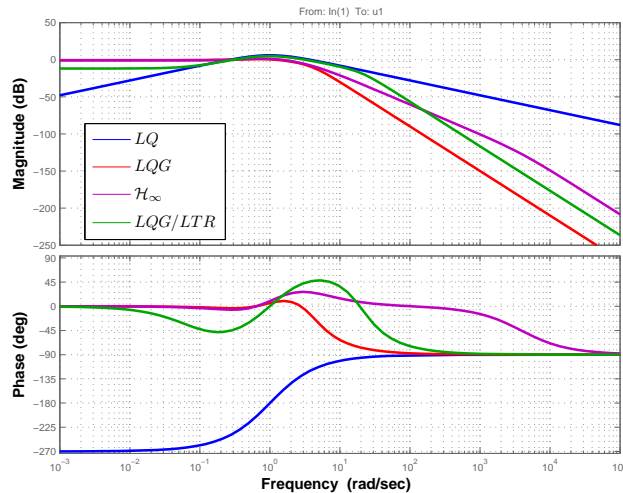
$$\gamma = 10 \quad \rightarrow \quad K_c(s) = -\frac{-3.305s - 3.305}{s^2 + 4.467s + 8.424}$$

$$\gamma = 100 \quad \rightarrow \quad K_c(s) = -\frac{-3.225s - 3.225}{s^2 + 4.415s + 8.244}$$

$$K_{\gamma=\infty}(s) = K_{\mathcal{H}_2}^* = -\frac{-3.219s - 3.219}{s^2 + 4.414s + 8.243}$$

Nota :

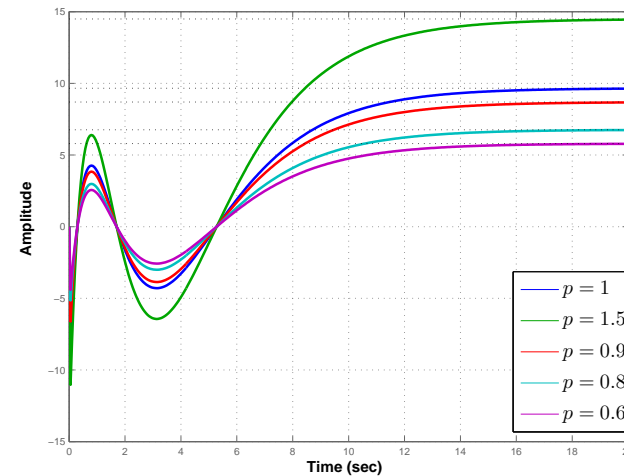
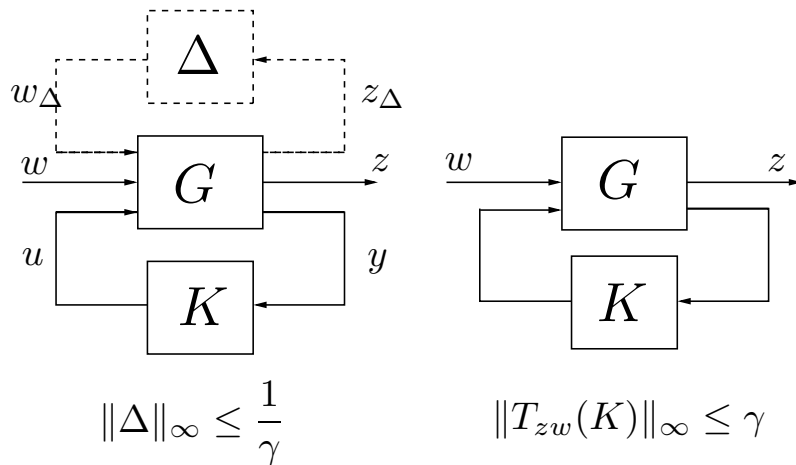
Le compensateur central tend vers le compensateur \mathcal{H}_2 optimal quand $\gamma \rightarrow \infty$



$$K_{lqg}(s) = 32 \frac{(s - 0.5)}{(s^2 + 6s + 17)}$$

$$K_{lqg/ltr}(s) = 525.7 \frac{(s - 0.12)}{(s^2 + 18.21s + 164.9)}$$

$$K_{\infty}(s) = 37490 \frac{s - 0.41}{(s + 4.42)(s + 3880)}$$



– Suivi de référence et réjection de perturbations :

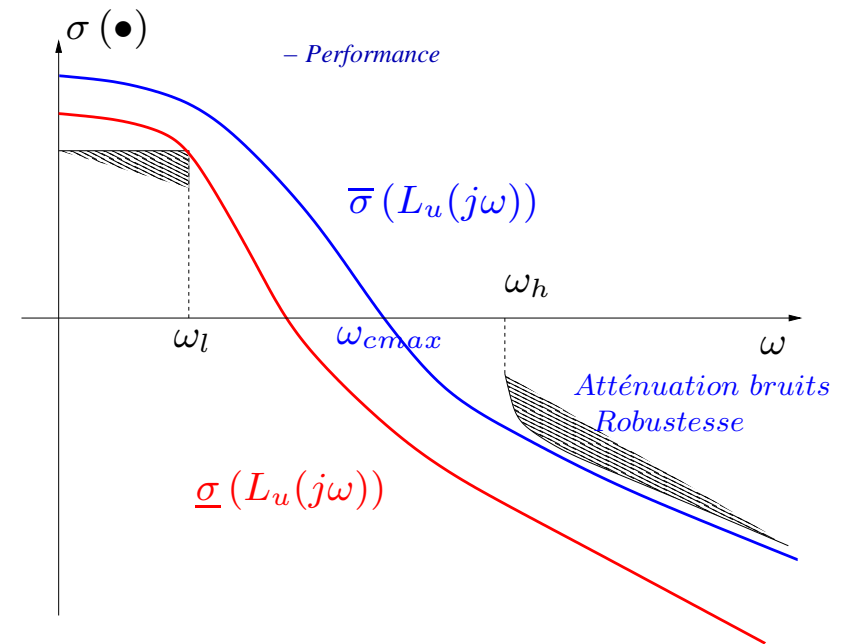
$$\underline{\sigma}(L_y) \text{ grand } 0 \leq \omega \leq \omega_B$$

– Réduction d'énergie de commande :

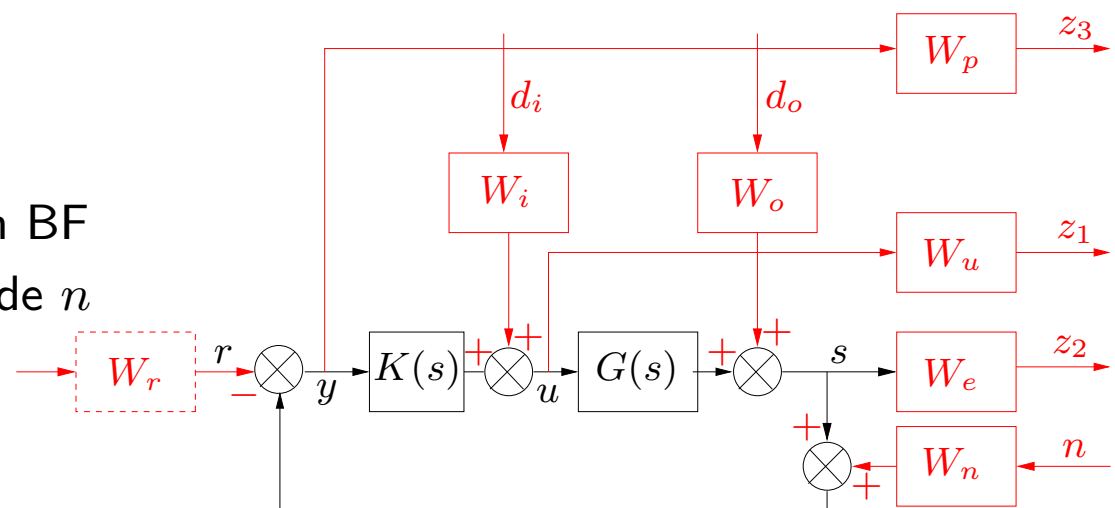
$$\overline{\sigma}(K) \text{ faible } 0 \leq \omega_B \leq \omega$$

– Filtrage des bruits de mesure :

$$\overline{\sigma}(L_y) \text{ faible } 0 \leq \omega_B \leq \omega$$

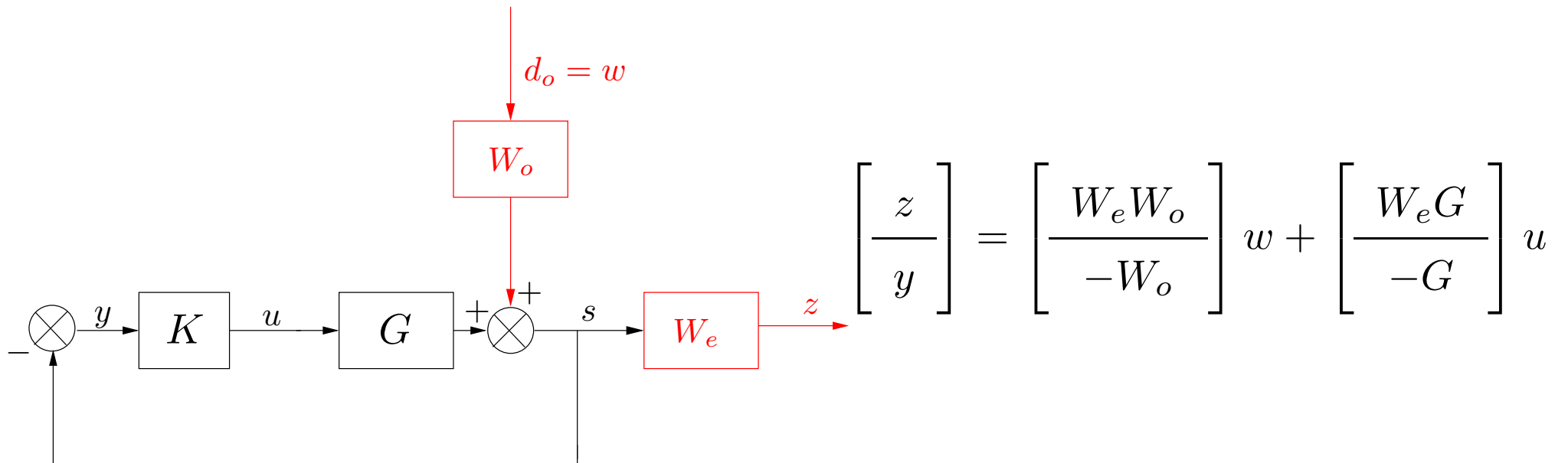


- W_u : restriction sur u
- W_e, W_p : spécif. sur des transferts en BF
- W_i, W_o, W_n : contenu fréq. de d et de n
- W_r : modelage de la consigne



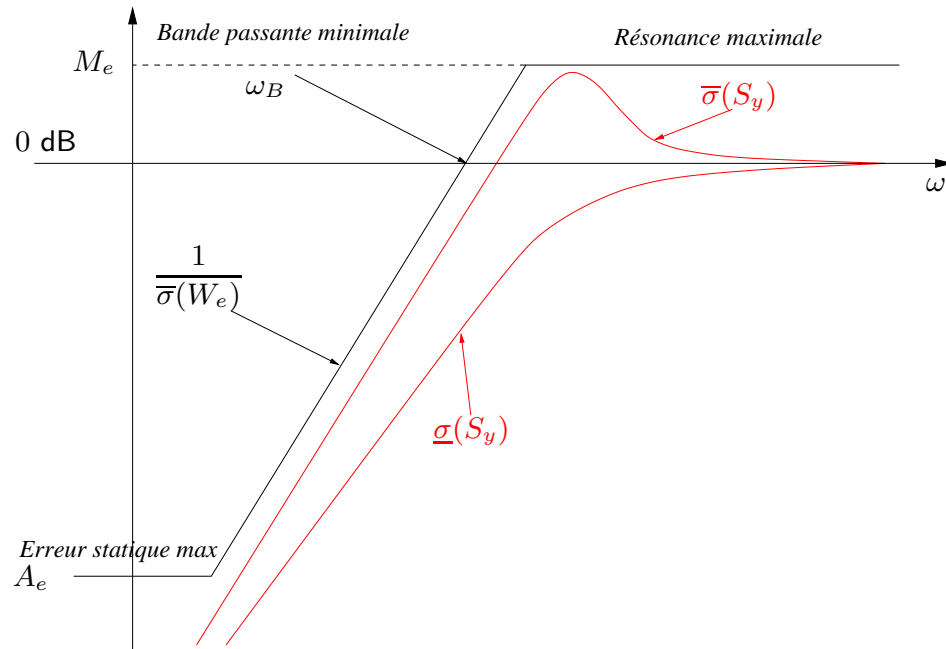
1- Robustesse vis-à-vis des incertitudes :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|W_e S_y W_o\|_\infty$$



Modèle généralisé :

$$\begin{aligned} P_{11} &= W_e W_o & P_{12} &= W_e G \\ P_{21} &= -W_o & P_{22} &= -G \end{aligned}$$



$W_e = \text{diag}(w_{ei})$ et

$$w_{ei} = \frac{s/M_{ei} + \omega_{Bi}}{s + \omega_{Bi}A_{ei}}$$

avec

- $A_{ei} \ll 1$ pour une action intégrale
- $M_{ei} \simeq 2$
- ω_{Bi} la bande passante en BF

Nota :

- pour les systèmes MIMO, on définit une région de bande passante

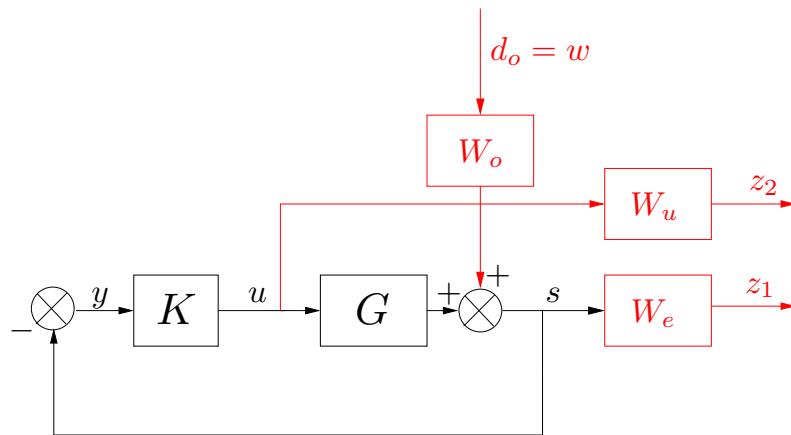
$$\omega_{\underline{\sigma}(S)=0.7} \leq \omega_B \leq \omega_{\overline{\sigma}(S)=0.7}$$

- Pour une transition plus raide entre BF et HF

$$w_{ei} = \left(\frac{s / \sqrt[k]{M_{ei}} + \omega_{Bi}}{s + \omega_{Bi} \sqrt[k]{A_{ei}}} \right)^k$$

2- Robustesse vis-à-vis des incertitudes + restrictions sur u :

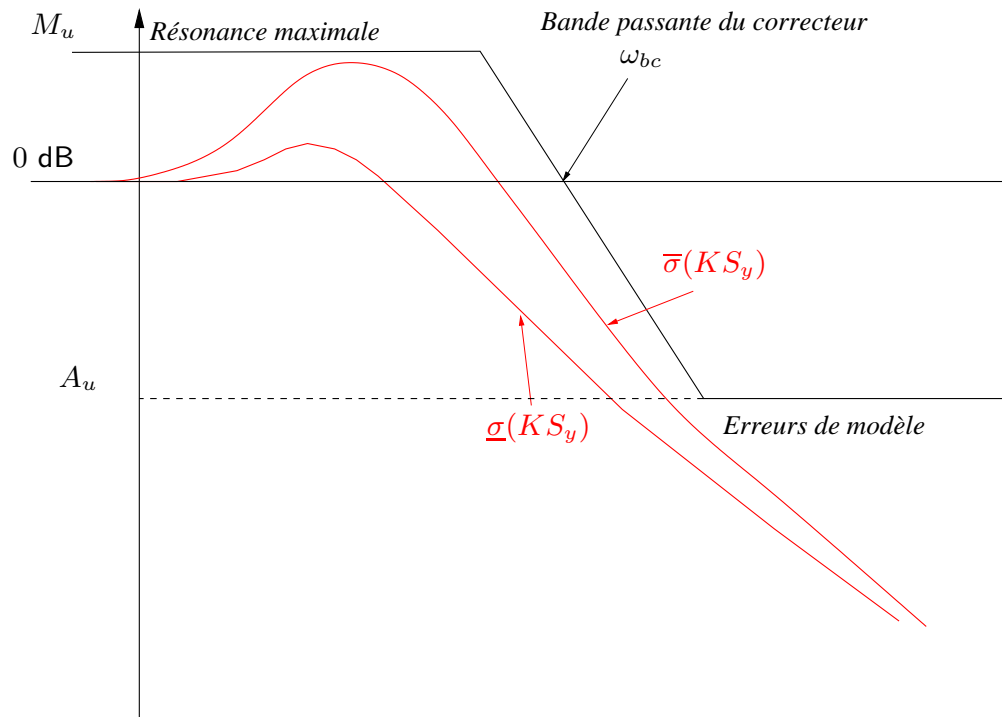
$$\min_{K \in \mathcal{K}} \left\| \begin{array}{c} W_e S_y W_o \\ \rho W_u K S_y W_o \end{array} \right\|_\infty$$



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e W_o \\ \mathbf{0} \\ -W_o \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} W_e G \\ W_u \\ -G \end{bmatrix} u$$

Modèle généralisé :

$$\begin{array}{l} P_{11} = \begin{bmatrix} W_e W_o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} W_e G \\ W_u \end{bmatrix} \\ P_{21} = -W_o \quad P_{22} = -G \end{array}$$



$W_u = \text{diag}(w_{u_i})$ et

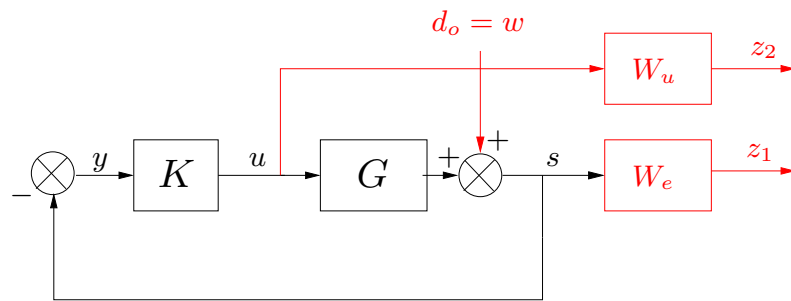
$$w_{u_i} = \frac{s + \omega_{bc}/M_{ui}}{A_{ui}s + \omega_{bc}}$$

avec

- $A_{ui} > 0$ et faible afin d'ajouter un pôle rapide
- M_{ui} : gain maximal de KS_y
- ω_{bc} la bande passante du correcteur

Nota : pour un effet de roll-off plus important

$$w_{u_i} = \left(\frac{s + \omega_{bc}/\sqrt[k]{M_{ui}}}{\sqrt[k]{A_{ui}}s + \omega_{bc}} \right)^k$$



Problème de sensibilité mixte

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \left\| \begin{array}{c} W_e S_y \\ W_u K S_y \end{array} \right\|_{\infty}$$

□ **Théorème 3 :**

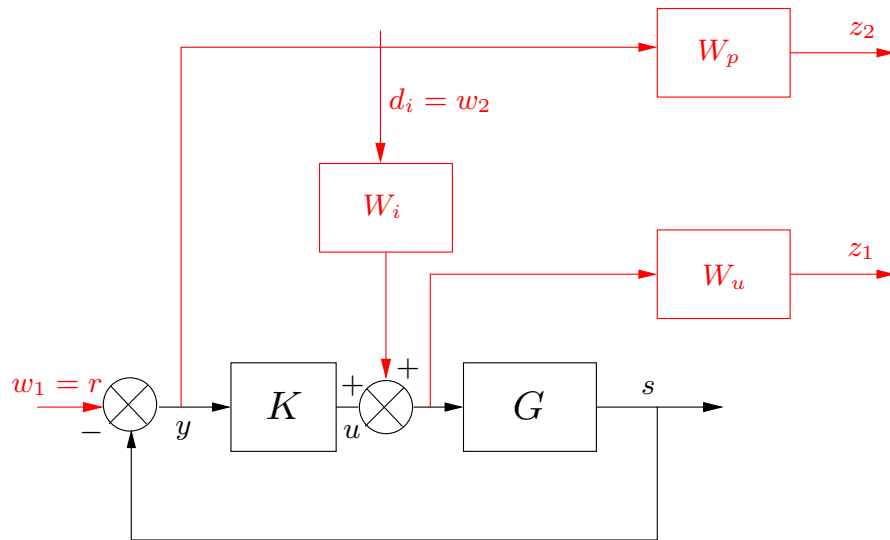
Sous les hypothèses :

- W_u, W_e, W_u^{-1} et W_e^{-1} sont stables
- $G(s)$ n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire
- W_u et W_e n'ont pas de zéros sur l'axe imaginaire
- $W_u(\infty)$ et $W_e(\infty)$ sont carrées et inversibles

alors la solution du problème de sensibilité mixte a les propriétés suivantes :

- Tout **pôle stable** de $G(s)$ est un **zéro de transmission** de K
- Si p_0 est un **pôle instable** de $G(s)$ alors $-p_0^*$ est un **pôle** de S_y
- Tout **pôle** de $W_e(s)$ est un **pôle** de $K(s)$ et tout **pôle** de $W_u(s)$ est un **zéro de transmission** de K

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{array}{cc} W_u K S_y & W_u S_u W_i \\ W_p S_y & -W_p G S_u \end{array} \right\|_\infty$$



$$z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W_u W_i \\ W_p & -W_p G W_i \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} W_u \\ -W_p G \end{bmatrix} u$$

$$y = r - G W_i - G u$$

Modèle généralisé :

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & W_u W_i & W_u \\ W_p & -W_p G W_i & -W_p G \\ \hline \mathbf{1} & -G W_i & -G \end{array} \right]$$

- Généralisation au cas multivariable des concepts SISO (BP, précision...)
- Prise en compte du concept de robustesse en stabilité / incertitudes en H.F.
- Comportement du système bouclé / perturbations en sortie et en entrée
- Pb. de compensation zéros de K / pôles stables de G pour les structures flexibles
- Restrictions sur les performance (pôles et/ou zéros instables dans G ou L)

Intégrale de sensibilité de Bode et waterbed effects

$$\int_0^\infty \ln |\det S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i)$$

Contraintes sur les valeurs crêtes en sensibilité et sur la Bande Passante

$$\|W_e S\|_\infty \geq |W_e(z)| \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|z + p_i|}{|z - p_i|} \quad \omega_{co} < \frac{z}{2}$$

Contraintes algébriques d'interpolation

$$T(p) = 1 \quad S(p) = 0 \quad T(z) = 0 \quad S(z) = 1$$