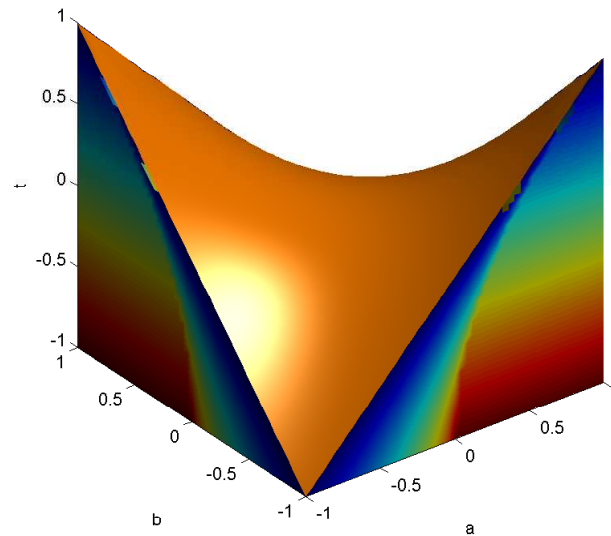


**Analyse et synthèse robustes
des systèmes linéaires
Cours 1
Introduction et rappels**



Enseignants Denis Arzelier : directeur de recherche au LAAS-CNRS et Frédéric Gouaisbaut
Maître de Conférences à l'UPS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 et 05 61 33 63 07 - emails : arzelier@laas.fr, fgouaisb@laas.fr

Web-pages <http://homepages.laas.fr/arzelier/> et <http://homepages.laas.fr/fgouaisb/>

Organisation du cours

❶ 6 **cours** 1h15 : 7h30 + 2 **bureaux d'études** 2h30 : 5h

❷ 4 **cours** 1h15 : 5h + 1 **bureau d'études** 2h30 : 2h30

⇒ Cours magistral avec support de cours sur planches

⇒ Exercices avec support MATLAB

Enseignant Christelle Pittet : Ingénieur CNES

Organisation du cours

❷ 3 **cours** 1h15 : 3h45 + 2 **bureaux d'études** 2h30 : 2h30

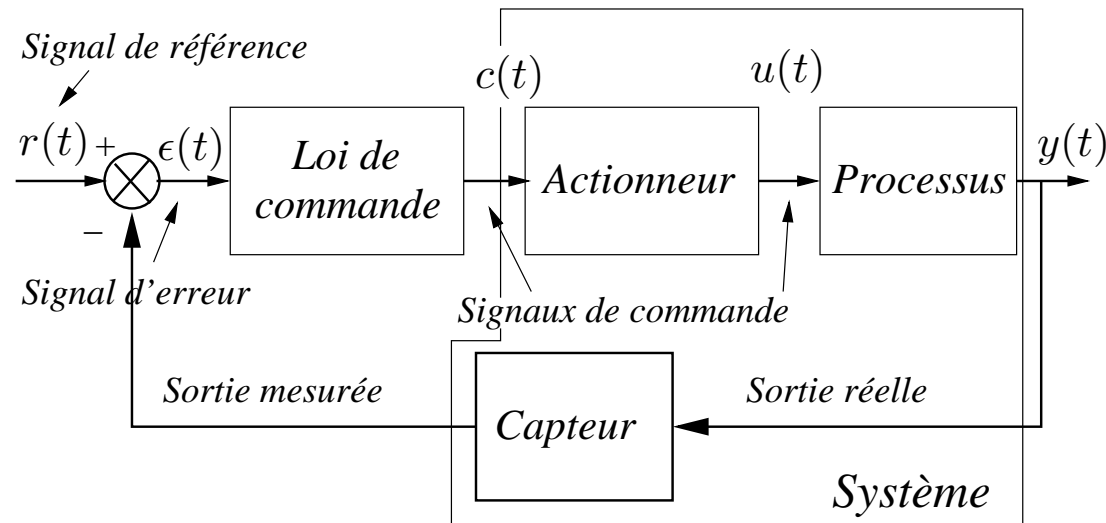
⇒ Cours magistral avec support de cours sur planches

⇒ Bureaux d'études sur une application spatiale avec support MATLAB

❸ 1 **Examen** 2h30 (Tous documents autorisés)

Durée totale : 31h15

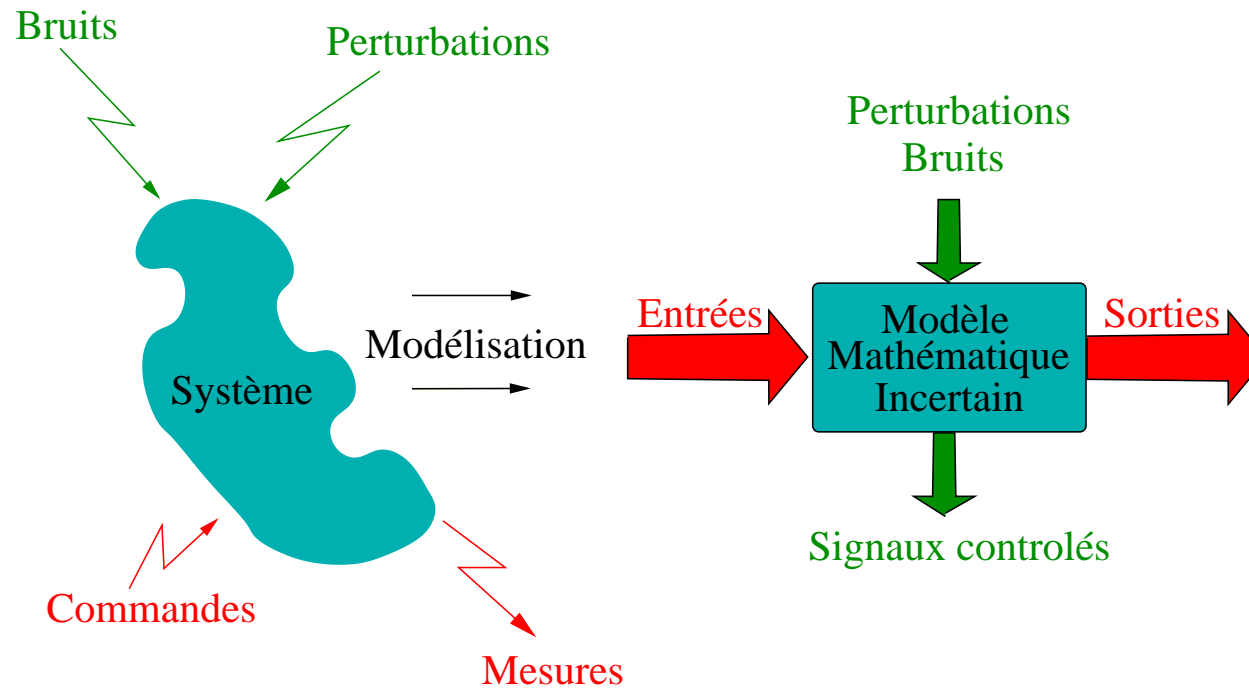
Exposer une théorie moderne des systèmes de commande avec **contre-réaction** prenant **explicitement** et *a priori* en compte la notion de **robustesse**



▼ Définition 1 : *système de commande robuste*

Un système de commande est dit **robuste** s'il conserve *ses propriétés* malgré *les incertitudes* et *les perturbations* affectant le système à commander

Méthodes d'analyse et synthèse : les propriétés, les perturbations et les incertitudes ?



Modélisation : expression des lois physiques et des connaissances expérimentales

Modèle mathématique incertain : ensemble des lois mathématiques régissant la causalité entrées-sorties + une représentation mathématique de l'incertitude

- 1 - **Systeme physique réel**
- 2 - **Modèle physique idéal**
 - Aggrégat de systèmes élémentaires
(Décomposition en blocs idéaux)
- 3 - **Modèle mathématique idéal**
 - Modèle de connaissance
(application des lois de la physique)
- 4 - **Modèle mathématique réduit**
 - Modèle de comportement
(linéarisation...)
- 5 - **Modèle incertain**
 - Modèle mathématique réduit **LTI** + modèle d'incertitude
(famille de modèles + structure \pm fine)
- 6 - **Formulation et problème standards**

1- Système physique réel :

Lanceur constitué de deux étages reliés par une liaison visco-élastique et soumis à des perturbations dues au vent et à la poussée du moteur

2- Modèle physique idéal :

Deux masses M_1 et M_2 couplées par un amortisseur et un ressort et soumises à des forces

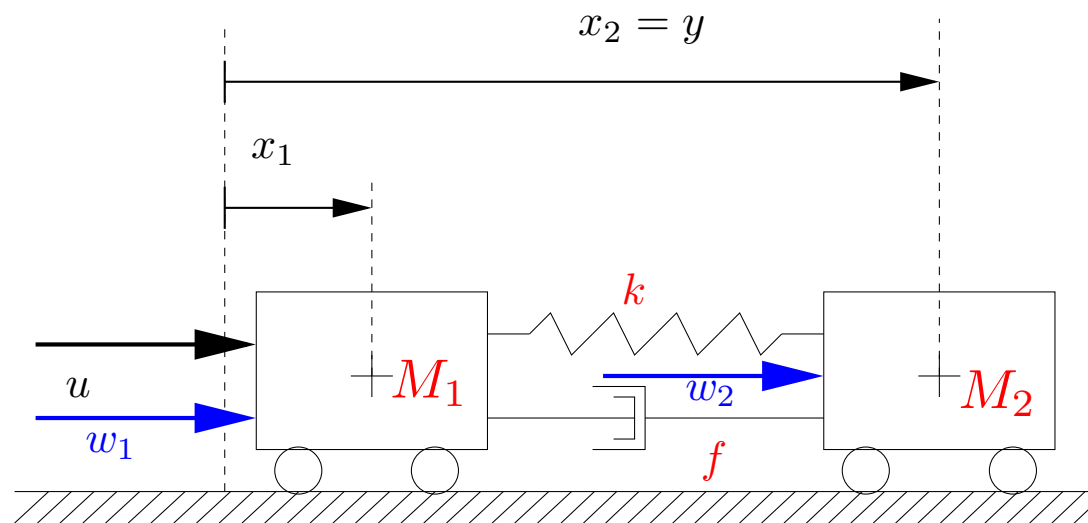


FIGURE 1 – Structure flexible

3- Modèle mathématique idéal :

Modèle variant dans le temps et non linéaire

$$M_1(t)\ddot{x}_1 + f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = u + w_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 + f(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = w_2$$

où $M_1(t)$: fonction du temps et f et k fonctions non linéaires

4- Modèle mathématique réduit :

Vecteur d'état : $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}'$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/M_1 & k/M_1 & -f/M_1 & f/M_1 \\ k/M_2 & -k/M_2 & f/M_2 & -f/M_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/M_1 & 0 \\ 0 & 1/M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

5- Modèle incertain :

- Incertitude paramétrique :

Les masses :

$$\underline{M}_i \leq M_i \leq \overline{M}_i$$

La raideur du ressort :

$$\underline{k} \leq k \leq \overline{k}$$

Le coefficient d'amortissement :

$$\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$$

- Perturbations exogènes :

Les signaux exogènes w_1 et w_2 sont des signaux d'énergie finie ($\in \mathcal{L}_2$)

- Modèle externe 1 : **matrice de transfert**

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$$

- Modèle externe 2 : **matrice de réponse impulsionnelle**

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

$$y(t) = (g * u)(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

- Modèle interne : **représentation d'état**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$C \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{r \times m}$$

▼ Définition 2 :

- Le système est **propre** si $G(\infty) = D = \text{cste}$. Il sera dit **strictement propre** si $G(\infty) = D = \mathbf{0}$
- Si $r = m = 1$, le système est **monovarié** (SISO) sinon il sera **multivarié** (MIMO)

$$G(s) = D + C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B$$

▼ Définition 3 : réalisation minimale

A toute matrice de transfert $G(s)$, une réalisation d'état (A, B, C, D) est associée.

- La réalisation est **minimale**
- A a la plus petite dimension possible
- (A, B) est **commandable** et (A, C) est **observable**

Nota :

- (A, B) est **commandable** ssi $\text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$
- (A, C) est **observable** ssi $\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} C' & (CA) & \dots & (CA^{n-1})' \end{bmatrix}\right) = n$

Notation : réalisation et réalisation minimale

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

▼ Définition 4 : pôles et zéros des modèles LTI

- Les pôles de la réalisation de $G(s)$ sont les valeurs propres de A .
- $z_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro invariant de la réalisation de $G(s)$ ssi
 - $\exists 0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ et $w \in \mathbb{C}^m$ t.q.

$$M(z_0) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \mathbf{1} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

Si $w = 0$, alors z_0 est un mode inobservable de la réalisation

- $\exists 0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ et $\xi \in \mathbb{C}^r$ t.q. $\begin{bmatrix} v^H & \xi^H \end{bmatrix} M(z_0) = 0$. Si $\xi = 0$, alors z_0 est un mode non commandable de la réalisation
- $z_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro de transmission de $G(s)$ ssi $\text{rg}(G(z_0)) < \text{nrg}(G(s))$

Nota : $\mathcal{Z}_T \subseteq \mathcal{Z}_I$ et $\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z}_I$ ssi $G(s) \simeq \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Si $m = r=1$ ($G(s) = \frac{\pi_z(s)}{\pi_p(s)}$) ou si $m = r$ ($\det(G(s)) = \frac{\pi_z(s)}{\pi_p(s)}$)

- les pôles de $G(s)$ sont les racines du polynôme caractéristique $\pi_p(s)$
- les zéros de transmission de $G(s)$ sont les racines de $\pi_z(s)$

Soit $G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$, deux notions de stabilité peuvent être définies :

- **Stabilité BIBO :**

▼ **Définition 5 :**

Le système de réponse impulsionnelle $g(t)$ est BIBO-stable ssi

- $\exists k \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq k < \infty$$

ssi

- *Tous les pôles p_i de la forme irréductible de $G(s)$ sont tels que $Re(p_i) < 0, \forall i$*

- **Stabilité interne :**

▼ **Définition 6 :**

Le modèle LTI est stable de façon interne ssi

- *A est stable asymptotiquement*

ssi

- *Les valeurs propres de A sont telles que $Re(\lambda_i(A)) < 0$*

Nota :

- La stabilité interne \Rightarrow la stabilité BIBO

Exemple :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

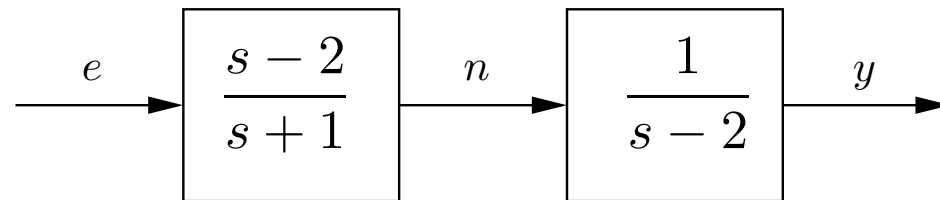
$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s - 1}{s + 2}$$

- La stabilité interne \Leftrightarrow la stabilité BIBO si

$$G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Exemple :



- Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1}{s-2} \frac{s-2}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$

- Représentation d'état : $x_1 = y$, $x_2 = n - e$, $u = e$

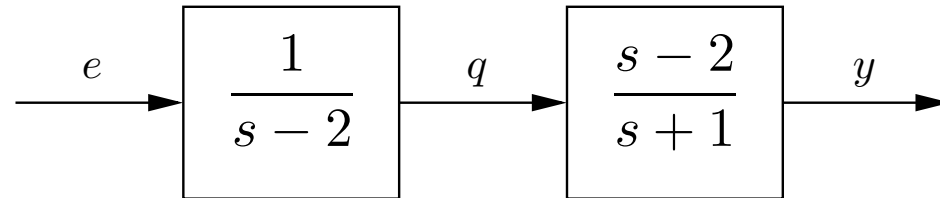
$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - 3u$$

$$y = x_1$$

Le pôle 2 est **instable** et **non commandable**

Exemple : (suite)



- Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{s-2}{s+1} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s+1}$$

- Représentation d'état : $x_1 = q$, $x_2 = y - q$, $u = e$

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - x_2$$

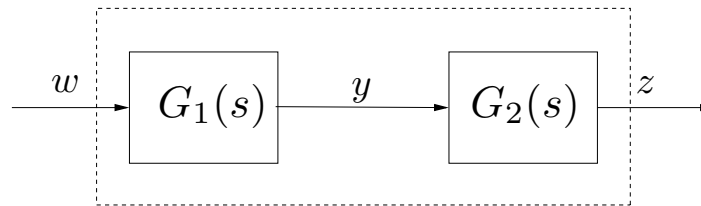
$$y = x_1 + x_2$$

Le pôle 2 est **instable** et **non observable**

Un mode est observable et/ou commandable pour une réalisation d'état donnée

♠ La multiplication des matrices n'est pas commutative $GK \neq KG$

- Règle 1 : cascade $z(s) = G(s)w(s) = G_2(s)G_1(s)w(s)$



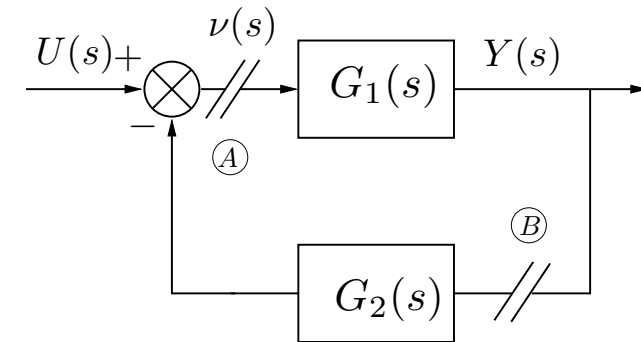
- Règle 2 : bouclage

$$\text{Point A : } Y(s) = G_1(s) \underbrace{(\mathbf{1} + G_2 G_1(s))}^{-1} U(s)$$

$L_y(s)$

$$\text{Point B : } Y(s) = \underbrace{(\mathbf{1} + G_1 G_2(s))}^{-1} G_1(s) U(s)$$

$L_u(s)$



- Règle 3 : push and pull $(\mathbf{1} + L_u(s))^{-1} G_1(s) = G_1(s) (\mathbf{1} + L_y(s))^{-1}$

Soient les réalisations $G_1 \sim \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right]$ $G_2 \sim \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]$

- Somme :

$$G_1 + G_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & \mathbf{0} & B_1 \\ \mathbf{0} & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

- Produit :

$$G_1.G_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ \mathbf{0} & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & \mathbf{0} & B_2 \\ B_1C_2 & A_1 & B_1D_2 \\ \hline D_1C_2 & C_1 & D_1D_2 \end{array} \right]$$

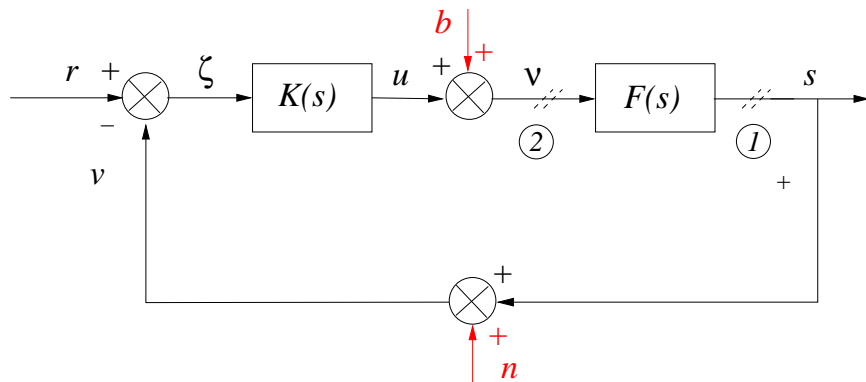
- Inverse :

$$G_1^{-1} \sim \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & B_1 D_1^{-1} \\ \hline -D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array} \right]$$

- Dérivation :

$$sG_1 \sim \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 A_1 & C_1 B_1 + sD_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_1 B_1 \\ \hline C_1 & C_1 B_1 + sD_1 \end{array} \right]$$

Les fonctions de sensibilité en sortie :



$$s = (\mathbf{1} + FK)^{-1}Fb + (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK(r - n)$$

$$\zeta = (\mathbf{1} + FK)^{-1}(r - n) - (\mathbf{1} + FK)^{-1}Fb$$

$$u = K(\mathbf{1} + FK)^{-1}(r - n) - K(\mathbf{1} + FK)^{-1}Fb$$

- $S_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}$ sensibilité en sortie
- $T_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK$ sensibilité complémentaire en sortie
- KS_y et S_yF

$$S_y + T_y = \mathbf{1}$$

De même,

$$v = (\mathbf{1} + KF)^{-1}b + (\mathbf{1} + KF)^{-1}K(r - n)$$

$$u = -(\mathbf{1} + KF)^{-1}KFb + (\mathbf{1} + KF)^{-1}K(r - n)$$

$$s = F(\mathbf{1} + KF)^{-1}b + F(\mathbf{1} + KF)^{-1}K(r - n)$$

Fonctions de sensibilité en entrée :

- $S_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}$ sensibilité en entrée
- $T_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}KF$ sensibilité complémentaire en entrée
- $S_uK = KS_y$ et $FS_u = S_yF$

$$S_u + T_u = \mathbf{1}$$

$$S_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1} \quad S_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}$$

$$T_y = (\mathbf{1} + FK)^{-1}FK \quad T_u = (\mathbf{1} + KF)^{-1}KF$$

$$S_y F = F S_u \quad K S_y = S_u K$$

Nota : pour un système monovariante, quatre fonctions de sensibilité :

$$S = S_u = S_y = \frac{1}{1 + FK} \quad \left| \quad FS \quad \right| \quad T = T_u = T_y = \frac{FK}{1 + FK} \quad \left| \quad KS \right.$$

avec :

$$S + T = \mathbf{1}$$

```
>> G=tf([-6 3],[50 15 1]);
>> K=tf([15 1],[13 0]);
>> L=G*K;
>> Lmin=minreal(L);
>> S=inv(1+L);
>> Smin=minreal(S);
>> T=1-S;
>> Tmin=minreal(T);
>> bode(Lmin,Smin,Tmin)
>> grid
>> KS=K*S;
>> KSmin=minreal(KS);
>> GS=G*S;
>> GSmin=minreal(GS);
>> bode(KSmin,GSmin);
>> grid
```

