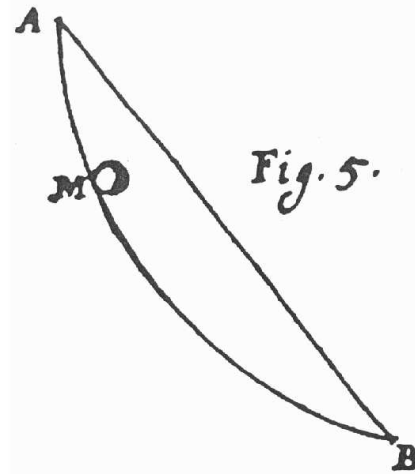


Commande optimale des systèmes dynamiques

Cours 2

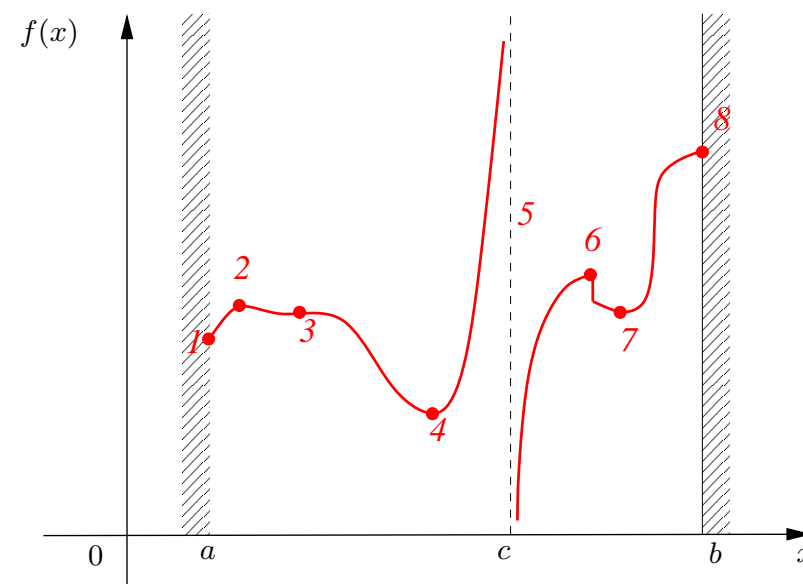
Rappels de PNL

Application à la commande optimale en temps discret



$$\min_{x \in D} f(x)$$

- (1) minimum local, (7) minimum local sur (c, b)
- (4) minimum local et global sur (a, c) et
- (3) point selle
- (2) maximum local
- (5) et (6) optima non analytiques
- (8) maximum local et global sur $[c, b]$



▼ **Définition 1** $x^* \in D \subset \mathbb{R}^n$ est un minimum local (*global*) de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \cap D$ ($\forall x \in D$) alors :

$$f(x^*) \leq f(x)$$

□ **Théorème 1** conditions nécessaires d'optimalité locale

CN1 Premier ordre : si $x^* \in D$ est un minimum de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\nabla f(x^*) = 0$

CN2 Deuxième ordre : si $x^* \in D$ est un minimum de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$$

▼ Définition 2 *point stationnaire*

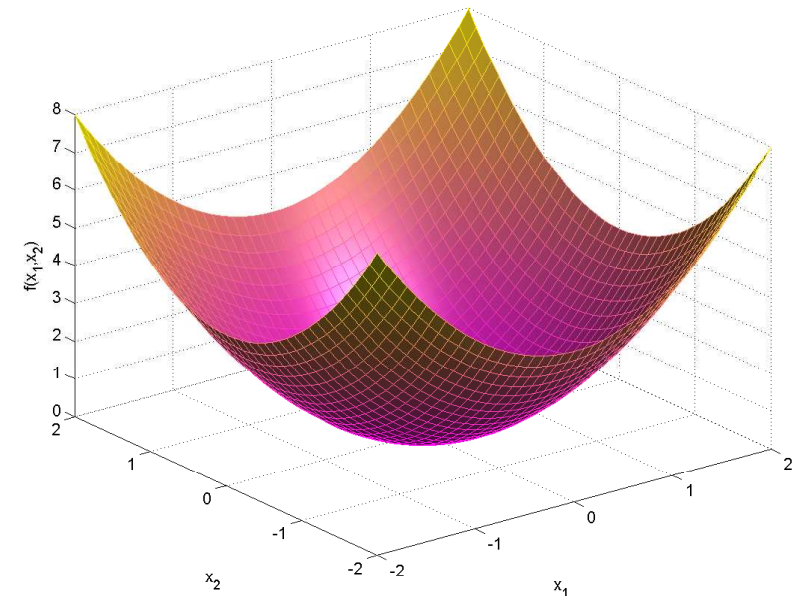
Tout point $x^*(t)$ qui vérifie la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre (CN1) est **un point stationnaire** de la fonction f .

□ Théorème 2 *conditions suffisantes d'optimalité locale*

CS Deuxième ordre : si $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$ alors $x^* \in D$ est un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

✍ Exemple 1

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
- $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est un mini. global sur \mathbb{R}^2
- $\nabla f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$
- $\nabla^2 f(x) = 2 \times \mathbf{1}_2$
- $(0, 0)$ est un minimum global de f



(PNL)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{sous} \quad & h(x) = \mathbf{0} \\ & g(x) \preceq 0 \end{aligned}$$

- Fonction coût (critère) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- Contraintes égalités $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
- Contraintes inégalités $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$

▼ Définition 3

- $x \in \mathbb{R}^n$ est *(strictement) réalisable* de (PNL) si $h(x) = \mathbf{0}$ et $g(x) \preceq 0$ ($\prec 0$)
- $x \in \mathbb{R}^n$ réalisable est *régulier* si

$$\text{rg}(H) = \text{rg} \left(\left[\nabla h_1(x), \quad \dots, \quad \nabla h_m(x) \right] \right) = m$$

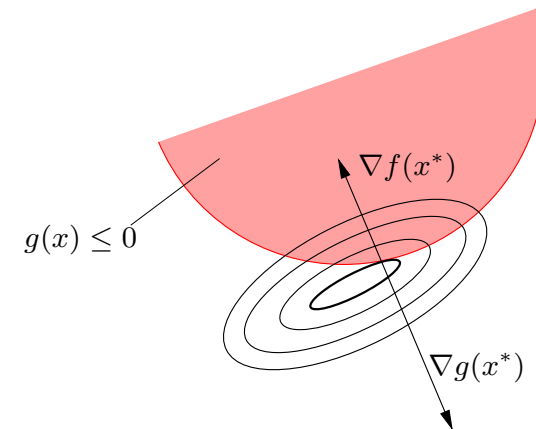
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$ réalisable $A(x) = \{j \mid g_j(x) = 0\}$ est l'ensemble des *contraintes actives (saturées)*. Si $j \notin A(x)$, la contrainte associée à g_j est *inactive*
- $x^* \in \mathbb{R}^n$ réalisable est un *minimum local* de (PNL) si $\exists \epsilon > 0$ tel que pour tout point réalisable x

$$\|x - x^*\| < \epsilon \Rightarrow f(x^*) \leq f(x)$$

□ **Théorème 3** *condition nécessaire au premier ordre d'optimalité locale*
(Karush-Kuhn-Tucker)

CN1 Si x^* est un minimum local régulier de (PNL) alors il existe deux vecteurs de *multiplieurs de Lagrange* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\begin{aligned}\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 0 \\ \mu_j^* &\geq 0 \quad j = 1, \dots, r \\ \mu_j^* &= 0 \quad \forall j \notin A(x^*)\end{aligned}$$



$L(x, \lambda, \mu) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ est le **lagrangien** associé à (PNL) :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda' h(x) + \mu' g(x)$$

▼ **Définition 4** *solutions de KKT*

Les solutions des conditions nécessaires au premier ordre sont appelées *solutions de Karush-Kuhn-Tucker*.

□ **Théorème 4** condition nécessaire au deuxième ordre d'optimalité locale

CN2 On suppose que les fonctions f , h , g sont de classe \mathcal{C}^2 . Si x^* , point réalisable, est **un optimum local** alors $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\exists \mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$y' \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0 \quad \forall y \in V(x^*)$$

où $V(x^*)$ est le **sous-espace des variations réalisables au 1^{er} ordre** :

$$V(x^*) = \{y \mid \nabla h_i(x^*)' y = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \nabla g_j(x^*)' y = 0 \quad j \in A(x^*)\}$$

□ **Théorème 5** condition suffisante d'optimalité locale

f , h , g sont de classe \mathcal{C}^2 et soient $x^* \in \mathbb{R}^n$ réalisable, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^r$ tels que :

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$\mu_j^* \geq 0 \quad j = 1, \dots, r \quad \mu_j^* = 0 \quad \forall j \notin A(x^*) \quad \mu_j^* > 0 \quad \forall j \in A(x^*)$$

$$y' \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0 \quad \forall y \neq 0 \in V(x^*)$$

alors x^* est un **minimum local strict** de (PNL)

Exemple 2

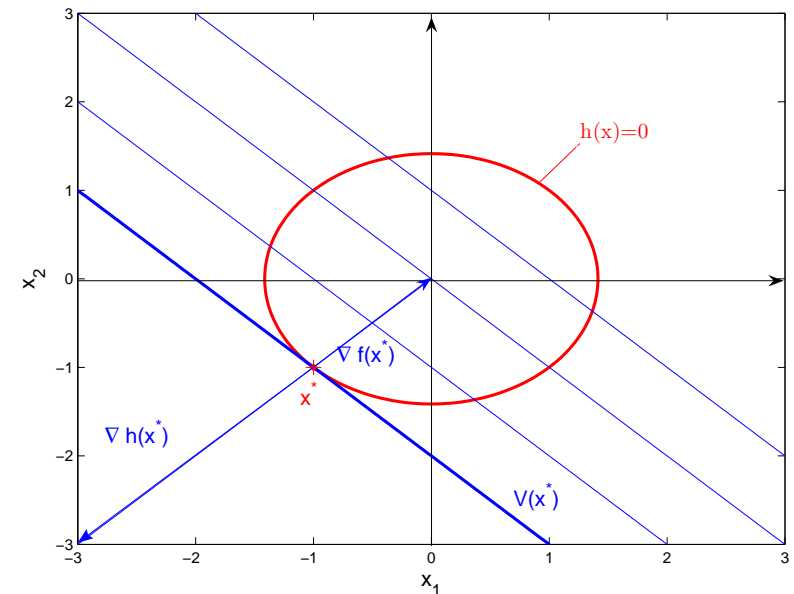
$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{sous} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 2 \end{aligned}$$


- *Minimum absolu :*

$$x^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- *Maximum absolu :*

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$



 **Exemple 3** (McCormick 1967)

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ \text{sous} \quad & 2kx_1 - x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$0 < k < 1$:

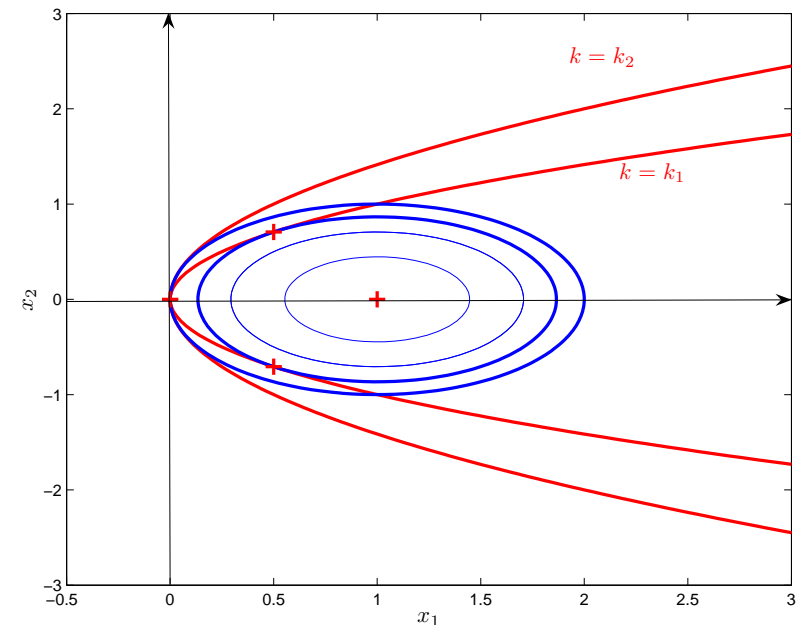
$$(x^*, \mu^*) = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 - k & \pm \sqrt{2k(1 - k)} \end{array} \right], 1 \right)$$

$k \geq 1$:

$$(x^*, \mu^*) = \left(\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right], 1/k \right)$$

$k \leq 0$:

$$(x^*, \mu^*) = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right], 0 \right)$$



Soit le problème de commande optimale en temps discret :

$$\min_{x_i, u_i} J(x_i, u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(x_i, u_i) + \psi_0(x_N)$$

$$\text{sous } x_i = f_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad N \text{ fixé}$$

$$x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, \dots, N$$

$$x_0 = \bar{x} \text{ donné}$$

$$u_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 0, \dots, N - 1$$

$$\psi(x_N) = 0$$

avec :

- $J(x_i, u_i)$ est une **fonction de Bolza** (**Lagrange** pour $\psi_0 \equiv 0$, **Mayer** pour $L_i \equiv 0$)
- $L_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ fonction \mathcal{C}^2 appelé **Lagrangien**
- $\psi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonction \mathcal{C}^2
- $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ fonction \mathcal{C}^2 définit les **conditions de bord**

▼ **Définition 5** *trajectoires d'état et de commande*

$U_{N-1} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ est *une trajectoire de commande* et
 $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ est *une trajectoire d'état*.

↪ **Hypothèses 1** *La trajectoire d'état x est unique pour U_{N-1} donnée*

$$x_i = f_{i-1}(f_{i-2}(f_{i-3}(\dots), u_{i-2}), u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N$$

$$x_i = F_i(u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, x_0) = F_i(U_{i-1}, x_0) \quad i = 1, \dots, N$$

Le problème de CO en temps discret est **un problème de PNL sous contraintes égalités** :

$$\min_{U_{N-1}} J(U_{N-1}) = L_0(x_0, u_0) + \sum_{i=1}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1}, x_0), u_i) + \psi_0(F_N(U_{N-1}, x_0))$$

(COD) sous $x_0 = \bar{x}$ donné

$$u_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 0, \dots, N-1$$

$$\psi(F_N(U_{N-1}, x_0)) = 0$$

- Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U_{N-1}, \nu) &= L_0(x_0, u_0) + \sum_{i=1}^{N-1} L_i(F_i(U_{i-1}, x_0), u_i) + \psi_0(F_N(U_{N-1}, x_0)) + \nu' \psi(F_N(U_{N-1}, x_0)) \\ &= \underbrace{L_0(x_0, u_0)}_{y_1} + \sum_{i=1}^{N-1} \underbrace{L_i(F_i(U_{i-1}, x_0), u_i)}_{y_{i+1} - y_i} + \Psi(F_N(U_{N-1}, x_0), \nu) \end{aligned}$$

- Passage à la forme de Mayer : $\tilde{J}(U_{N-1}, \nu) = \Psi(F_N, \nu) + y_N = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N, \nu)$

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + L_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}) \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \quad \tilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \tilde{f}_{i-1}(\tilde{x}_{i-1}, u_{i-1}) = \tilde{F}_i(U_{i-1}, \tilde{x}_0)$$

Le problème de commande optimale en temps discret est un problème de PNL sans contraintes :

$$\begin{aligned} &\min_{U_{N-1}, \nu} \quad \tilde{J}(U_{N-1}, \nu) = \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N(U_{N-1}, x_0), \nu) \\ (CODM) \quad &\text{sous} \quad \tilde{x}_0 = \tilde{x} \text{ donné} \\ &u_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

- CN d'optimalité au premier ordre :

CN1 : si $U_{N-1}^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*)$ est une trajectoire de commande optimale pour (PCODM) alors :

$$\nabla_{u_i} J(U_{N-1}^*) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1$$

- Calcul de $\nabla_{u_i} J(U_{N-1}) = \nabla_{u_i} \Psi(F_N(U_{N-1}, x_0))$:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_i} J(U_{N-1}) &= \nabla_{u_i} F_N \nabla \Psi(F_N) \\ &= \nabla_{u_i} f_i \underbrace{\nabla_{x_{i+1}} f_{i+1} \cdots \nabla_{x_{N-1}} f_{N-1}}_{\lambda_{i+1}} \nabla \Psi(F_N) \end{aligned}$$

où :

$\nabla_{u_i} F_N$: matrice gradient $m \times n$

$\nabla \Psi(F_N)$: vecteur gradient $n \times 1$

$\nabla_{u_i} f_i$: matrice gradient $m \times n$

$\nabla_{x_i} f_i$: matrice gradient $n \times n$

▼ **Définition 6** *vecteur adjoint*

On définit *le vecteur adjoint* $\lambda_i \in \mathbb{R}^n$, $\forall i = 1, \dots, N$ par

$$\lambda_i = \nabla_{x_i} f_i \underbrace{\nabla_{x_{i+1}} f_{i+1} \cdots \nabla_{x_{N-1}} f_{N-1} \nabla \Psi}_{\lambda_{i+1}} \quad i = 1, \dots, N - 1$$

$$\lambda_N = \nabla \Psi$$

Equation adjointe :

$$\lambda_i = \nabla_{x_i} f_i \lambda_{i+1} \quad i = 1, \dots, N - 1$$

$$\lambda_N = \nabla \Psi$$

La condition nécessaire d'optimalité au premier ordre devient :

$$\nabla_{u_i} J(U_{N-1}^*) = \nabla_{u_i} f_i \lambda_{i+1} = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N - 1$$

- Calcul de $\nabla_{u_i} \tilde{J}(U_{N-1}, \nu) = \nabla_{u_i} \tilde{\Psi}(\tilde{F}_N(U_{N-1}, x_0))$:

$$\nabla_{u_i} \tilde{J}(U_{N-1}, \nu) = \nabla_{u_i} \tilde{f}_i \tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \nabla_{\tilde{x}_i} \tilde{f}_i \tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ \tilde{\lambda}_N &= \nabla \tilde{\Psi} \end{aligned} \quad \text{avec } \tilde{f}_i = \begin{bmatrix} f_i(x_i, u_i) \\ y_i + L_i(x_i, u_i) \end{bmatrix}$$

- Vecteur adjoint :

$$\tilde{\lambda}_N = \begin{bmatrix} \lambda_N \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \Psi \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\lambda}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{x_i} f_i & \nabla_{x_i} L_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Equation adjointe et CN d'optimalité :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \nabla_{x_i} f_i \lambda_{i+1} + \nabla_{x_i} L_i, \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= \nabla \Psi \end{aligned}$$

$$\nabla_{u_i} f'_i \lambda_{i+1} + \nabla_{u_i} L_i = 0$$

CN2 : si $U_{N-1}^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*)$ est **une trajectoire de commande localement optimale** pour (COD) alors :

$$\nabla_{u_i} H_i(x_i^*, u_i^*, \lambda_{i+1}^*) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N-1$$

où **le Hamiltonien** est défini par $H_i(x_i, u_i, \lambda_{i+1}) = L_i(x_i, u_i) + \lambda_{i+1}' f_i(x_i, u_i)$ et l'équation d'état adjointe est donnée par :

$$\lambda_i^* = \nabla_{x_i} H_i(x_i^*, u_i^*, \lambda_{i+1}^*), \quad i = 1, \dots, N-1$$

avec la condition terminale $\lambda_N^* = \nabla \Psi(X_N^*)$ et la condition initiale $x_0 = \bar{x}$

Nota : il est nécessaire de résoudre **un problème aux deux bouts** (Two-Point Boundary Value Problem, TPBVP) par la résolution d'un système d'équations récurrentes non linéaires de dimension $N(2n + m)$ en les inconnues x_i , λ_i et u_i .

 **Exemple 4** : *Perle*

Une perle glisse sans frottement dans un plan (x, y) le long d'un collier dans un champ de gravité donné par l'accélération g . Déterminer la forme de la courbe faite par le collier pour atteindre l'abscisse maximale en un temps $t_f = N\Delta T$ donné.

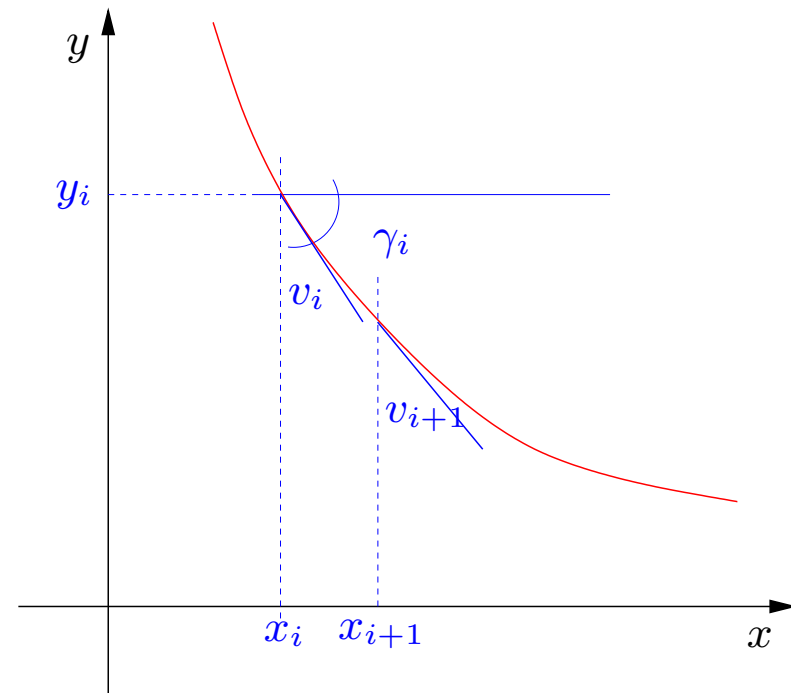
- *Equation des forces* :

$$v_{i+1} = v_i + g\Delta T \sin \gamma_i$$

- *Equations de la cinématique* :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta s_i \cos \gamma_i$$

$$\Delta s_i = \Delta T v_i + \frac{g}{2} \Delta T^2 \sin \gamma_i$$



① Modélisation :

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + (v_i \Delta T + \frac{g}{2} \Delta T^2 \sin \gamma_i) \cos \gamma_i & x(0) &= 0 \\v_{i+1} &= v_i + g \Delta T \sin \gamma_i & v(0) &= 0\end{aligned}$$

② Fonction coût : $J = -x_N$

③ Hamiltonien :

$$H_i = \lambda_{i+1}^v (v_i + g \Delta T \sin \gamma_i) + \lambda_{i+1}^x (x_i + \Delta T v_i \cos \gamma_i + \frac{g \Delta T^2}{2} \sin \gamma_i \cos \gamma_i)$$

④ TPBVP :

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1}^v - \lambda_i^v + \frac{t_f}{N} \cos \gamma_i &= 0 & \lambda_N^v &= 0 \\ \lambda_i^x &= -1 \\ g \frac{t_f}{N} \lambda_{i+1}^v \cos \gamma_i + \frac{t_f}{N} v_i \sin \gamma_i - \frac{g t_f^2}{2 N^2} \cos 2 \gamma_i &= 0 \\ v_{i+1} - v_i - g \frac{t_f}{N} \sin \gamma_i &= 0 & v_0 &= 0 \\ x_{i+1} - x_i - \frac{t_f}{N} v_i \cos \gamma_i - \frac{g t_f^2}{2 N^2} \sin \gamma_i \cos \gamma_i &= 0 & x_0 &= 0\end{aligned}$$

Soit le problème de commande optimale en temps discret :

$$\min_{x_i, u_i} J(x_i, u_i) = \sum_{i=0}^{N-1} L_i(x_i, u_i) + \psi_0(x_N)$$

$$\text{sous } x_i = f_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad N \text{ fixé}$$

$$x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, N \quad x_0 = \bar{x} \text{ donné}$$

$$\psi(x_N) = 0$$

$\psi_0(x_N)$ est remplacée par $\Psi(x_N, \nu) = \psi_0(x_N) + \nu' \psi(x_N)$. Le hamiltonien et les conditions d'optimalité (**équations canoniques de Hamilton**) ne changent pas.

- **Hamiltonien :**

$$H_i(x_i, \lambda_{i+1}, u_i) = \lambda_{i+1}' f_i(x_i, u_i) + L_i(x_i, u_i)$$

- **Equation adjointe :**

$$\lambda_i^* = \nabla_{x_i} H_i(x_i^*, u_i^*, \lambda_{i+1}^*), \quad \lambda_N^* = \nabla_x \Psi(x_N^*, \nu^*) = \nabla_x \psi_0(x_N^*) + \nu^{*'} \nabla_x \psi(x_N^*)$$

- **Equation d'optimalité :**

$$\nabla_{u_i} H_i(x_i^*, u_i^*, \lambda_{i+1}^*) = 0, \quad \forall i = 0, \dots, N-1$$