

Représentation et analyse des systèmes linéaires

Petite classe No 7

1 Compléments sur l'analyse de stabilité des systèmes bouclés

1.1 Analyse complexe pour le critère de Nyquist

Le critère de stabilité de Nyquist est une application particulière de différents résultats d'analyse complexe allant des propriétés des transformations conformes au théorème des résidus en passant par le théorème de Cauchy qui établit le principe de l'argument. Nous rappelons tout d'abord quelques définitions.

Définition 1.1 (Transformation conforme)

Une application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} est dite **conforme** en z_0 si, pour deux courbes (continûment différentiables) \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se coupant en z_0 selon un angle α , les courbes images $f(\mathcal{C}_1) = \Gamma_1$ et $f(\mathcal{C}_2) = \Gamma_2$ se coupent en $f(z_0)$ suivant l'angle α .

Définition 1.2 (\mathbb{C} -Différentiabilité)

Une application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} est dite \mathbb{C} -différentiable en z_0 si

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existe et est unique.

Proposition 1.1 (Equation de Cauchy-Rieman)

Une fonction $f = u + iv : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ si et seulement si u et v sont \mathbb{R} -différentiables en (x_0, y_0) et vérifient les conditions de Cauchy-Rieman (l'équation de Cauchy-Rieman)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De plus, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$. En définissant les deux opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ par :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

On définit l'équation de Cauchy-Rieman par :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} = 0$$

et la dérivée en z_0 par :

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0)$$

Définition 1.3 (Fonctions holomorphes)

Une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} est dite **holomorphe** sur \mathcal{U} si elle est \mathbb{C} -différentiable en tout point de \mathcal{U} .

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} = 0$$

Définition 1.4 (Fonctions analytiques)

Une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} est dite **analytique** en $z_0 \in \mathcal{U}$ si elle est \mathbb{C} -différentiable en $z_0 \in \mathcal{U}$.

Une fonction analytique sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ est donc une fonction holomorphe.

Etant donnée la fonction $F(p) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on note M le point d'affixe p dont les coordonnées dans le plan complexe sont (α, β) ($p = \alpha + \beta j$) et M' le point d'affixe $F(p) = u + v j$. Si le point M décrit une courbe fermée \mathcal{C} dans le plan complexe qui ne passe pas par les points singuliers de F alors le point M' décrit dans le plan complexe une courbe fermée Γ image de la courbe \mathcal{C} . Par convention, on parcourt le contour \mathcal{C} dans le sens anti-trigonométrique et en considérant l'aire à droite comme contenue par le contour.

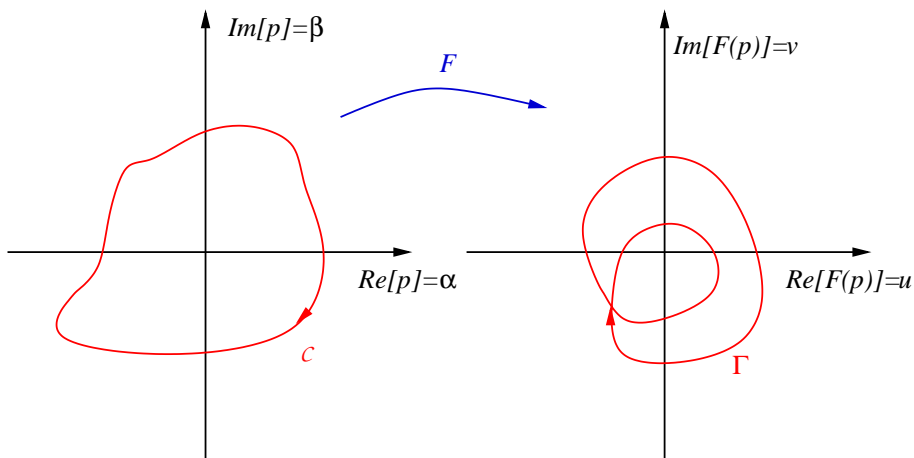


FIGURE 1 – Transformation d'un contour \mathcal{C} en un contour Γ par F

Dans le cas où $F(p)$ est une fraction rationnelle alors les points singuliers sont les racines du polynôme du dénominateur. On considère dans la suite que $F(p)$ est une fraction rationnelle.

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (p + z_i)}{\prod_{j=1}^n (p + p_j)}$$

Théorème 1.1 (Principe de l'argument)

Si un contour \mathcal{C} contient Z zéros et P pôles de $F(p)$ sans en traverser aucun, alors quand on le parcourt dans le sens anti-trigonométrique, le contour correspondant $\Gamma = F(\mathcal{C})$ fait un nombre de tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique égal à,

$$\boxed{\overset{\circ}{N} = P - Z}$$

La preuve de ce théorème repose sur le théorème de Cauchy et le théorème des résidus.

Théorème 1.2 (Cauchy)

Si $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{C} et si $\mathcal{C} : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ est une courbe fermée C^1 dans \mathcal{U} alors

$$\oint_{\mathcal{C}} F(p) dp = 0$$

On suppose que

$$F(p) = \frac{(p + z_1)^{k_1} (p + z_2)^{k_2} \dots}{(p + p_1)^{m_1} (p + p_2)^{m_2} \dots} G(p)$$

où $G(p)$ est une fonction holomorphe dans le contour fermée \mathcal{C} et tous les pôles et zéros sont situés dans le contour \mathcal{C} . Il est alors toujours possible d'écrire

$$\frac{F'(p)}{F(p)} = \left(\frac{k_1}{p + z_1} + \dots \right) - \left(\frac{m_1}{p + p_1} + \dots \right) + \frac{G'(p)}{G(p)}$$

En parcourant le contour fermé \mathcal{C} dans le sens anti-trigonométrique, contenant les pôles p_i et les zéros z_i et en utilisant le théorème des résidus, il est possible d'écrire

$$\oint \frac{F'(p)}{F(p)} dp = -2\pi j [(k_1 + k_2 + \dots) - (m_1 + m_2 + \dots)] = -2\pi j (Z - P)$$

où $Z = k_1 + k_2 + \dots$ est le nombre total de zéros contenus dans le contour \mathcal{C} et $P = m_1 + m_2 + \dots$ est le nombre total de pôles contenus dans le contour \mathcal{C} .

Théorème 1.3 (Théorème des résidus)

Si $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe dans $U - \{z_1, \dots, z_n\}$ où z_1, \dots, z_n sont des points singuliers distincts et \mathcal{C} est un contour fermé continûment différentiable dans $U - \{z_1, \dots, z_n\}$ parcouru dans le sens anti-trigonométrique alors

$$\oint_{\mathcal{C}} f = -2\pi j \sum_{j=1}^n R(z_j)$$

où $R(z_j)$ est le résidu associé au point singulier z_j .

En écrivant $F(p) = |F|e^{j\theta}$, on obtient $\ln F(p) = \ln|F| + j\theta$. De plus,

$$\frac{F'(p)}{F(p)} = \frac{d \ln F(p)}{dp} = \frac{d \ln|F|}{dp} + j \frac{d\theta}{dp}$$

En notant Γ la courbe fermée obtenue par la transformation conforme $F(p)$, on a

$$\oint_{-} \frac{F'(p)}{F(p)} dp = \oint_{-} d \ln|F| + j \oint_{-} d\theta = 0 + j \int d\theta = 2\pi j (P - Z)$$

On obtient donc

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = P - Z$$

Cela signifie que la variation angulaire de $F'(p)/F(p)$ quand p parcourt le contour fermé est un multiple $(P - Z)$ de 2π . Cette variation angulaire est égale au nombre de tours de Γ dans le sens anti-trigonométrique autour de 0.

$$\overset{\circ}{N} = Z - P$$

1.2 Analyse de stabilité multivariable

Nous présentons une généralisation directe du critère de stabilité de Nyquist afin d'analyser la stabilité en boucle fermée d'un asservissement multivariable dont la matrice de transfert en boucle ouverte est donnée par $L(p)$.

1.2.1 Polynômes caractéristiques en boucle ouverte et en boucle fermée

Soit l'asservissement multivariable à retour unitaire de matrice de transfert en boucle ouverte $L(p) = C_{bo}(p\mathbf{1} - A_{bo})^{-1}B_{bo} + D_{bo}$ alors les pôles de $L(p)$ sont les racines du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$\boxed{\Phi_{bo}(p) = \det(p\mathbf{1} - A_{bo})}$$

Le polynôme en boucle fermée est donné par :

$$\boxed{\Phi_{bf}(p) = \det(p\mathbf{1} - A_{bo} + B_{bo}(\mathbf{1} + D_{bo})^{-1}C_{bo})}$$

Remarques 1.1

$$\det(\mathbf{1} + L(p)) = \frac{\Phi_{bf}(p)}{\Phi_{bo}(p)} \det(\mathbf{1} + D_{bo})$$

1.2.2 Le critère de Nyquist multivariable

On suppose qu'il n'y a pas de simplification interne pôles/zéros dans la matrice de transfert $L(p)$.

Théorème 1.4

Soit P_{bo} le nombre de pôles instables en boucle ouverte dans $L(p)$. Le système en boucle fermée de matrice de transfert en boucle ouverte $L(p)$ est stable ssi le lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} + L(p))$:

- fait P_{bo} tours dans le sens trigonométrique autour de l'origine.
- ne passe pas par l'origine.

Remarques 1.2

- Le lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} + L(p))$ correspond à l'image de $\det(\mathbf{1} + L(p))$ quand p parcourt le contour de Nyquist dans le sens anti-trigonométrique.
- Si le système est instable alors le nombre de pôles instables en boucle fermée est

$$P_{bf} = \overset{\circ}{N} + P_{bo}$$

où $\overset{\circ}{N}$ est le nombre de tours dans le sens anti-trigonométrique autour de 0 du lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} + L(j\omega))$.

1.2.3 Théorème du faible gain

Définition 1.5

On définit le rayon spectral $\rho(L(j\omega))$ à chaque fréquence par l'amplitude maximale sur l'ensemble des valeurs propres :

$$\rho(L(j\omega)) = \max_i |\lambda_i(L(j\omega))|$$

Théorème 1.5 (Condition de stabilité du rayon spectrale)

Soit un asservissement à retour unitaire dont la boucle ouverte $L(p)$ est stable. La boucle fermée est stable si

$$\rho(L(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Ce résultat intuitif ne constitue qu'une condition suffisante qui peut être très pessimiste puisque ne prenant pas en compte l'information sur la phase.

Théorème 1.6 (faible gain)

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable en boucle ouverte alors la boucle fermée est stable si :

$$\boxed{\max_{\omega} \bar{\sigma}(L(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}}$$

où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de la matrice $L(j\omega)$ calculée à la pulsation ω .

2 Exercices

Exercice 1 :

En appliquant le critère de Nyquist, déterminer la stabilité des asservissements à retour unitaire de fonctions de transfert en boucle ouverte données ci-dessous ($T_1 > 0$).

$$1- \quad G(p) = \frac{K}{p(p+1)(2p+1)} \quad 2- \quad G(p) = \frac{K}{p-1}$$

$$3- \quad G(p) = \frac{Ke^{-0.8p}}{p+1} \quad 4- \quad G(p) = \frac{K}{p^2(T_1p+1)}$$

$$5- \quad G(p) = \frac{Ke^{-2p}}{p} \quad 6- \quad G(p) = \frac{K(1-p)}{(p+1)}$$

Exercice 2 :

Soit le système multivariable asservi donné par sa matrice de transfert en sortie en boucle ouverte :

$$L(p) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{p} & 0 \\ \frac{1}{(p-2)} & -\frac{p^2 + kp - (1+k)}{(p+1)(p-1)} \end{bmatrix}$$

Peut-on appliquer le critère du faible gain ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

Soit le système multivariable asservi à retour unitaire donné par sa matrice de transfert en sortie en boucle ouverte :

$$L(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(p+1)(p+3)} & \frac{p}{(p+1)(p+3)} \\ -\frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)} & \frac{2p+3}{(p+3)(p+1)} \end{bmatrix}$$

Appliquer le critère de Nyquist multivariable pour déterminer la stabilité BIBO de la boucle fermée.

Exercice 4 :

Soit l'asservissement donné par la figure ci-dessous :

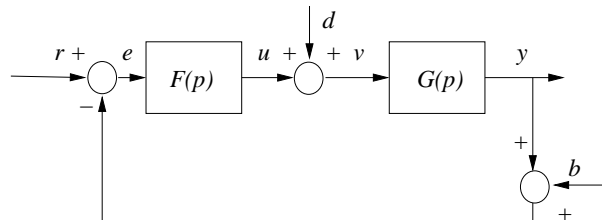


FIGURE 2 – Schéma d'asservissement

où $F(p)$, $G(p)$ sont respectivement les fonctions de transfert du correcteur et du système avec :

$$G(p) = \frac{p-1}{p(p+1)}$$

Etude de la stabilité pour $F(p) = 1$

- 1- Calculer la fonction de sensibilité $S(p)$ et la fonction de sensibilité complémentaire $T(p)$.
- 2- Etudier la stabilité du système nominal par le critère de Nyquist en considérant l'asservissement avec $d = 0$, $b = 0$. Pourquoi ne peut-on employer ici le critère du revers ?
- 3- Etudier la stabilité interne de cet asservissement.

Exercice 5 :

Soit l'asservissement donné par la figure 2 où $G(p)$ est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{p+1}$$

La fonction de transfert du correcteur est donnée par :

$$F(p) = \frac{p-1}{p+2}$$

- 1- Etudier la stabilité du système bouclé par le critère de Nyquist. Pourquoi ne peut-on employer ici le critère du revers ?
- 2- Tracer la réponse fréquentielle de la boucle ouverte $L(p)$ dans le plan de Bode. Donner les pulsations de cassure caractéristiques et le roll-off.
- 3- Commentaires sur le correcteur $F(p)$.
- 4- Calculer et tracer les réponses fréquentielles des fonctions de sensibilité dans le plan de Bode.
- 5- Etudier la stabilité interne de cette interconnexion.

3 Exercices

Exercice 1 :

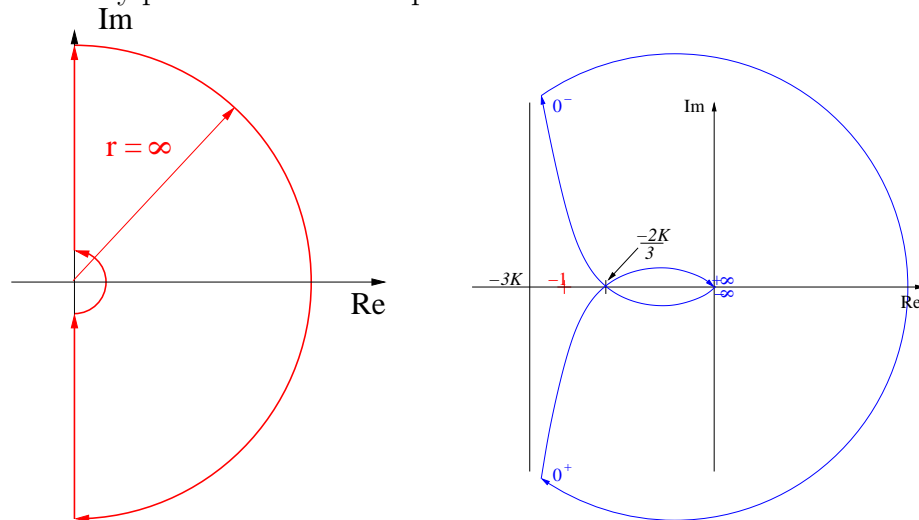
1- Soit la fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(2p+1)} \quad G(j\omega) = \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)}$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent :

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{-3K}{9\omega^2 + (1-2\omega^2)^2} \quad \operatorname{Im}(j\omega) = \frac{-K(1-2\omega^2)}{9\omega^3 + \omega(1-2\omega^2)^2}$$

Il y a une asymptote verticale $\operatorname{Re}(0^+) = -3K$ et $\operatorname{Im}(0^+) \rightarrow -\infty$. La partie imaginaire change de signe pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ conduisant à $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2K}{3}$. Le contour de Nyquist et le tracé complet de la boucle ouverte sont les suivants :



Le système en boucle ouverte $G(p)$ ne possède pas de pôles instables. On en déduit

$$\text{Pour } K \geq \frac{3}{2} \quad P = 0 \quad N = -2 \quad Z = 2$$

$$\text{Pour } K \leq \frac{3}{2} \quad P = 0 \quad N = 0 \quad Z = 0$$

On en conclue donc que le système en boucle fermée est stable pour

$$0 \leq K < \frac{3}{2} \text{ et instable pour } K \geq \frac{3}{2}.$$

2- Soit la fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{K}{p-1} \quad G(j\omega) = \frac{-K(1+j\omega)}{1+\omega^2}$$

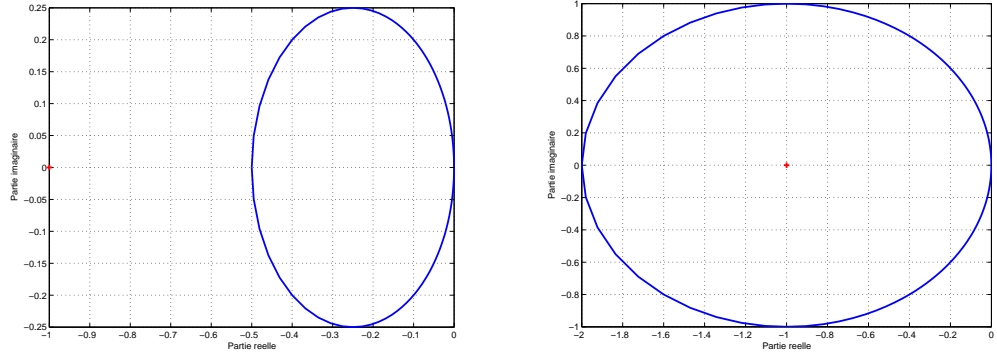
Les parties réelles et imaginaires s'écrivent :

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{-K}{1+\omega^2} \quad \operatorname{Im}(j\omega) = \frac{-K\omega}{1+\omega^2}$$

La partie réelle est négative pour tout ω et la partie imaginaire est négative pour $\omega \geq 0$. Le contour de Nyquist est un cercle centré en le point $(-K/2, 0)$ et de rayon $K/2$ et dont l'équation est

$$(\operatorname{Re} + K/2)^2 + \operatorname{Im}^2 = K^2/4$$

Les tracés de Nyquist pour $K = 0.5$ et $K = 2$ sont les suivants :



Le nombre de pôles instables en boucle ouverte est égal à 1 (le pôle 1). On en déduit

$$\text{Pour } K > 1 \quad P = 1 \quad \overset{\circ}{N} = 1 \quad Z = 0$$

$$\text{Pour } K \leq 1 \quad P = 1 \quad \overset{\circ}{N} = 0 \quad Z = 1$$

On en conclut donc que le système en boucle fermée est stable pour $K > 1$ et instable pour $K \leq 1$.

3- Soit la fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{K e^{-0.8p}}{p+1} \quad G(j\omega) = \frac{K e^{-0.8j\omega}}{1+j\omega}$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent :

$$\text{Re}(j\omega) = \frac{K [\cos(0.8\omega) - \omega \sin(0.8\omega)]}{1 + \omega^2} \quad \text{Im}(j\omega) = \frac{-K [\sin(0.8\omega) + \omega \cos(0.8\omega)]}{1 + \omega^2}$$

Le tracé du lieu de Nyquist complet est donné par :

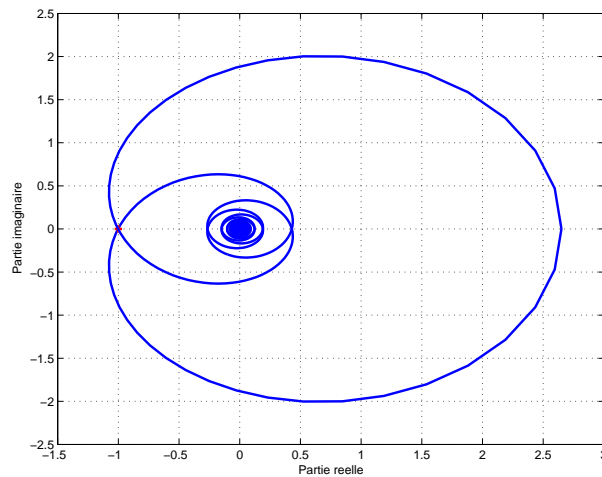


FIGURE 3 – Lieu de Nyquist complet pour $K = 2.65$

Par application du critère de Nyquist, la stabilité de la boucle fermée est complètement déterminée par la position de l'intersection du lieu avec l'axe réel. Pour cette intersection, la pulsation vérifie :

$$\sin(0.8\omega) + \omega \cos(0.8\omega) = 0$$

et donc est solution de l'équation :

$$\omega = -\tan(0.8\omega) \text{ rad/s}$$

La solution numérique la plus petite (correspondant au point le plus à gauche sur le diagramme de Nyquist) est donnée par :

$$\omega = 2.4482 \text{ rad/s}$$

Pour cette valeur de ω , on obtient :

$$G(j2.4482) = -0.378K$$

La valeur critique de K conduisant à l'instabilité est donc donnée par :

$$K = 1/0.378 = 2.65$$

Le nombre de pôles instables en boucle ouverte est égal à 0 ($P = 0$). Pour $K < 2.65$, le nombre de tours autour du point critique $(-1, 0)$ est $\overset{\circ}{N} = 0$ alors qu'il est non nul pour $K > 2.65$.

Le système en boucle fermée est stable asymptotiquement pour $K < 2.65$ et instable pour $K > 2.65$.

4- Soit la fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)p^2} \quad G(j\omega) = \frac{-K(1 + jT_1\omega)}{\omega^2(1 + T_1^2\omega^2)}$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent :

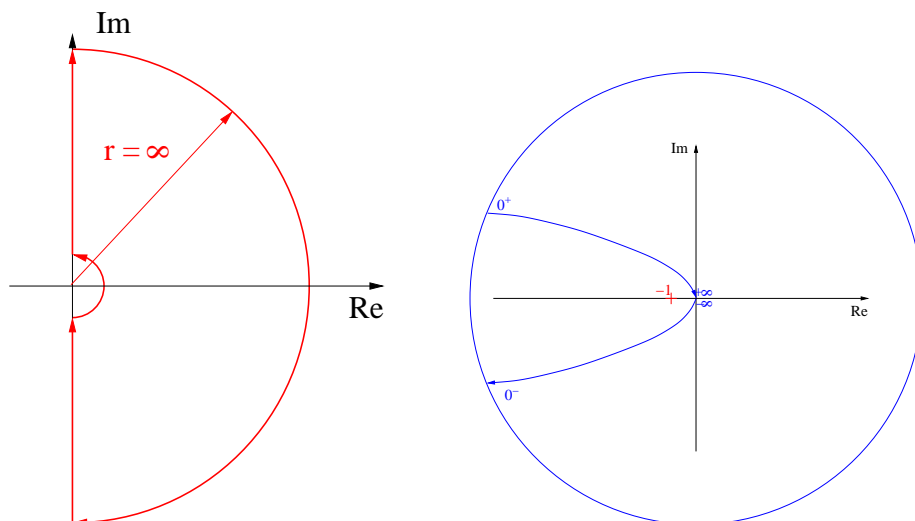
$$\text{Re}(j\omega) = \frac{-K}{\omega^2(1 + T_1^2\omega^2)} \quad \text{Im}(j\omega) = \frac{KT_1}{\omega(1 + T_1^2\omega^2)}$$

La partie réelle est négative pour tout ω alors que la partie imaginaire est positive pour tout $\omega > 0$ et négative pour tout $\omega < 0$. Il y a une branche parabolique dont l'axe est l'axe des abscisses. Du fait de la double intégration (pôle double à 0) dans la boucle ouverte, la fermeture du contour se fait en suivant la variation de l'argument de la manière suivante.

$$p \sim \rho e^{j\theta} \quad \rho \rightarrow 0 \quad -\pi/2 \leq \overset{\circ}{\theta} \leq \pi/2$$

$$G(p) \sim \frac{K e^{-2j\theta}}{\rho^2} \quad \rho \rightarrow 0 \quad -\pi \leq -2 \overset{\circ}{\theta} \leq \pi$$

Le contour de Nyquist et le tracé du lieu complet de Nyquist sont donc donnés par :



Le nombre de pôles instables en boucle ouverte est $P = 0$ alors que $\overset{\circ}{N} = -2$. On déduit que le système en boucle fermée est instable et possède deux pôles instables.

5- Soit la fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{Ke^{-2p}}{p} \quad G(j\omega) = \frac{-Kje^{-2j\omega}}{\omega}$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent :

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{-K}{\omega} \sin 2\omega \quad \operatorname{Im}(j\omega) = \frac{-K}{\omega} \cos 2\omega$$

Il y a une asymptote verticale en $\omega \rightarrow 0$, $\operatorname{Re}(0) = -2K$ et $\operatorname{Im}(0) \rightarrow -\infty$. Le tracé du lieu de Nyquist est donc donné par :

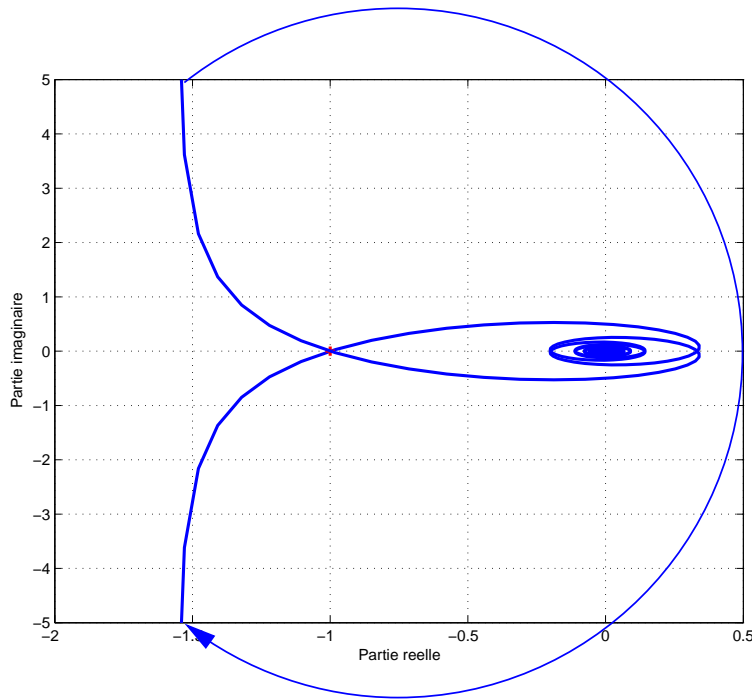


FIGURE 4 – Lieu de Nyquist pour $K = \pi/4$

Le contour a été fermé suivant la même méthode que dans le premier cas.

$$p \sim \rho e^{j\theta} \quad \rho \rightarrow 0 \quad -\pi/2 \leq \overset{\circ}{\theta} \leq \pi/2$$

$$G(p) \sim \frac{Ke^{-j\theta}}{\rho} \quad \rho \rightarrow 0 \quad -\pi/2 \leq -\overset{\circ}{\theta} \leq \pi/2$$

La partie imaginaire s'annule pour $\omega = \frac{\pi}{4}$ et la partie réelle vaut alors $\operatorname{Re}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{4K}{\pi}$. Le système en boucle ouverte ne possède pas de pôles instables ($P = 0$). On déduit donc que la valeur du gain critique est

$$K = \frac{\pi}{4}$$

puisque

$$\text{Pour } K \geq \pi/4 \quad P = 0 \quad \overset{\circ}{N} \geq 2 \quad Z \geq 2$$

$$\text{Pour } K < \pi/4 \quad P = 0 \quad \overset{\circ}{N} = 0 \quad Z = 0$$

Le système en boucle fermée est stable pour $K < \pi/4$ et instable pour $K \geq \pi/4$.

6- Soit la fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{K(1-p)}{p+1} \quad G(j\omega) = \frac{K(1-\omega^2-2j\omega)}{1+\omega^2}$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent :

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{K(1-\omega^2)}{1+\omega^2} \quad \operatorname{Im}(j\omega) = \frac{-2K\omega}{1+\omega^2}$$

Il est à noter que

$$\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2 = K^2$$

Le lieu de Nyquist complet est donc un cercle centré en $(0,0)$ et de rayon K .

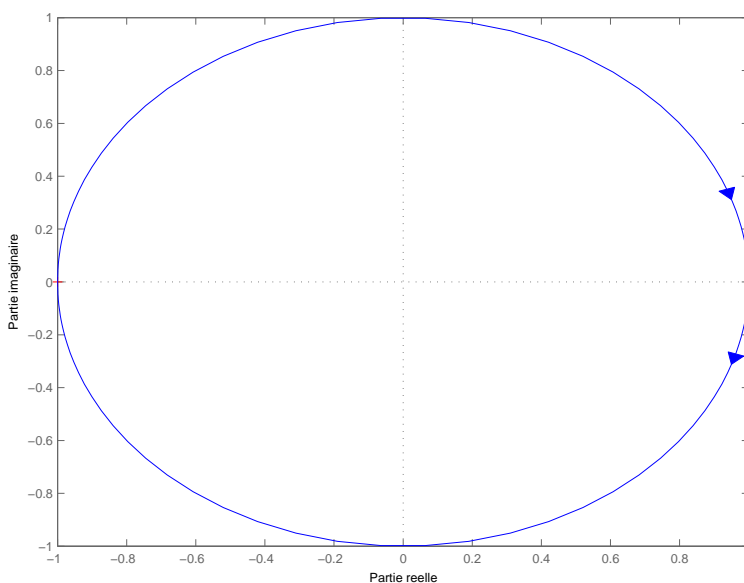


FIGURE 5 – Lieu de Nyquist complet pour $K = 1$

$$\text{Pour } K \geq 1 \quad P = 0 \quad \overset{\circ}{N} = 1 \quad Z = 1$$

$$\text{Pour } K < 1 \quad P = 0 \quad \overset{\circ}{N} = 0 \quad Z = 0$$

Le système en boucle fermée est stable pour $K < 1$ et instable pour $K \geq 1$.

Exercice 2 :

Soit le système multivariable asservi donné par sa matrice de transfert en sortie en boucle ouverte :

$$L(p) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{p} & 0 \\ \frac{1}{(p-2)} & -\frac{p^2 + kp - (1+k)}{(p+1)(p-1)} \end{bmatrix}$$

Les pôles de $L(p)$ sont calculés comme les racines du polynôme caractéristique $\pi_p(p)$. $\pi_p(p)$ est le plus petit dénominateur commun de tous les mineurs successifs non identiquement nuls de $L(p)$.

$$\pi_p(p) = p(p+1)(p-1)(p-2)$$

$L(p)$ possède donc 2 pôles instables 1 et 2. Il est donc impossible d'appliquer le critère du faible gain.

Exercice 3 :

Soit le système multivariable asservi par un retour unitaire donné par sa matrice de transfert en sortie en boucle ouverte :

$$L(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(p+1)(p+3)} & \frac{p}{(p+1)(p+3)} \\ -\frac{(p+2)}{(p+1)(p+3)} & \frac{2p+3}{(p+3)(p+1)} \end{bmatrix}$$

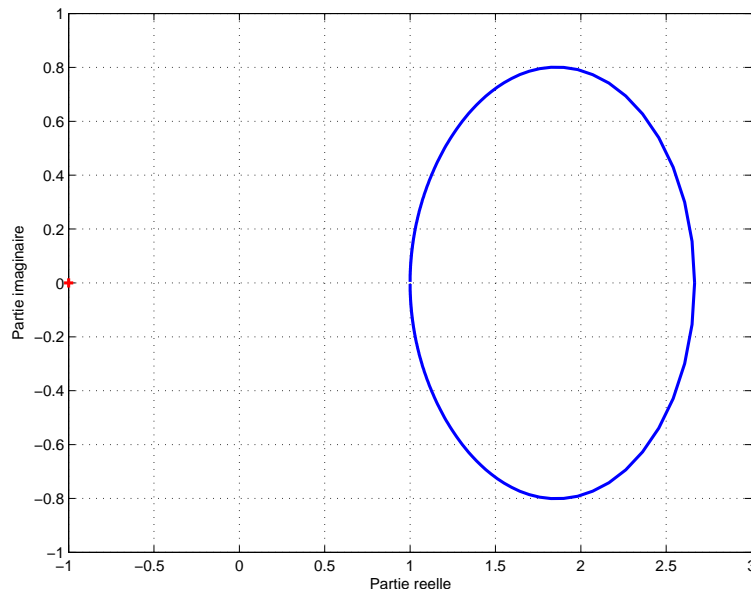
On calcule le polynôme caractéristique $\pi_p(p)$

$$\pi_p(p) = (p+1)(p+3)$$

$L(p)$ ne possède que des pôles stables 1 et 3 donc $P_{bo} = 0$. On calcule $\det(\mathbf{1} + L(p))$

$$F(p) = \det(\mathbf{1} + L(p)) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$$

Le tracé du lieu de Nyquist de $F(p)$ est donné par :



On constate que le lieu complet de Nyquist ne passe pas par l'origine et n'entoure pas l'origine $\overset{\circ}{N} = 0$. On en conclue que le système en boucle fermée est BIBO stable puisque

$$P_{bf} = \overset{\circ}{N} + P_{bo} = 0$$

Exercice 4 :

On considère l'asservissement de la figure 2.

1- Les fonctions de sensibilité sont calculées comme

$$S(p) = \frac{1}{1 + FG} = \frac{p(p+1)}{p^2 + 2p - 1} \quad T(p) = 1 - S(p) = \frac{p-1}{p^2 + 2p - 1}$$

2- On ne peut employer le critère du revers puisque G n'est pas à minimum de phase (présence du zéro instable 1). On applique donc le critère de Nyquist.

$$G(p) = \frac{p-1}{p(p+1)} \quad G(j\omega) = \frac{2\omega^2 + j\omega(1 - \omega^2)}{\omega^2(1 + \omega^2)}$$

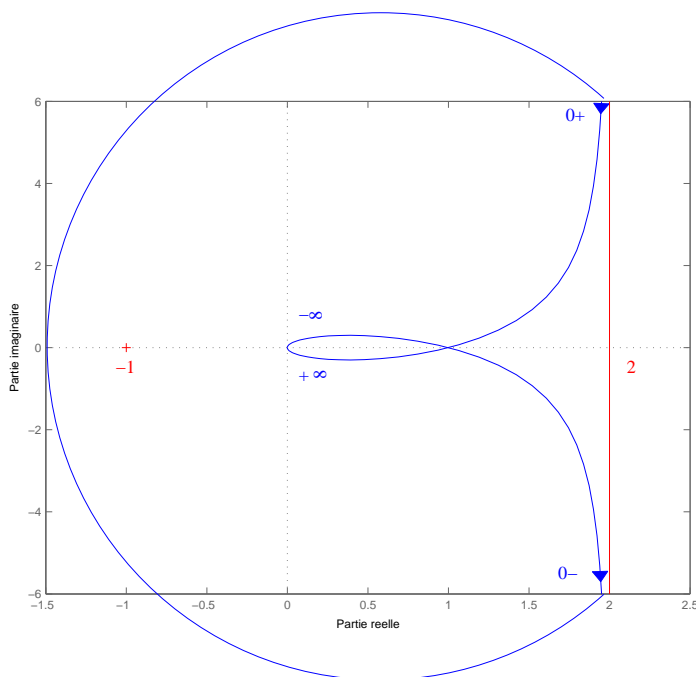
Les parties imaginaires et réelles sont définies comme

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2} \quad \operatorname{Im}(j\omega) = \frac{1 - \omega^2}{\omega(1 + \omega^2)}$$

Le contour de Nyquist comporte une asymptote verticale pour $\operatorname{Re}(j\omega) = 2$. La fermeture s'effectue de manière classique en présence d'une intégration et d'un zéro instable

$$p \sim \rho e^{j\theta} \quad \rho \rightarrow 0 \quad -\pi/2 \leq \overset{\circ}{\theta} \leq \pi/2$$

$$G(p) \sim -\frac{K e^{-j\theta}}{\rho} \quad \rho \rightarrow 0 \quad -\pi/2 \leq -\overset{\circ}{\theta} \leq \pi/2$$



On constate donc que

$$P = 0 \quad \overset{\circ}{N} = 1 \quad Z = 1$$

Le système en boucle fermée est donc instable puisque T a un pôle instable.

3- Le système n'est pas stable de manière interne puisque l'une des fonctions de sensibilité T (mais aussi S) n'est pas stable.

Exercice 5 :

Soit l'asservissement donné par la figure 2 où $G(p)$ est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{p + 1}$$

La fonction de transfert du correcteur est donnée par :

$$F(p) = \frac{p - 1}{p + 2}$$

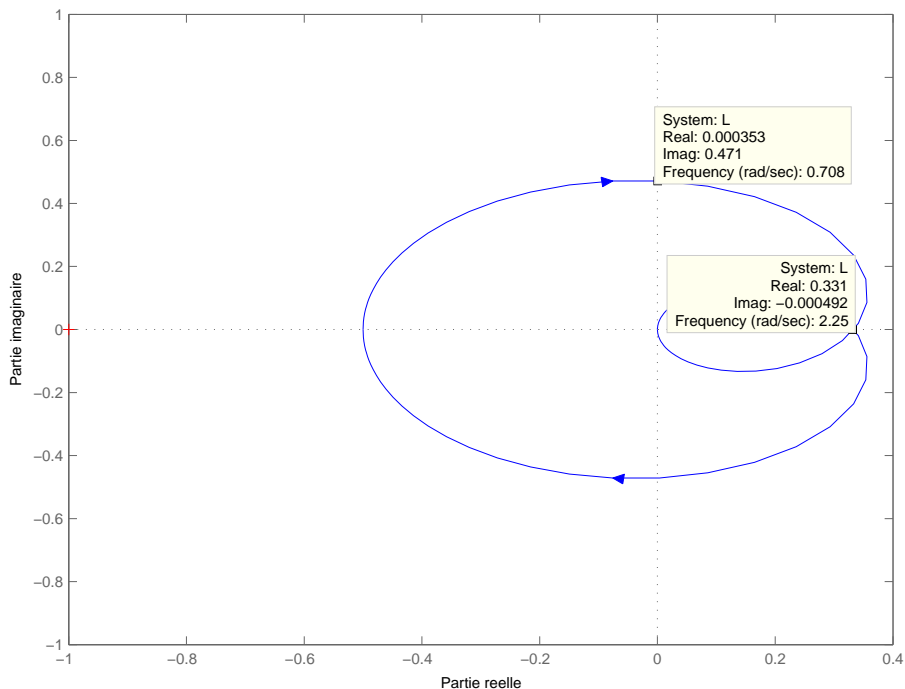
1- La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par

$$L(p) = \frac{p - 1}{(p + 2)(p + 1)} \quad L(j\omega) = \frac{2(2\omega^2 - 1) + j\omega(5 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

La boucle ouverte comporte un zéro instable et n'est donc pas à minimum de phase. Il est donc impossible d'appliquer le critère du revers. Les parties imaginaires et réelles sont définies comme

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{2(2\omega^2 - 1)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} \quad \operatorname{Im}(j\omega) = \frac{\omega(5 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

Le contour de Nyquist est donc le suivant



On constate donc que

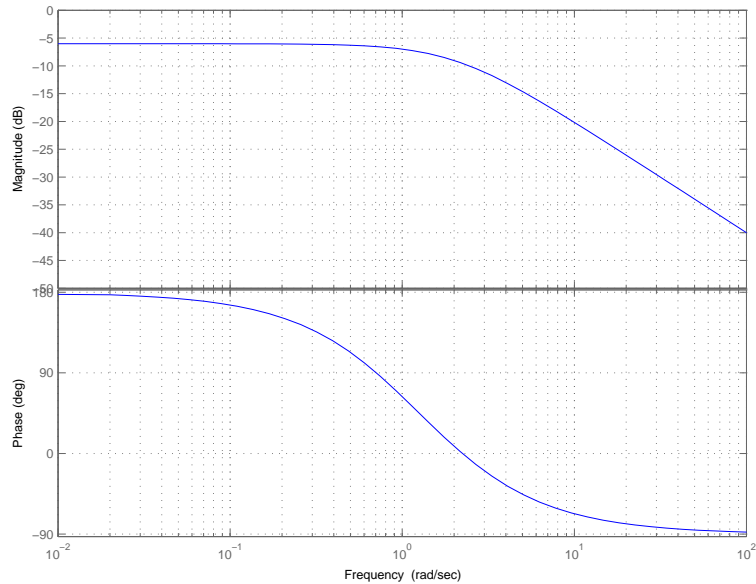
$$P = 0 \quad \overset{\circ}{N} = 0 \quad Z = 0$$

Le système en boucle fermée est donc BIBO stable.

2- Le module et la phase de $L(j\omega)$ sont donnés par

$$|L(j\omega)| = \frac{1}{4 + \omega^2} \quad \Phi = -2\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Les pulsations de cassure associées à la boucle ouverte sont données par $\omega_{z_1} = \omega_{p_1} = 1$ rad/s et $\omega_{p_2} = 2$ rad/s. Le roll-off en hautes fréquences est de 1 (-20 dB/dec.).

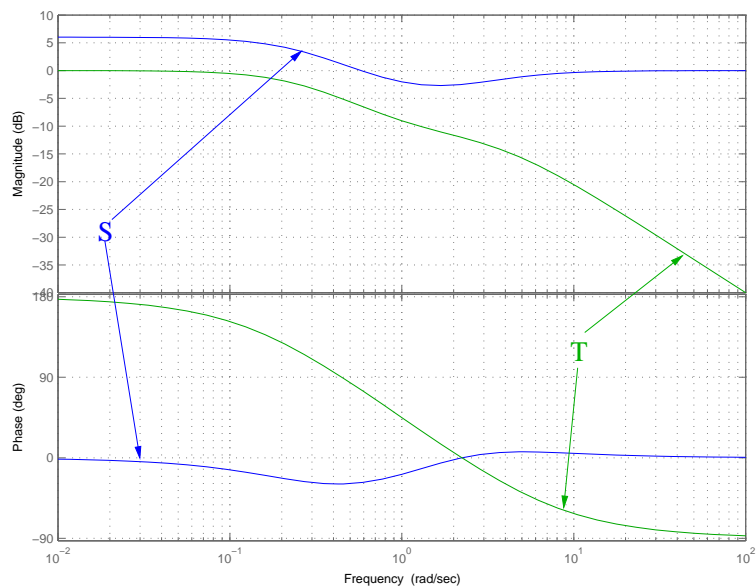


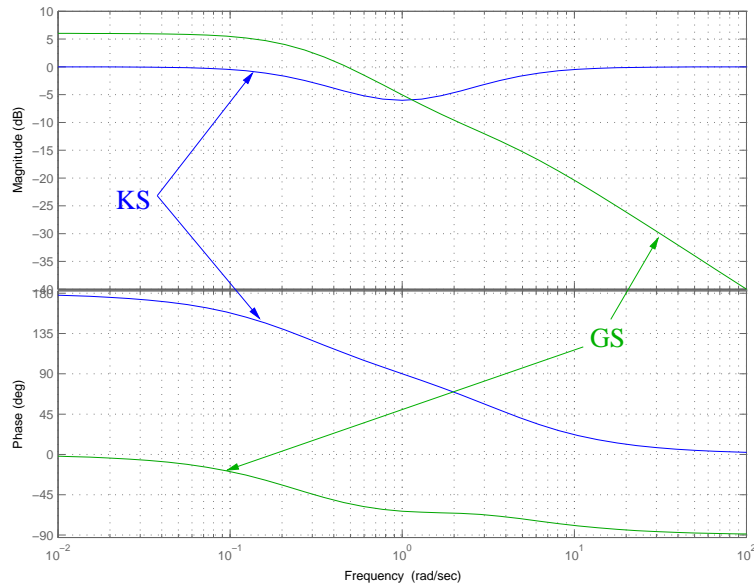
3- Le correcteur $F(p)$ introduit un zéro instable dans la boucle ouverte. Il va ainsi créer un phénomène de réponse inverse qui équivaut à la présence d'un retard dans la chaîne de commande. Il n'y a pas d'intégration dans la chaîne directe et les propriétés de précision par rapport à la référence et de rejet de la perturbation d seront donc très mauvaises. De plus, le gain de $L(p)$ est faible en basses fréquences. Cela conforte les mauvaises propriétés de rejet des perturbations modélisées en basses fréquences. Le roll-off est égal à 1 et ne permet pas une forte fonction de filtrage des bruits de mesure en hautes fréquences.

4- Calcul des différentes fonctions de sensibilité :

$$S(p) = \frac{(p+1)(p+2)}{p^2+4p+1} \quad T(p) = \frac{p-1}{p^2+4p+1}$$

$$FG(p) = \frac{p^2-1}{p^2+4p+1} \quad GS(p) = \frac{p+2}{p^2+4p+1}$$





- 5- L'interconnexion est stable de manière interne puisque chacune des fonctions de sensibilité est stable. De plus, $\|L\|_{\infty} = 0.5$ et le critère du faible gain permet également de conclure.

Notes bibliographiques

Les ouvrages recommandés en bibliographie ont été regroupés suivant des catégories ayant trait à leur nature ou au sujet traité si ce dernier est particulièrement pertinent pour un des sujets du chapitre.

- Article fondateur : article de H. Nyquist dans [3]
- Manuels généraux : [19], [15], [6], [5], [14], [16], [9], [10] ;
- Manuels modernes : [8], [21], [1], [17], [12], [2], [20] ;
- Analyse complexe : [4], [11]
- Loopshaping : [8], [7], [12], [20] ;
- Critère de Nyquist multivariable : [7], [13], [18] ;
- Fonctions de sensibilité : [6], [8], [20] ;
- Théorème du faible gain : [13], [18], [8].

Références

- [1] A. Abramovici and J. Chapsky. *Feedback control systems : A fast-track guide for scientists and engineers*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, USA, 2000.
- [2] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems*. Birkhäuser, Boston, Massachusetts, USA, 2006.
- [3] T. Basar, editor. *Control theory, twenty-five seminal papers (1932-1981)*. IEEE press, Piscataway, New Jersey, USA, 2000.
- [4] B. Chabat. *Introduction à l'analyse complexe, Tome 1 et 2*. Editions MIR, Moscou, USSR, 1985.
- [5] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern control systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [6] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeni. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2009.
- [7] B. Friedland. *Control system design*. Dover publications, Mineola, New York, USA, 2009.
- [8] T. Glad and L. Ljung. *Control theory : Multivariable and nonlinear methods*. Taylor and Francis, New York, New York, USA, 2000.

- [9] G.C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control system design*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.
- [10] B. C. Kuo and F. Golnaraghi. *Automatic control systems*. John Wiley, New York, New York, USA, 2003.
- [11] Y. K. Kwok. *Applied complex variables*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [12] J. R. Leigh. *Control theory*. MPG books LTD, Bodmin, UK, 2004.
- [13] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust process control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1989.
- [14] A. G. O. Mutambara. *Design and analysis of control systems*. CRC press, Boca Raton, Florida, USA, 1999.
- [15] K. Ogata. *Modern control engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1990.
- [16] W. J. Palm. *Modeling, analysis and control of dynamical systems*. John Wiley, New York, New York, USA, 2000.
- [17] M. Schetzen. *Linear time-invariant systems*. John Wiley, New York, New York, USA, 2003.
- [18] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control*. John Wiley, New York, New York, USA, 1996.
- [19] Y. Takahashi, M. J. Rabins, and D. M. Auslander. *Control and dynamic systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, USA, 1970.
- [20] D. Xue, Y. Chen, and D. P. Atherton. *Linear feedback control : Analysis and design with MATLAB®*. Advances in design and control. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 2007.
- [21] H. Özbay. *Introduction to feedback control theory*. CRC press, New York, New York, USA, 2000.