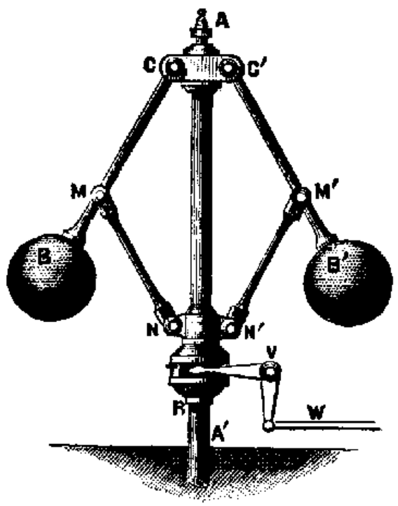
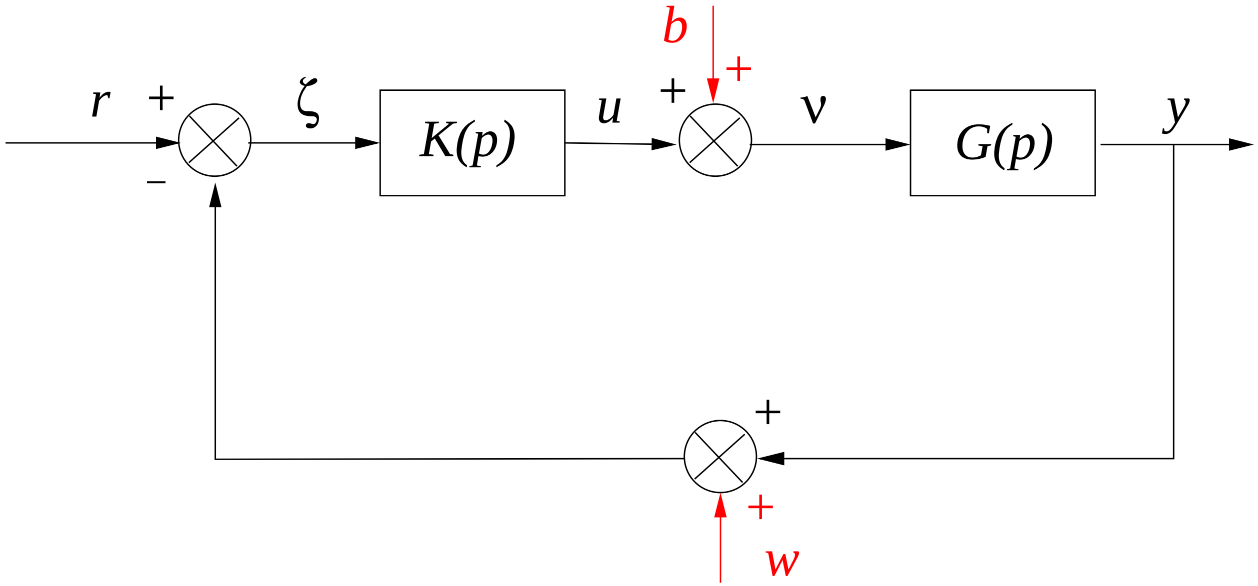
Représentation et analyse des systèmes linéaires

PC 7

Performance des systèmes bouclés





- Relation 1 : $y(p) = S(p)G(p)b(p) + T(p)(r(p) - w(p))$
- Relation 2 : $\epsilon(p) = S(p)r(p) - S(p)G(p)b(p) + T(p)w(p)$
- Relation 3 : $u(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p)$
- Relation 4 : $\nu(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p)$

- Pour que b ait peu d'influence sur y : $|G(j\omega)S(j\omega)| \ll 1$
- Pour que b ait peu d'influence sur ν : $|S(j\omega)| \ll 1$

$\underline{\omega < \omega_b}$

$$|S(j\omega)| \ll 1$$

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$$

$$|T(j\omega)| \sim 1$$

$y \sim (r - w)$ et $\epsilon \sim w$:

$$\boxed{\omega_b < \omega_h}$$

$u \sim G^{-1}(r - w) - b$ et $\nu \sim G^{-1}(r - w)$:

$$\boxed{\omega_b < \omega_{co}}$$

- Pour que w ait peu d'influence sur y : $|T(j\omega)| \ll 1$
- Pour que w ait peu d'influence sur ν : $|K(j\omega)S(j\omega)| \ll 1$

$\underline{\omega > \omega_h}$

$$|S(j\omega)| \sim 1$$

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$$

$$|T(j\omega)| \ll 1$$

$y \sim Gb$ et $\epsilon \sim r - Gb$:

$$\boxed{\omega_{co} < \omega_h}$$

$u \sim K(r-w)$ et $\nu \sim b + K(r-w)$:

$$\boxed{\omega_b < \omega_h}$$

$\underline{\omega < \omega_b}$

$$|S(j\omega)| \ll 1 \qquad |K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1 \qquad |T(j\omega)| \sim 1$$

➥ Erreur :

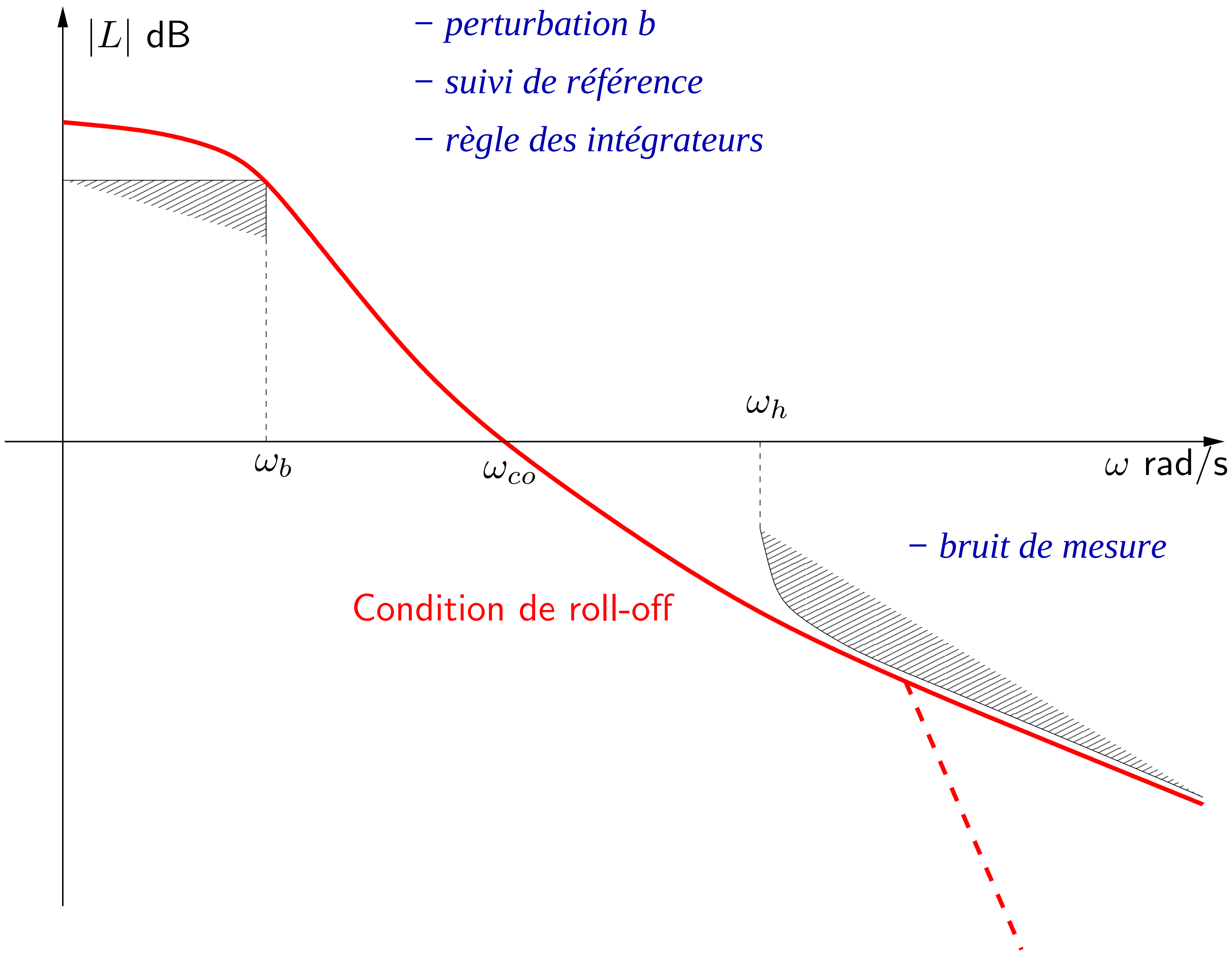
$$\epsilon(p) = S(p)r(p) = \frac{r(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

➥ Th. de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \epsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\epsilon(p) = \lim_{p\to 0} pS(p)r(p)$$

❒ **Théorème 1** : *règle des intégrateurs*

Afin d'annuler l'erreur en régime permanent à une entrée transitoire $r(p)$, la boucle ouverte doit comprendre au moins autant d'intégrateurs que le signal $r(p)$ en contient



$|L|$ dB
– *perturbation b*
– *suivi de référence*
– *règle des intégrateurs*
ω_h
ω_b
ω_{co}
ω rad/s
– *bruit de mesure*
Condition de roll-off

$$\omega \leq \omega_b \quad \text{et} \quad \omega \geq \omega_h \quad + \quad \text{pente arbitraire}$$

$\omega_{co} \leq \omega \leq \omega_{-180^o}$:

- Impératif de stabilité :

$$|L(j\omega_{-180^o})| < 1$$

- Impératif de rapidité :

$$\omega_{co} \text{ et } \omega_{-180^o} \text{ grandes}$$

❒ **Théorème 2** : *condition de roll-off*

Une fonction de transfert ayant une pente de -20 dB/dec *est dite avoir un roll-off de* 1*. La condition de roll-off est alors que* $L(j\omega)$ *doit avoir un roll-off de* 1 *dans la région de* ω_{co} *et au minimum de* 2 *au delà de cette pulsation.*

1- Spécification du nombre d'intégrateurs dans $L(p)$ par la règle des intégrateurs

2- Spécification de la pente de la courbe de gain en boucle ouverte $|L(j\omega)|$ sur certaines plages de fréquence :

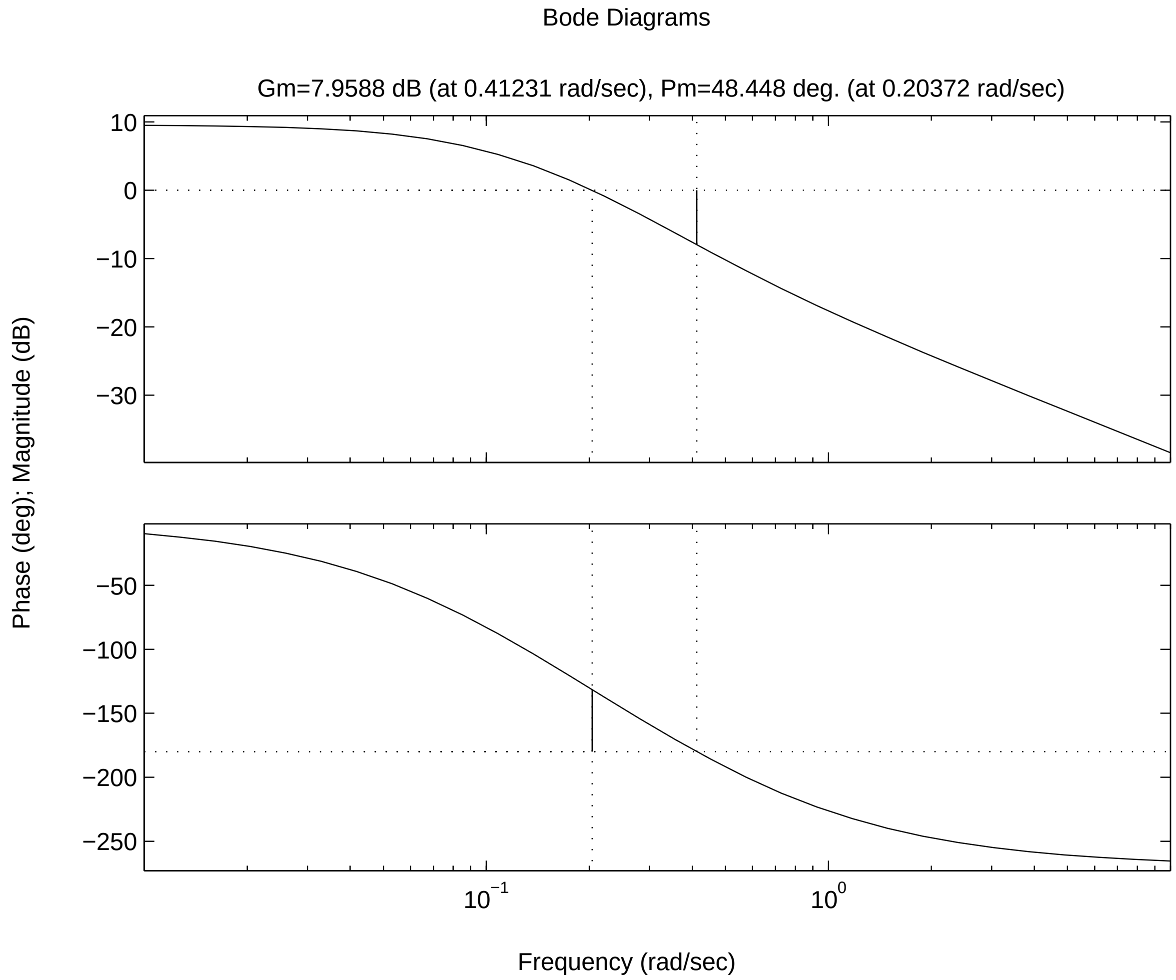
- pente de -20 dB/dec autour de ω_{co} pour satisfaire la condition de roll-off
- pente supérieure à -20 dB/dec aux hautes fréquences ($\omega \geq \omega_h$) pour le fitrage des bruits
- pente aux basses fréquences, ($\omega \leq \omega_b$) définie par le modèle de la perturbation $b(p)$

3- Spécification d'une pulsation de coupure ω_{co} pour répondre aux impératifs de stabilité en termes de marge de phase et de gain

➥ Synthèse par inversion du modèle :

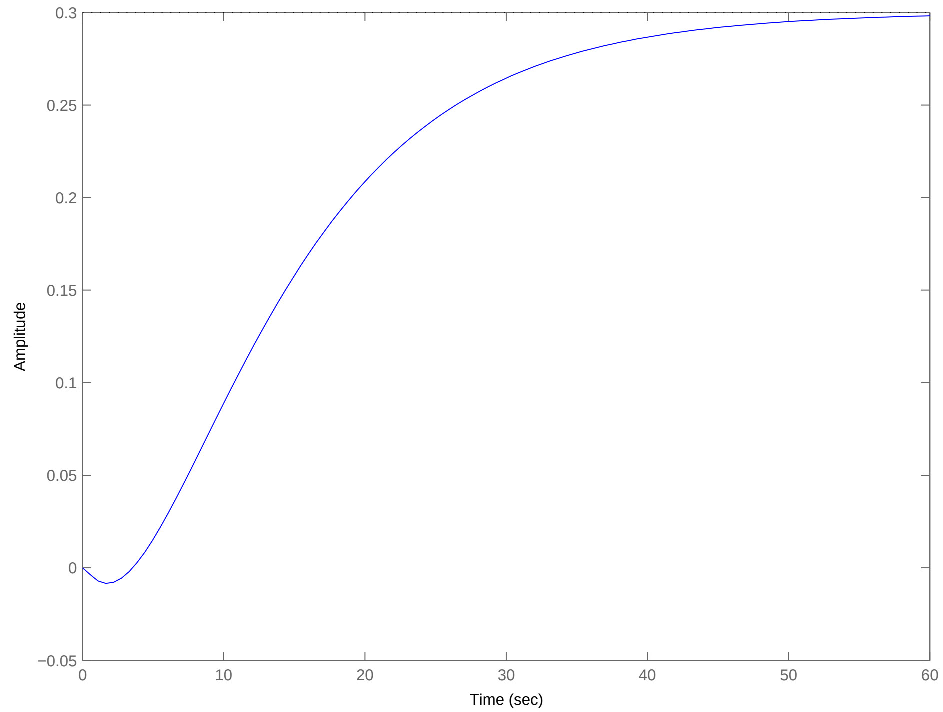
$$K(p) = L(p)G^{-1}(p)$$

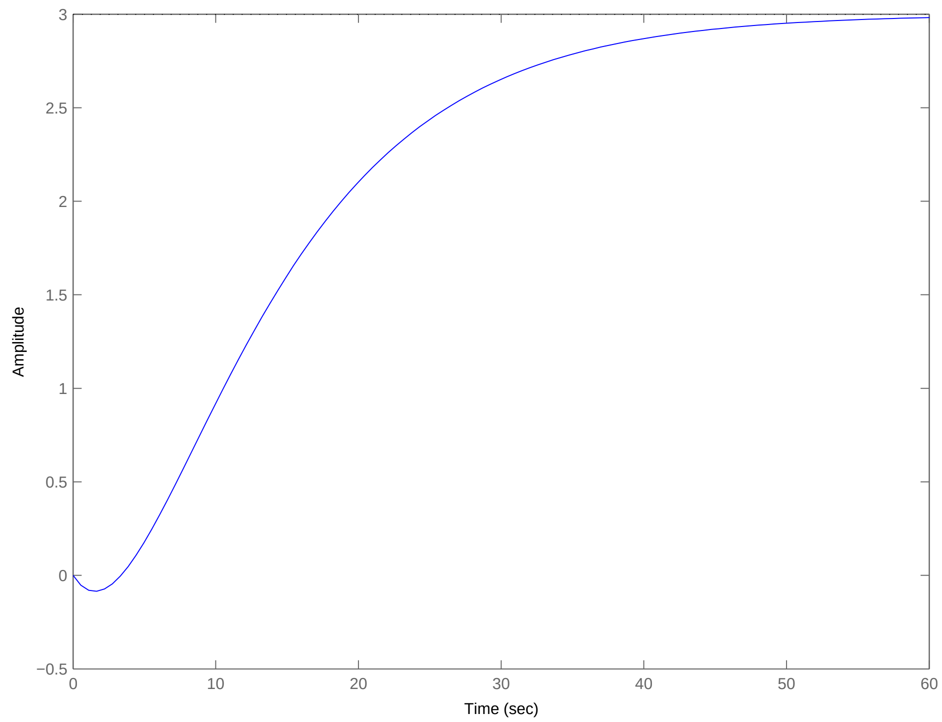
$$G(p) = \frac{3(-2p+1)}{(5p+1)(10p+1)}$$



- Non minimum de phase, $z = 0.5$
- Stable en boucle ouverte : $p_1 = -1/5$ et $p_2 = -1/10$ correspondant aux pulsations de cassure caractéristiques $\omega_{p_1} = 0.2$ rad/s et $\omega_{p_2} = 0.1$ rad/s

Réponses temporelles à un échelon sur la perturbation et sur la consigne en b.o.





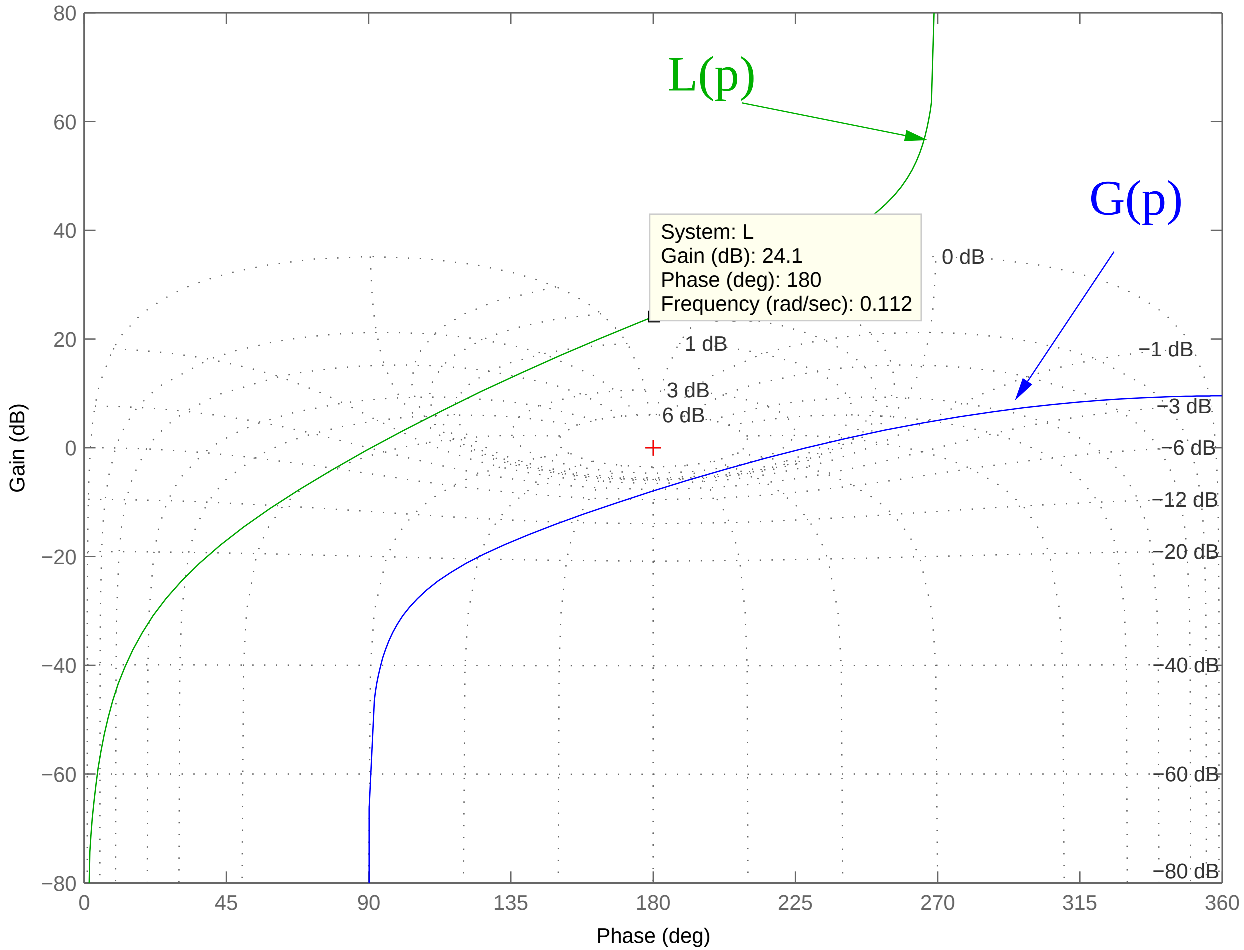
Spécifications

- **Précision :**
  Le système corrigé ne doit pas présenter d'erreur en régime permanent à une réponse en échelon de position
- **Rejet de perturbation :**
  Le modèle de la perturbation étant un premier ordre donné par :
  $$b(p) = G_b(p)a(p) = \frac{0.5}{p+0.5}a(p)$$
  La sortie doit revenir à zéro le plus rapidement possible si $a(p) = 1/p$
- **Filtrage des bruits :**
  Le bruit de mesure intervenant au delà de 0.5 Hz doit être filtré

Première spécification

Il est nécessaire d'ajouter une intégration dans la boucle ouverte :

$$L(p) = \frac{3(-2p+1)}{p(5p+1)(10p+1)}$$



- La condition de roll-off aux hautes fréquences est vérifiée
- Pente aux hautes fréquences : $\omega_h = 3$ rad/s

  Ajout éventuel d'un pôle dont la pulsation de cassure est supérieure à 3 rad/s
- Pente aux basses fréquences :

  Actuellement : -20 dB/dec

  Analyse de $b(p)$:

$$|G_b(j\omega)| = \frac{0.5}{\sqrt{0.025 + \omega^2}}$$

  $\omega = 0.5$ rad/s est la pulsation de coupure pour le modèle de perturbation i.e. pour $\omega > 0.5 \text{ rad/s}$ alors $|G_b(j\omega)| < 0$ dB :

$$\boxed{\omega_b = 0.5 \text{ rad/s}}$$

- Pente aux pulsations intermédiaires : de -40 dB/dec à -60 dB/dec

  Déplacement des deux pôles de $G(p)$:

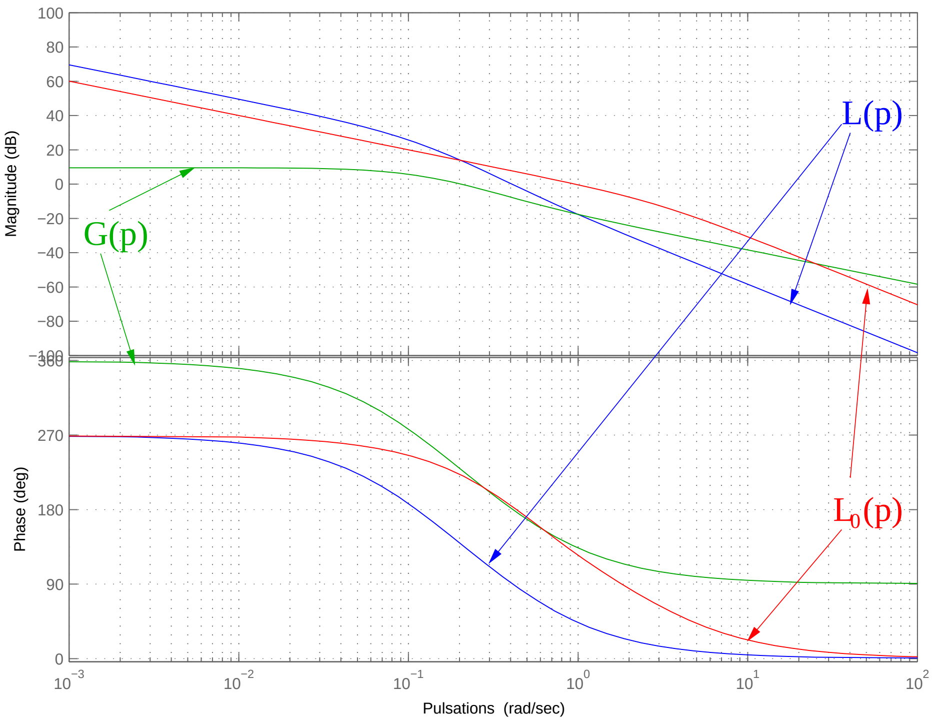
$$L(p) = \frac{K(-2p+1)}{p(\alpha p+1)(\beta p+1)}$$

On choisit $\alpha = 2$, $\omega_{p_\alpha} = 0.5$ rad/s et $\beta = 0.33$, $\omega_{p_\beta} = 3$ rad/s et un roll-off de 2 au delà

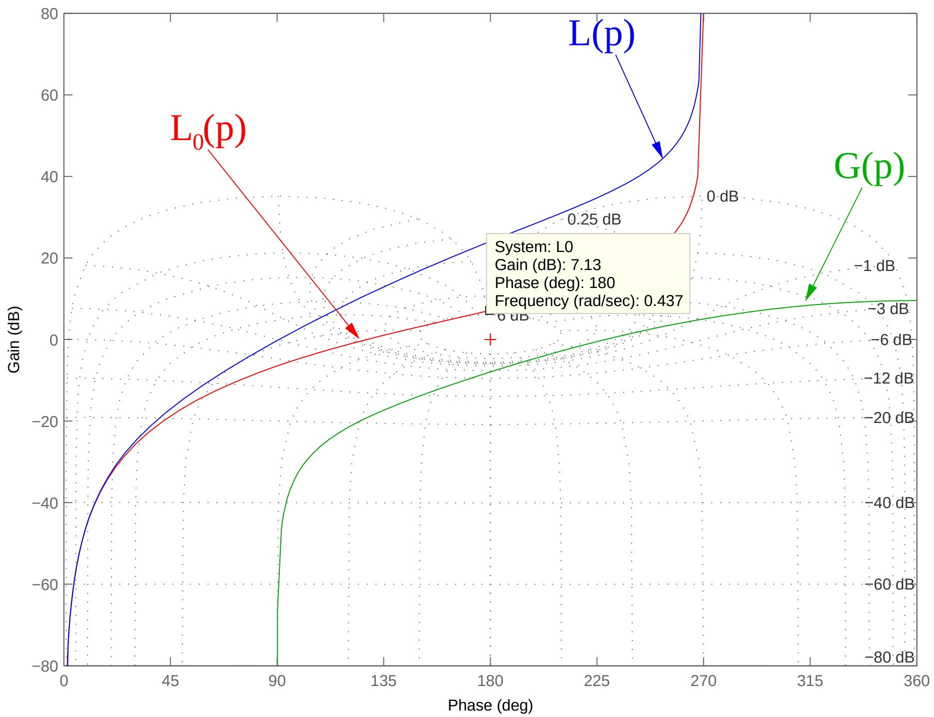
$$L_0(p) = \frac{-2p+1}{p(2p+1)(0.33p+1)}$$

$$M_\Phi = -52^o \qquad \omega_{co} = 0.95 \text{ rad/s}$$

$$K_g = -0.44 \qquad \omega_{-180^o} = 0.43 \text{ rad/s}$$



Magnitude (dB)
Phase (deg)
Pulsations (rad/sec)
L(p)
G(p)
$L_0(p)$



L(p)
$L_0(p)$
G(p)
System: L0
Gain (dB): 7.13
Phase (deg): 180
Frequency (rad/sec): 0.437
Gain (dB)
Phase (deg)

Troisième spécification

➥ Introduction d'un gain : diminution de la pulsation de coupure

$$K = 0.15 \qquad \omega_{co} = 0.2 \text{ rad/s}$$

➥ Fonction de transfert en boucle ouverte :

$$L_f(p) = \frac{0.15(-2p+1)}{p(2p+1)(0.33p+1)}$$

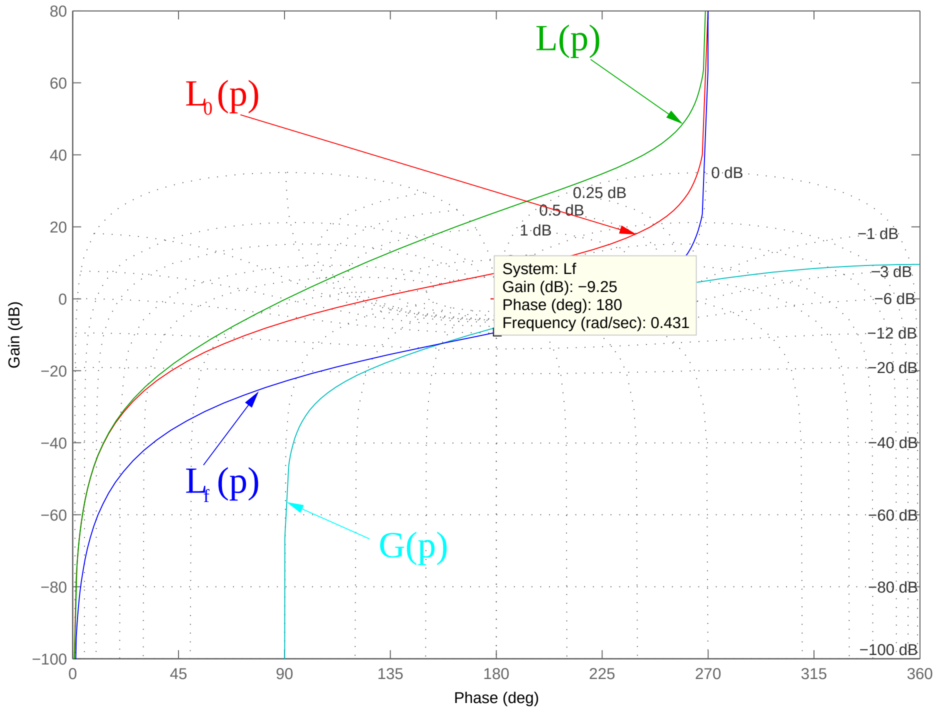
➥ Marges de phase et de gain :

$$M_\Phi = 54^o \quad \omega_{co} = 0.15 \text{ rad/s}$$

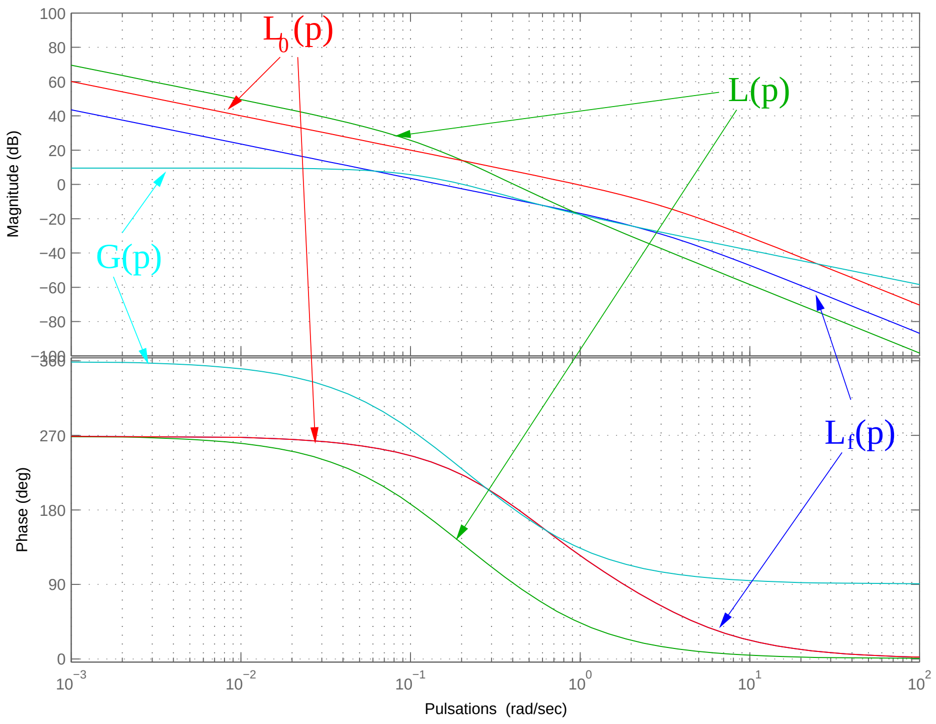
$$K_g = 2.92 \quad \omega_{-180^o} = 0.44 \text{ rad/s}$$

➥ Correcteur :

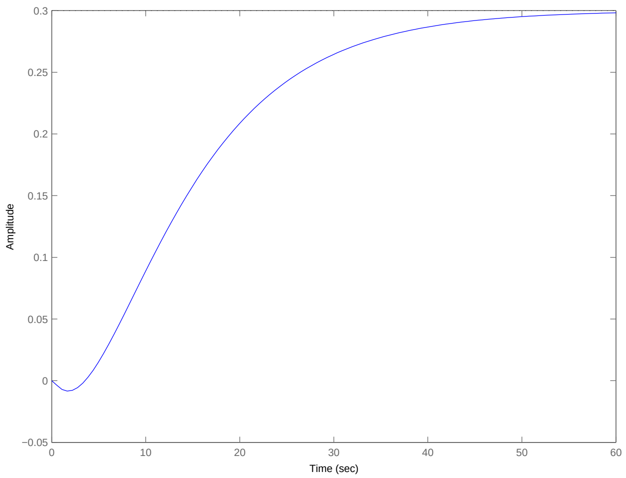
$$\boxed{K(p) = \frac{0.05(10p+1)(5p+1)}{p(2p+1)(0.33p+1)}}$$

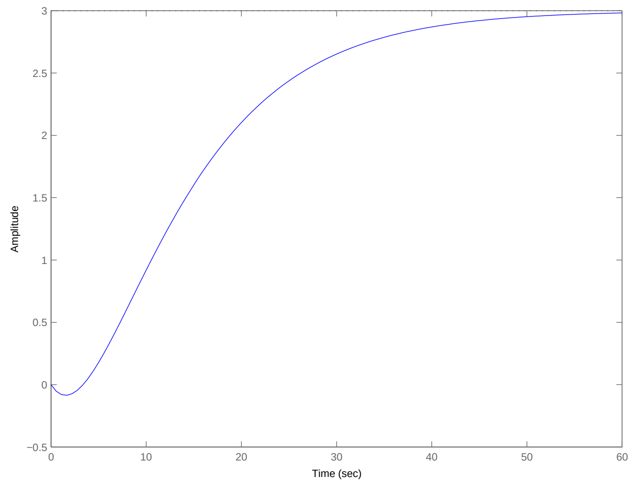


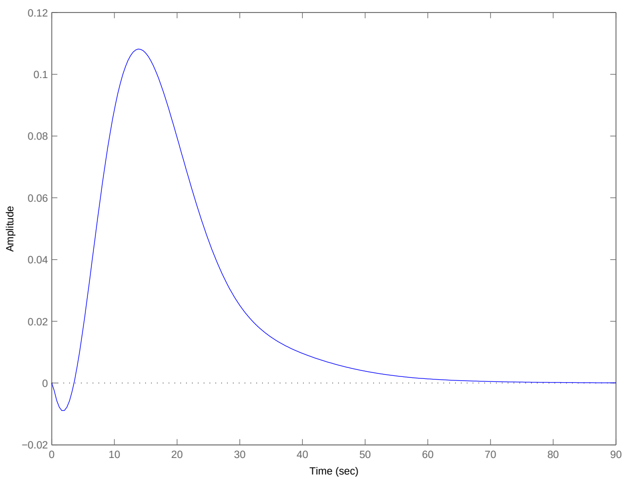
L(p)
$L_0(p)$
$L_f(p)$
G(p)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
−1 dB
−3 dB
−6 dB
−12 dB
−20 dB
−40 dB
−60 dB
−80 dB
−100 dB
System: Lf
Gain (dB): −9.25
Phase (deg): 180
Frequency (rad/sec): 0.431
Gain (dB)
Phase (deg)

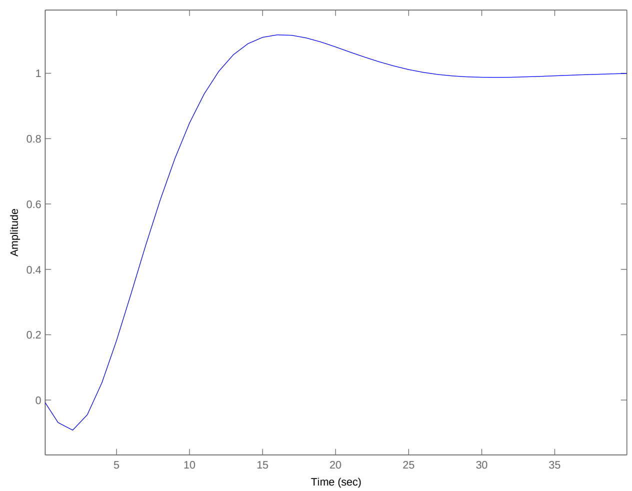


$L_0(p)$
L(p)
G(p)
$L_f(p)$
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Pulsations (rad/sec)


0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
Amplitude
0
10
20
30
40
50
60
Time (sec)


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
Amplitude
0
10
20
30
40
50
60
Time (sec)


0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
Amplitude
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Time (sec)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
5
10
15
20
25
30
35
Time (sec)