

Représentation et analyse des systèmes linéaires

Petite classe No 6

1 Compléments sur l'analyse fréquentielle des systèmes bouclés

1.1 Stabilité relative et marges de stabilité

Dans l'analyse qualitative que l'on peut faire d'un système bouclé, la stabilité absolue telle qu'elle peut être attestée par le critère de Nyquist n'est pas l'unique indice pertinent. La manière dont un système est stable est également primordiale et conduit à l'étude de **la stabilité relative** du système bouclé. Dans le domaine temporel, cette notion est reliée aux paramètres tels que le dépassement maximal et l'amortissement. Dans le domaine fréquentiel, le pic de résonance M_r peut également servir à cet effet. Un autre moyen de mesurer le degré de stabilité relative dans le domaine fréquentiel consiste à mesurer la distance du lieu de transfert en boucle ouverte au **point critique** défini comme le point d'affixe $(-1, j0)$ dans le plan de Nyquist. Cette distance peut être mesurée dans deux directions différentes donnant lieu à la définition de la marge de phase et de la marge de gain.

1.1.1 Marge de phase et marge de gain

Déf. 1.1 (marge de phase) La marge de phase est définie par :

$$M_\Phi = \Phi(\omega_{co}) + 180^\circ \quad (1)$$

où ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB, (gain-crossover frequency), de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$L(j\omega_{co}) = 0 \text{ dB} \quad (2)$$

Déf. 1.2 (marge de gain) La marge de gain se définit par :

$$K_g = \frac{1}{|L(j\omega_{-180^\circ})|} \quad K_g \text{ dB} = -20 \text{Log}_{10}|G(j\omega_{-180^\circ})| \quad (3)$$

où ω_{-180° est la pulsation pour laquelle la phase de la boucle ouverte vaut -180° , (phase-crossover frequency).

$$\text{Arg}[L(j\omega_{-180^\circ})] = -180^\circ \quad (4)$$

Remarques 1.1 Pour un système à minimum de phase, cela indique de combien le gain peut être augmenté avant de devenir instable. La marge de phase et de gain mesurent la distance du lieu de Nyquist au point critique -1 .

Ces indicateurs sont représentés graphiquement dans les différents plans.

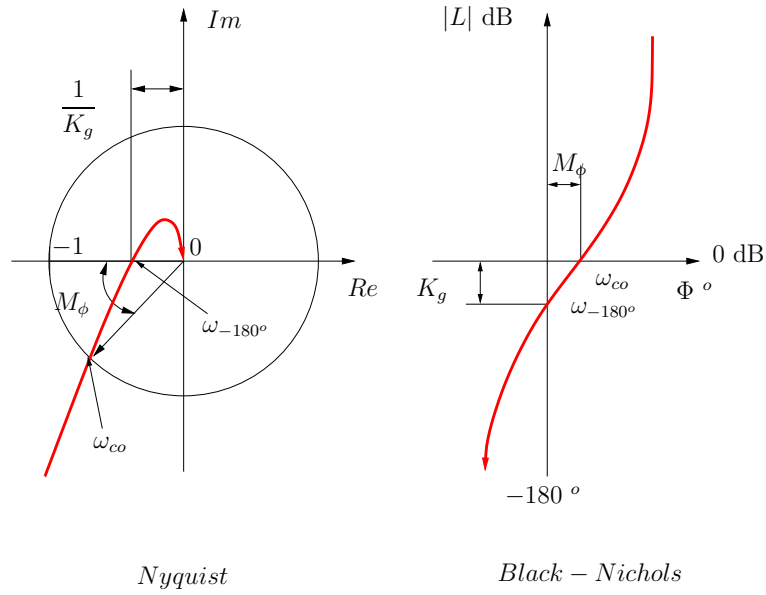


FIGURE 1 – Marges de gain et de phase dans les plans de Nyquist et de Black

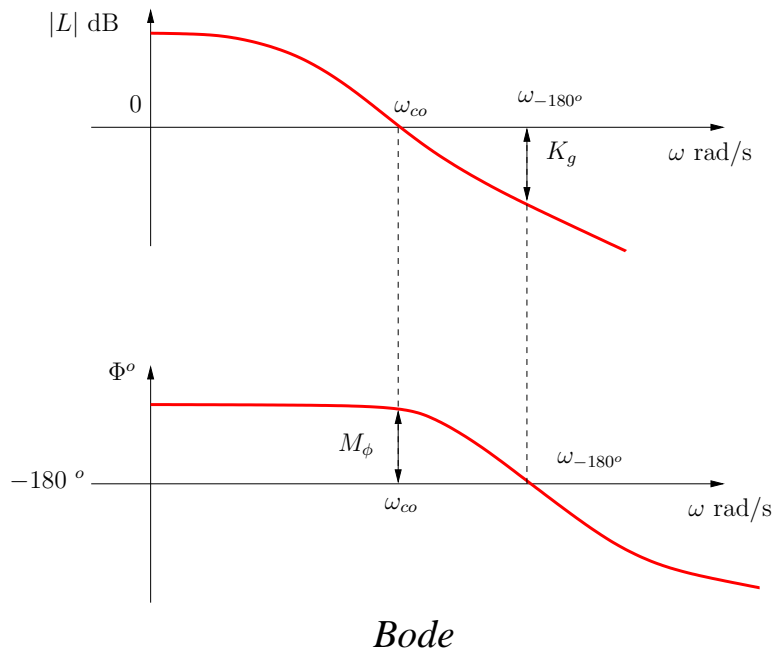


FIGURE 2 – Marges de gain et de phase dans le plan de Bode

1.1.2 La marge de module

Les deux indicateurs précédents permettent de juger de la robustesse en stabilité dans deux directions précises. Une mesure plus objective est définie par **la marge de module** (vector margin) introduite par O.J.M. Smith en 1958.

Déf. 1.3 (marge de module) La marge de module est la plus petite distance du point critique -1 au lieu de transfert en boucle ouverte. C'est donc le rayon du cercle de centre le point critique $(-1, 0)$ et tangent au lieu de transfert.

$$\Delta M = \frac{1}{M_S} = \frac{1}{\max_{\omega} |S(j\omega)|} = \min_{\omega} \frac{1}{|S(j\omega)|} \quad (5)$$

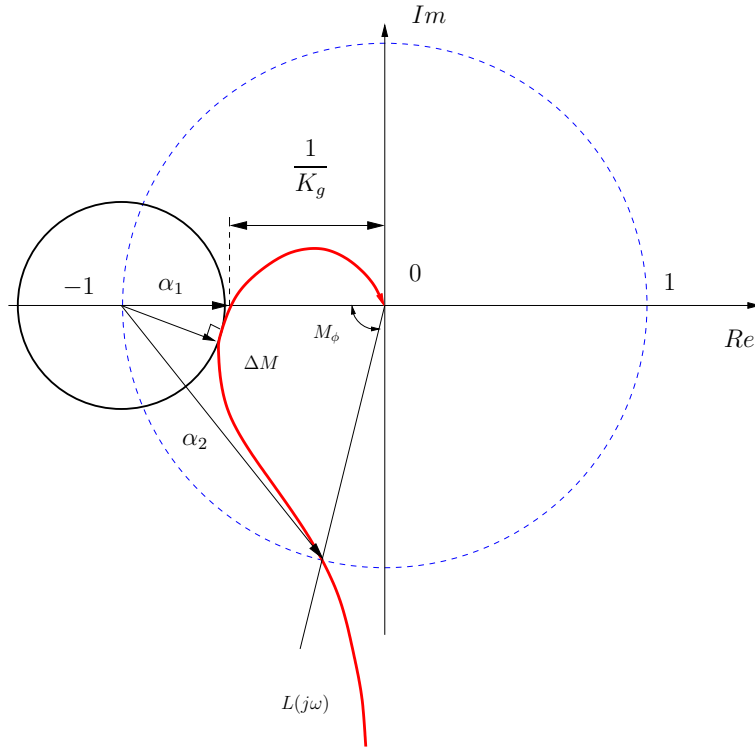


FIGURE 3 – Marge de module dans le plan de Nyquist

A partir de la figure 3, des relations simples peuvent être déduites pour redéfinir les marges de gain et de phase.

$$K_g = \frac{1}{1 - \alpha_1} \quad M_\Phi = 2 \sin^{-1} \frac{\alpha_2}{2}$$

1.1.3 La marge complexe

La marge de module permet de travailler directement à partir de la fonction de sensibilité S . Il est également possible de définir un indicateur différent de stabilité relative qui est directement relié aux marges de gain et de phase et qui est construit à partir de la fonction de sensibilité complémentaire T .

Déf. 1.4 (La marge complexe) La marge complexe est définie par :

$$\Delta T = \frac{1}{\max_{\omega} |T(j\omega)|} = \min_{\omega} \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad (6)$$

La marge complexe est illustrée graphiquement dans le plan de Nyquist. Noter que pour la visualiser correctement, il est nécessaire de tracer la réponse fréquentielle **inverse** de la boucle ouverte L .

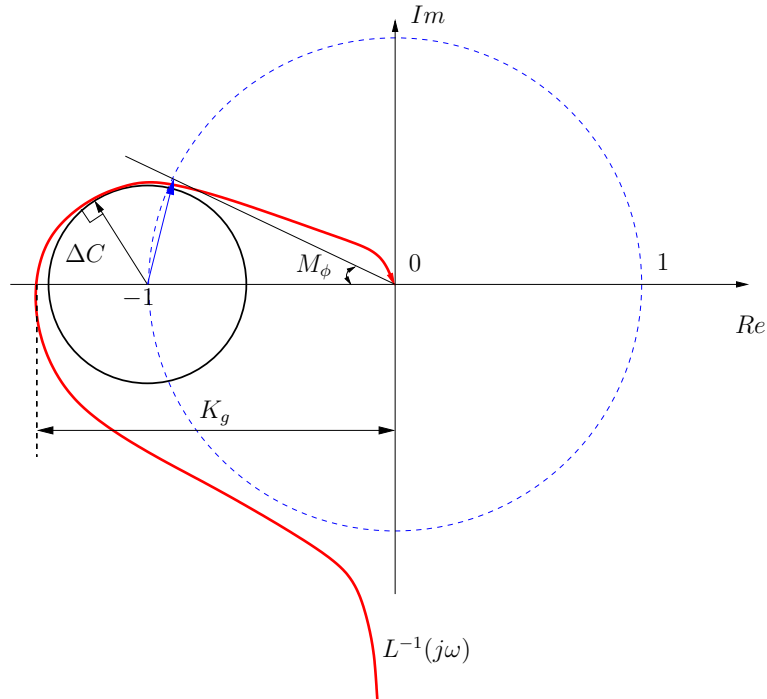


FIGURE 4 – Marge complexes dans le plan de Nyquist

Les relations avec les marges de gain et de phase sont données alors par :

$$K_g \geq 1 + \Delta C \quad M_\phi \geq 2 \sin^{-1} \frac{\Delta C}{2} \quad (7)$$

D'autres indicateurs fréquentiels sont également très importants à définir.

1.2 Pulsation et amplitude de résonance

De même que pour les systèmes du second ordre, il est possible de caractériser la réponse fréquentielle du système en boucle fermée.

Déf. 1.5 (pulsation de résonance) La pulsation de résonance est la pulsation ω_r telle que :

$$\boxed{\omega_r = \text{Arg}[\max_{\omega}(L(j\omega))]} \quad (8)$$

Déf. 1.6 (amplitude de résonance) L'amplitude de résonance est définie par :

$$\boxed{M_r = \max_{\omega} |F(j\omega)| = |F(j\omega_r)|} \quad (9)$$

où $F(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

1.3 Abaque des M-cercles et des N-cercles

Il s'agit de construire un abaque permettant de connaître la boucle fermée à partir du tracé du lieu de transfert en boucle ouverte. Nous examinons en premier lieu le cas dans le plan de Nyquist. Pour simplifier, nous supposons que l'asservissement est à retour unitaire.

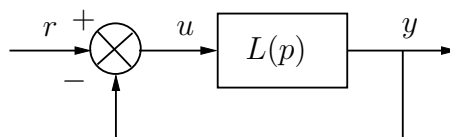


FIGURE 5 – Asservissement à retour unitaire

où l'on suppose que $G(p)$ est telle que la boucle fermée $\frac{G(p)}{1+G(p)}$ est stable.

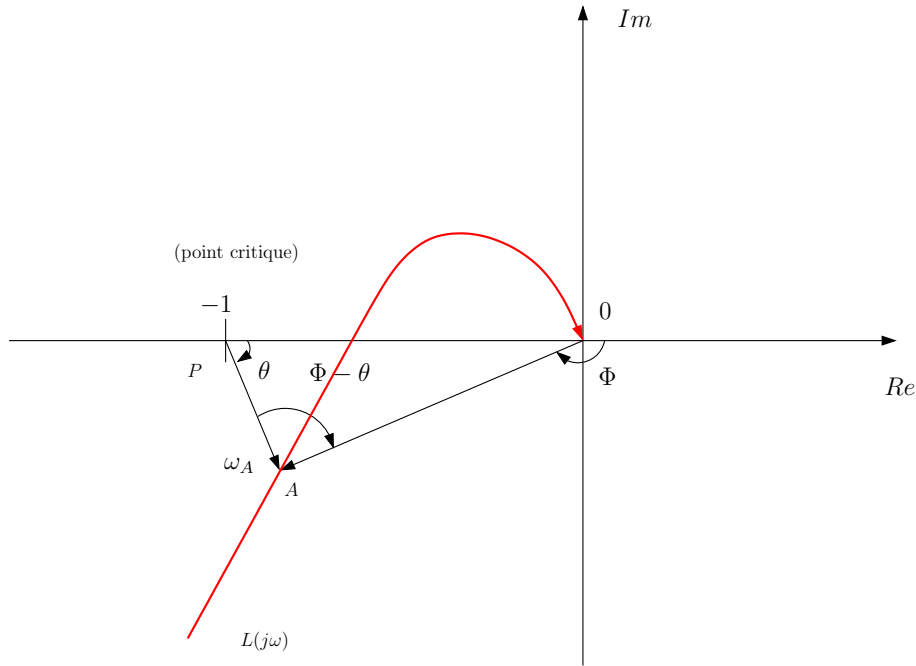


FIGURE 6 – Lieu de Nyquist

\vec{OA} représente $G(j\omega_1)$ où ω_1 est la pulsation au point A.

$$\begin{aligned} |\vec{OA}| &= |G(j\omega_1)| \\ \Phi(G(j\omega_1)) &= \Phi \end{aligned} \quad (10)$$

\vec{PA} représente $1 + G(j\omega_1)$, d'où,

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{OA}|}{|\vec{PA}|} &= \frac{|G(j\omega_1)|}{|1 + G(j\omega_1)|} \\ \alpha - \theta &= \Phi \left(\frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

A partir de la connaissance du lieu de transfert en boucle ouverte $G(j\omega)$, il s'agit de calculer pour chaque pulsation donnée, l'amplitude et la phase de la boucle fermée $\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$. On souhaite donc tracer dans le plan de Nyquist, les lieux d'amplitude constante et de phase constante en boucle fermée. On note,

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = Me^{j\alpha} \quad G(j\omega) = X + jY \quad (12)$$

où M est le module en boucle fermée et α la phase en boucle fermée.

Déf. 1.7 (M-cercles et N-cercles) - Les lieux d'amplitude constante en boucle fermée sont appelés les **M-cercles** et ont pour équation :

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} \quad (13)$$

- Les lieux de phase constante en boucle fermée sont appelés **N-cercles** et ont pour équation :

$$(X + 1/2)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2} \quad (14)$$

où $N = \tan\alpha$.

A partir de ces M-cercles et de ces N-cercles, il est possible de tracer des abaques utilisés afin de déterminer l'amplitude et la phase en boucle fermée à partir de la connaissance du lieu de transfert de la boucle ouverte tracé sur les abaques. L'intersection de $G(j\omega)$ avec les M-cercles et les N-cercles donnent les valeurs de M et N en des pulsations données comme il est indiqué par les figures suivantes. Ainsi, le pic de résonance M_r est déterminé comme le plus petit M-cercle tangent avec le lieu de transfert en boucle ouverte alors que la pulsation de résonance ω_r correspond à la pulsation de point d'intersection. La bande passante à -3 dB du système en boucle fermée est la pulsation du point d'intersection du lieu de transfert avec le M-cercle $M = -0.707$.

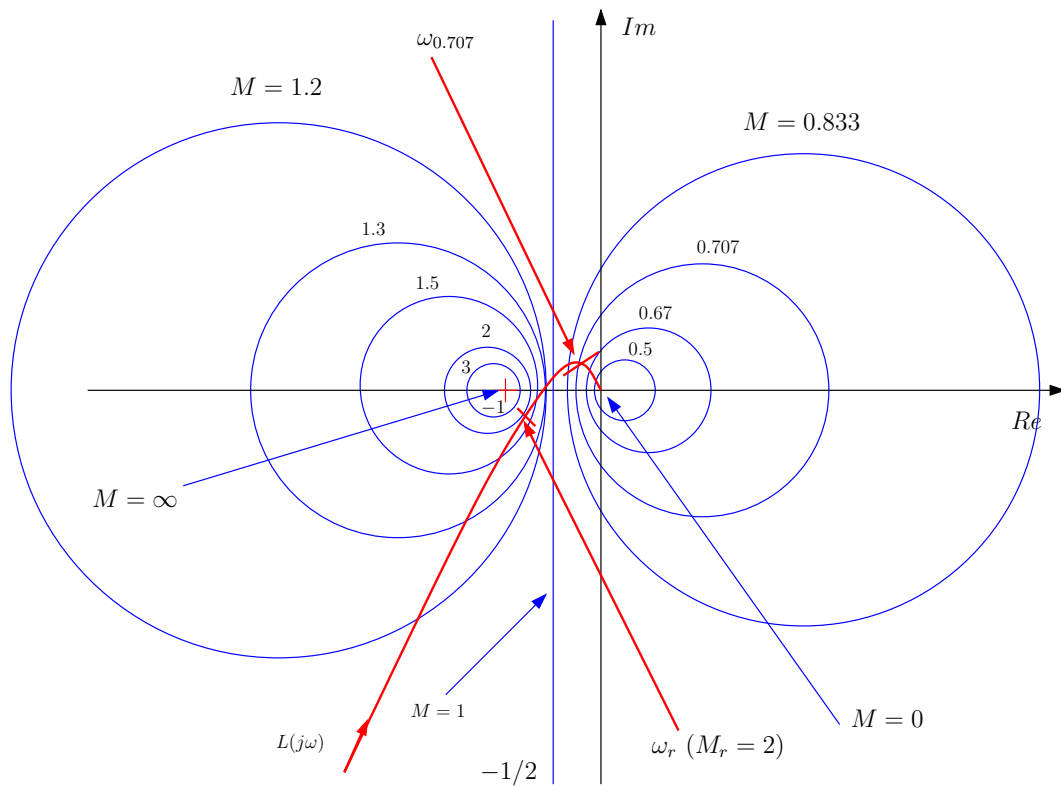


FIGURE 7 – Abaque des M-cercles

L'utilisation de l'abaque des N-cercles est complètement identique à celui des M-cercles et n'est donc pas détaillée ici. Un exemple d'abaque est donné à la figure 8.

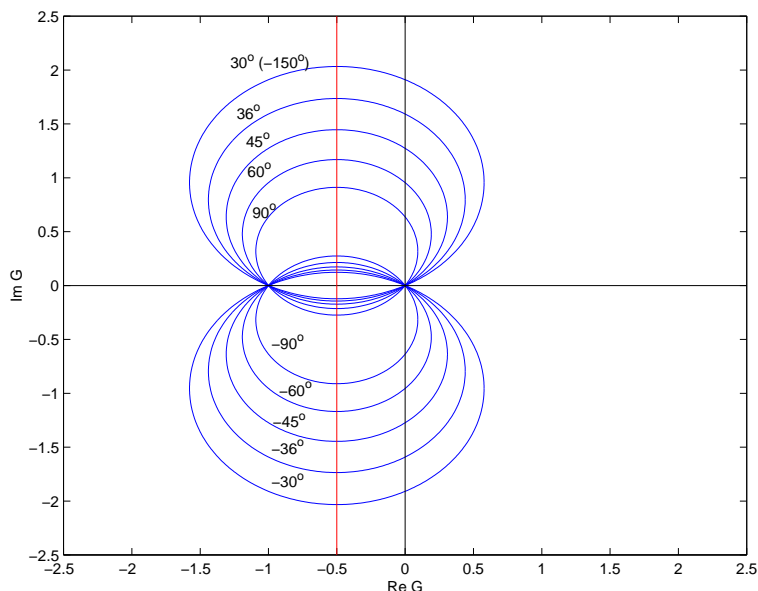


FIGURE 8 – Abaque des N-cercles

1.4 Abaque de Hall-Nichols

Un inconvénient majeur de l'utilisation des abaques des M-cercles et des N-cercles est que la forme générale de la courbe du lieu de transfert dans le plan de Nyquist n'est généralement pas conservée lors de modifications mêmes élémentaires de la fonction de transfert, (changement de la valeur du gain par exemple). De ce fait, si l'on souhaite utiliser un abaque en vue de la synthèse d'un correcteur venant modifier la boucle ouverte, il est plus pratique de travailler dans le plan de Black et d'utiliser l'abaque de Hall-Nichols. De la même manière que des abaques ont été développés dans le plan de Nyquist pour passer de la boucle ouverte à la boucle fermée, il est ainsi possible de tracer un abaque dans le plan de Black-Nichols afin de calculer le module et la phase de la boucle fermée d'un asservissement à retour unitaire connaissant le lieu de transfert en boucle ouverte. Le principe est identique à celui permettant le tracé des M-cercles et des N-cercles et donnent les courbes tracées figure 9 qui forment **l'abaque de Hall**.

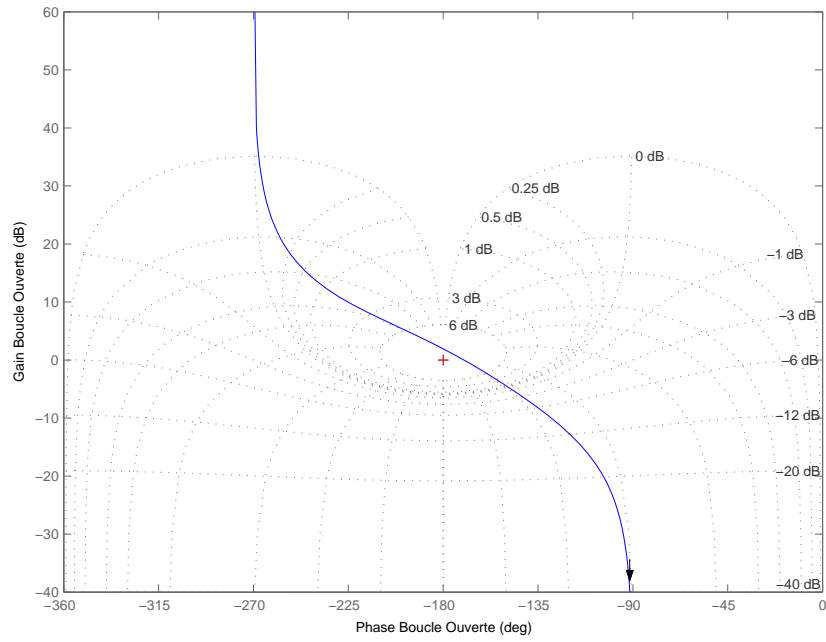
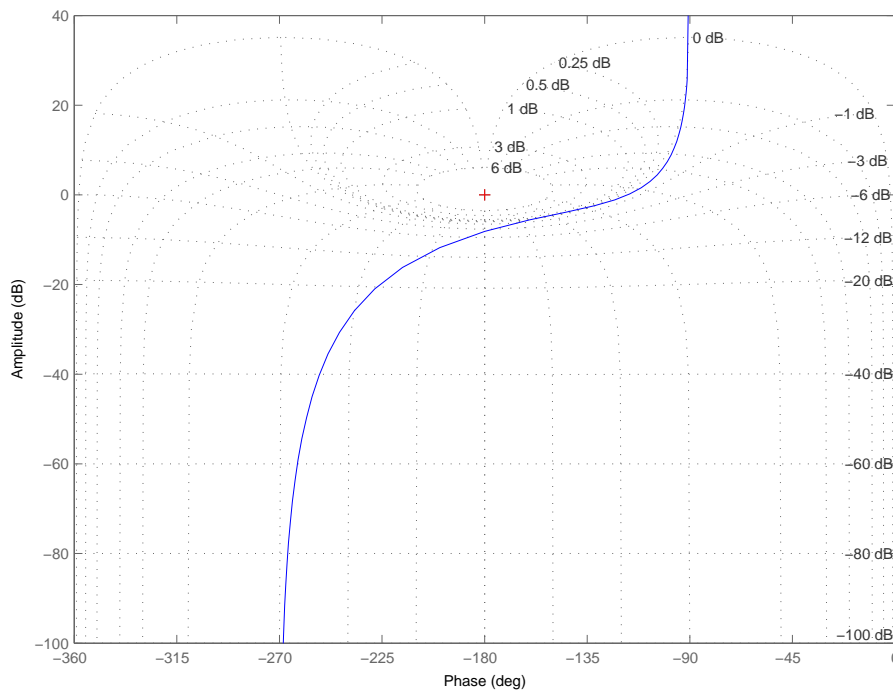


FIGURE 9 – Abaque de Hall

Soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{10K}{p(p^2 + 4p + 16)}$$

Le lieu de transfert de $G(p)$ est tracé dans l'abaque de Hall pour $K = 2.5$. Différentes valeurs de l'amplitude de la boucle fermée à retour unitaire peuvent ainsi être calculées.

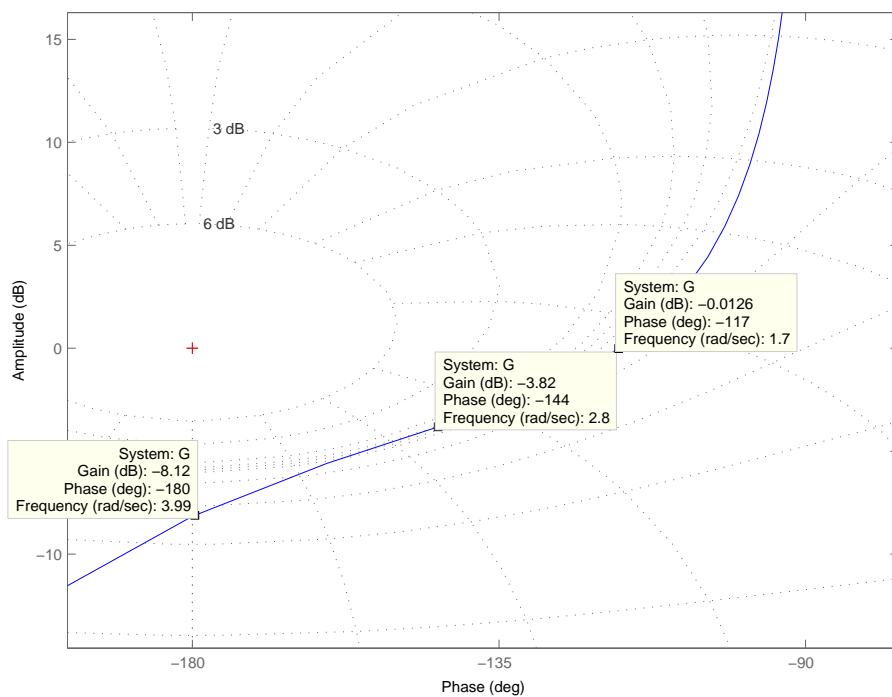


En produisant un zoom sur les fréquences intermédiaires, il est alors possible de calculer la marge de phase, la marge de gain, le coefficient de surtension qui est égal ici au pic de

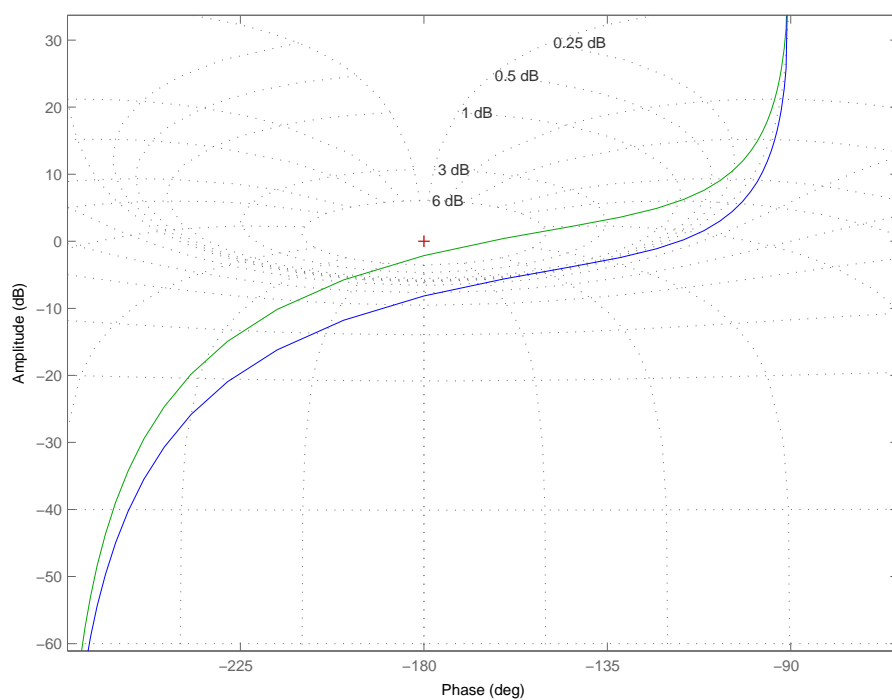
résonnance ainsi que la pulsation de résonnance.

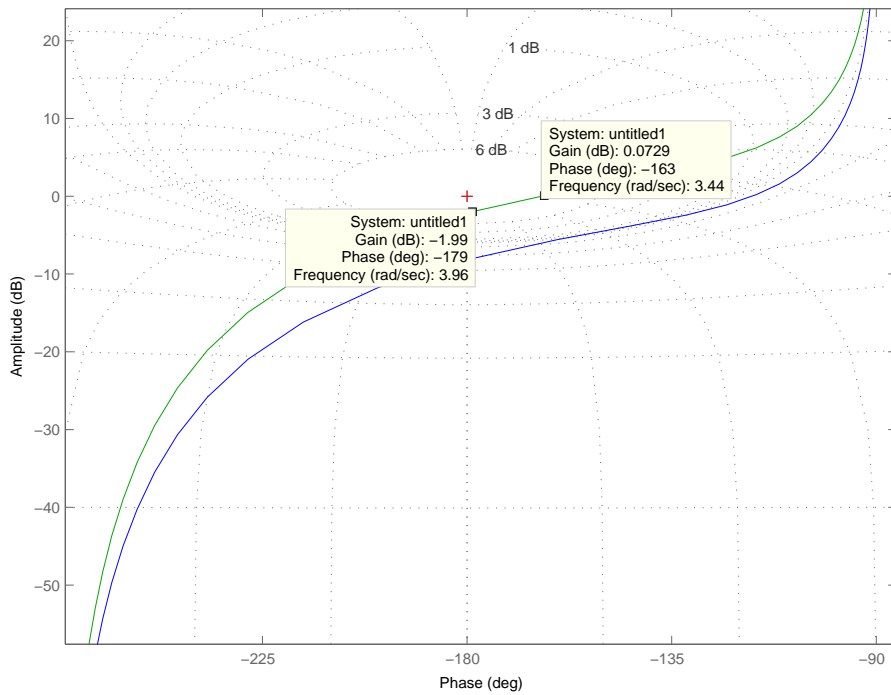
$$M_{\Phi} = 60 \text{ deg.} \quad \omega_{co} = 1.7 \text{ rad/s.} \quad K_g = 8 \text{ dB} \quad \omega_{-\pi} = 4 \text{ rad/s.}$$

$$M_r = 0.5 \text{ dB} \quad \omega_r = 2.8 \text{ rad/s.}$$



Un tracé identique est donné pour $K = 5$ où l'on peut voir l'effet de l'augmentation du gain sur le système en boucle fermée.





Remarques 1.2 Si l'asservissement n'est pas unitaire, il faut calculer,

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{1}{H(p)} \frac{G(p)H(p)}{1 + G(p)H(p)} \quad (15)$$

On trace alors $\frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$ que l'on translate de $\frac{1}{|H(j\omega)|}$ en gain et de $\text{Arg} \left[\frac{1}{H(j\omega)} \right]$ en phase.

2 Exercices

Exercice 1 :

Tracer dans le lieu de Nichols, le lieu de transfert en boucle ouverte des asservissements à retour unitaire dont la boucle ouverte est $G(p)$. Déterminer la marge de phase et de gain et déduire à l'aide de l'abaque de Hall, le tracé de la boucle fermée dans le lieu de Bode. On choisira $K = 1$.

$$1- \quad G(p) = \frac{K}{p(p+1)(2p+1)}$$

$$2- \quad G(p) = \frac{K}{p-1}$$

$$3- \quad G(p) = \frac{K(p^2 - 5p + 2)}{p(p^3 + 2p^2 + 2p + 10)}$$

$$4- \quad G(p) = \frac{K(p-2)}{p(p^2 - 1)}$$

$$5- \quad G(p) = \frac{10K(p+0.5)}{p^2(p+2)(p+10)}$$

$$6- \quad G(p) = \frac{K}{p(p+2)(p+10)}$$

$$7- \quad G(p) = \frac{K(1-p)}{(p+1)}$$

$$8- \quad G(p) = \frac{K(p^2 - 5p + 1)}{p(p+1)(p^2 + 4)}$$

$$9- \quad G(p) = \frac{K(p+1)}{p(p+2)(p+5)(p+15)}$$

Exercice 2 :

Soit le système en boucle fermée de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{10(p+1)}{(p+2)(p+5)}$$

- 1- Montrer que la réponse fréquentielle de ce système possède un pic de résonance et calculer M_r ainsi que ω_r .
- 2- Refaire la question en utilisant l'abaque de Hall-Nichols et la boucle ouverte en supposant que l'asservissement est à retour unitaire.

Exercice 3 :

On considère un système modélisé par un double intégrateur corrigé par un correcteur placé dans la chaîne directe et de fonction de transfert $K(p) = K(p+2)$. L'asservissement ainsi constitué est à retour unitaire.

- 1- Déterminer le gain K tel que la marge de phase est égale à 50 deg.
- 2- Pour cette valeur de K , quelle est la valeur de la marge de gain ?

Exercice 4 :

Tracer le lieu de transfert dans le plan de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$\frac{20(p+1)}{p(p+5)(p^2+2p+10)}$$

et déterminer la marge de phase et de gain.

Exercice 5 :

Un asservissement à retour unitaire a pour fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$.

$$G(p) = \frac{2.245}{p(p+1)(p+2)}$$

- 1- Tracer le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ dans l'abaque des M-cercles.
- 2- Déterminer la valeur de la pulsation de résonance ω_r et l'amplitude de résonance en boucle fermée M_r .

Exercice 6 :

Etant donné la fonction de transfert en boucle ouverte

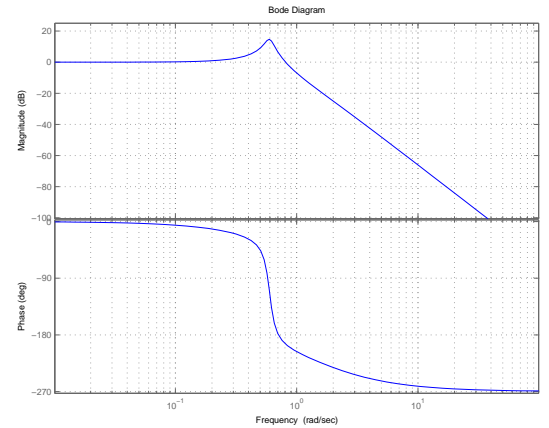
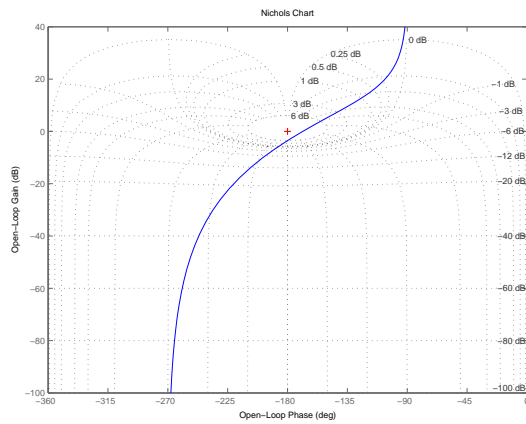
$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)(0.5p+1)}$$

Tracer sa réponse fréquentielle dans l'abaque de Hall-Nichols. Relever l'amplitude et la phase en boucle fermée afin de la tracer dans le plan de Bode.

3 Solution des exercices

Exercice 1 :

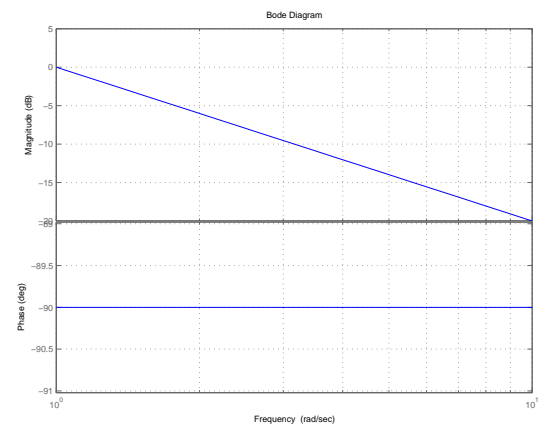
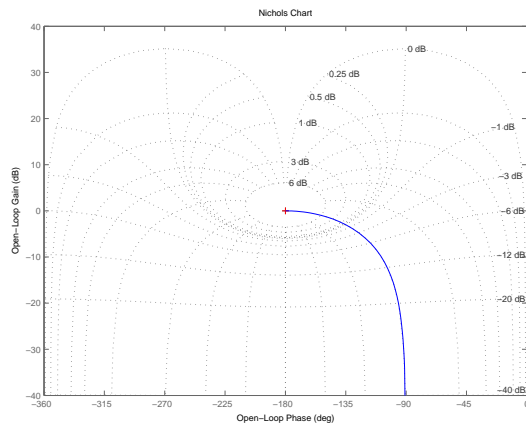
1- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 3.52 \text{ dB} \quad M_\Phi = 11.4 \text{ deg}$$

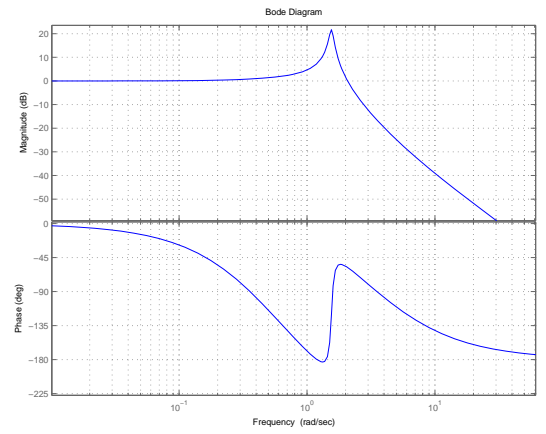
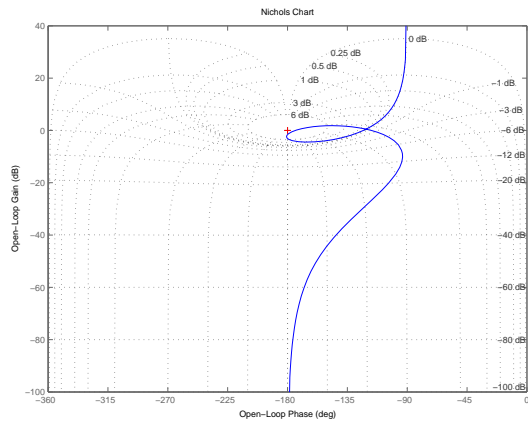
2- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 0 \text{ dB} \quad M_\Phi = 0 \text{ deg}$$

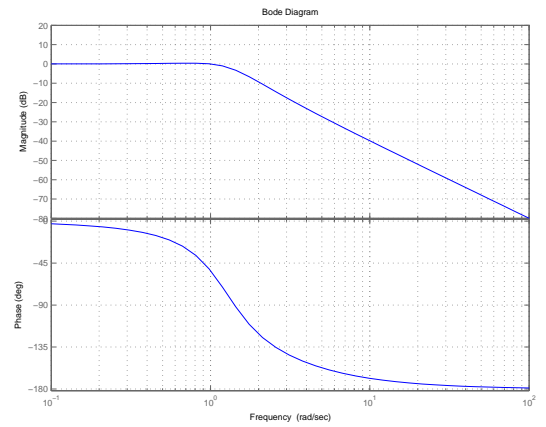
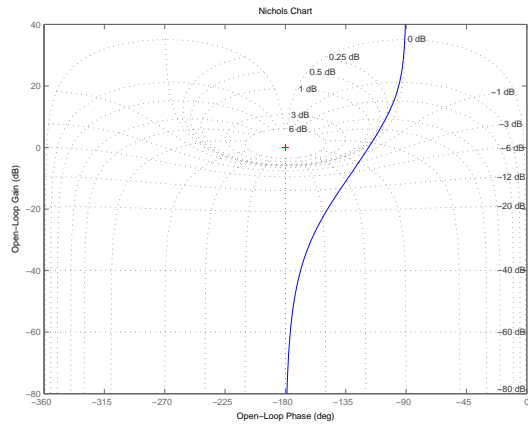
3- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 1.58 \text{ dB} \quad M_\Phi = 5.87 \text{ deg}$$

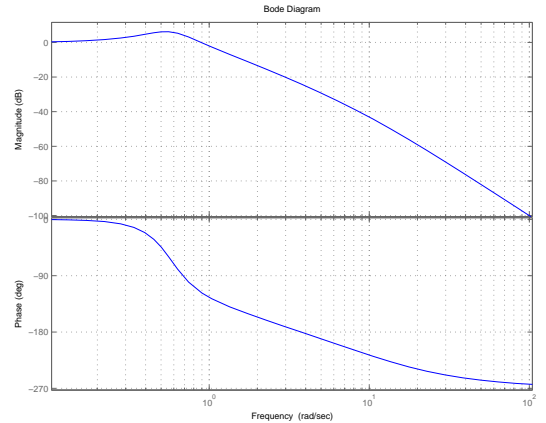
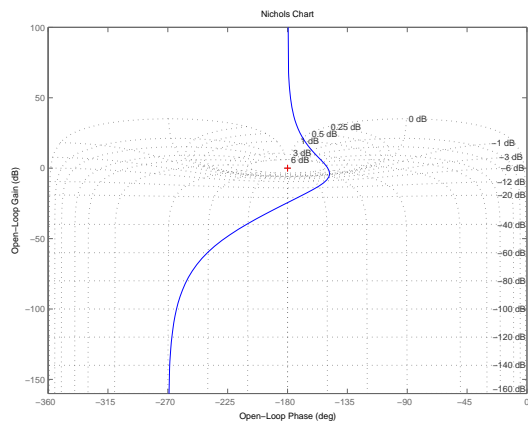
4- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = \infty \text{ dB} \quad M_\Phi = 62 \text{ deg}$$

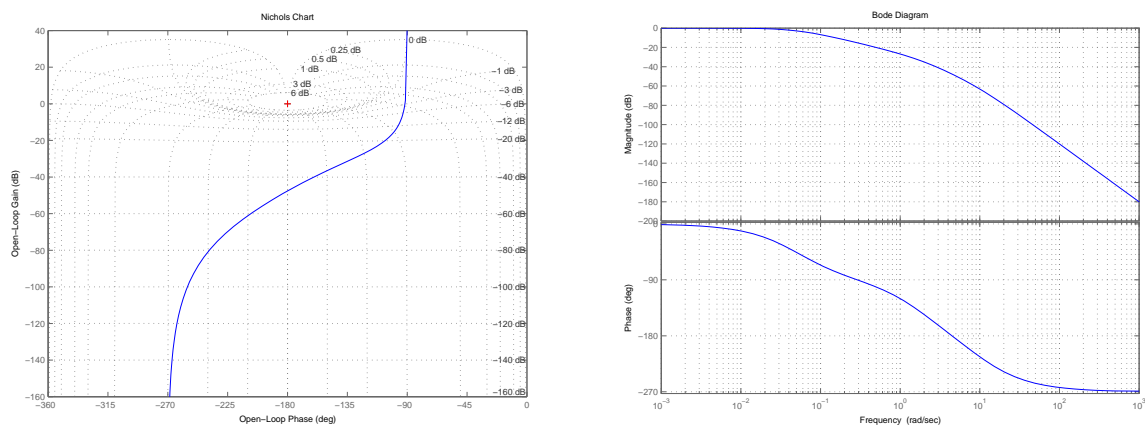
5- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 24.5 \text{ dB} \quad M_\Phi = 30.3 \text{ deg}$$

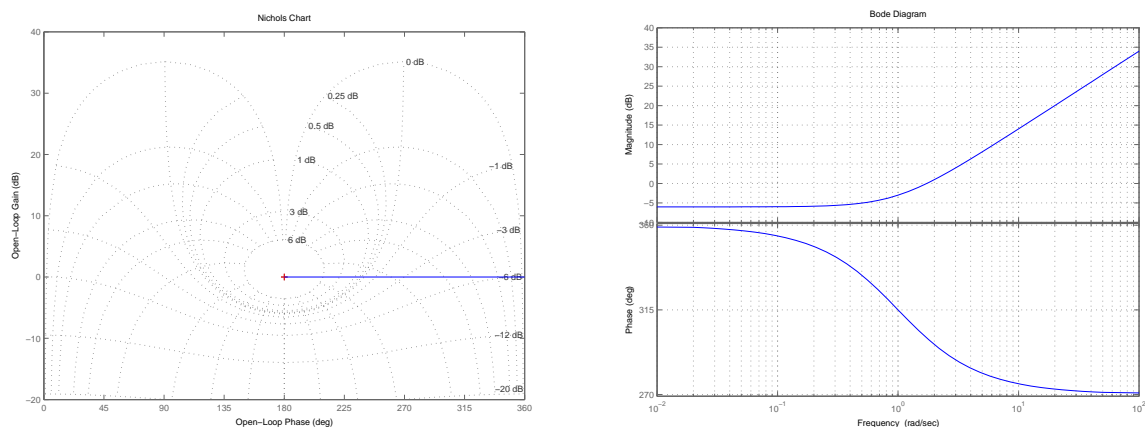
6- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 47.6 \text{ dB} \quad M_\Phi = 88.3 \text{ deg}$$

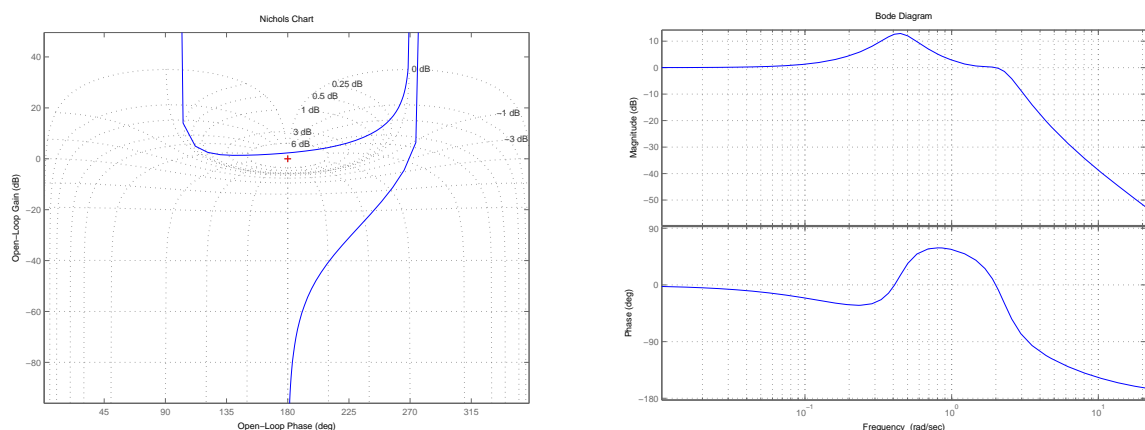
7- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 0 \text{ dB} \quad M_\Phi = 0 \text{ deg}$$

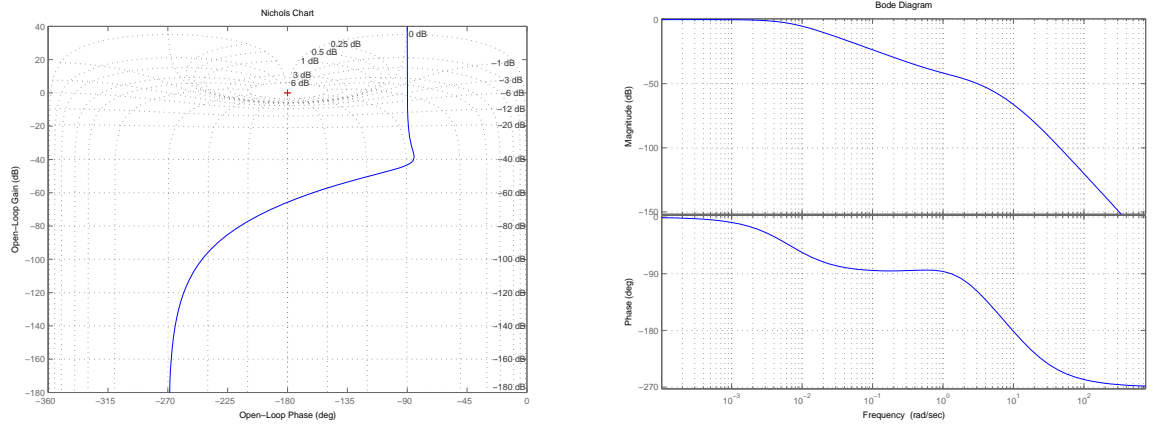
8- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = -2.31 \text{ dB} \quad M_\Phi = 89.8 \text{ deg}$$

9- On obtient les tracés suivants (tracé de la boucle ouverte dans Hall-Nichols et tracé de la boucle fermée dans Bode) :



Les marges de gain et de phase sont données par :

$$K_g = 65.7 \text{ dB} \quad M_\Phi = 90.1 \text{ deg}$$

Exercice 2 :

Soit le système en boucle fermée de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{10(p+1)}{(p+2)(p+5)}$$

1- Le module de $G(p)$ est donné par :

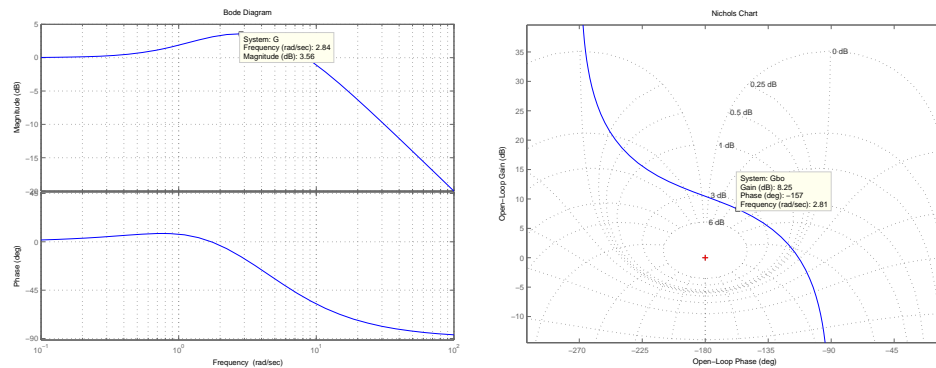
$$|G(j\omega)| = \frac{10\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(10-\omega^2)^2 + 40\omega^2}}$$

On calcule la dérivée de $|G(j\omega)|$ par rapport à ω .

$$|G(j\omega)|' = \frac{10\omega[-\omega^4 - 2\omega^2 + 81]}{\sqrt{(1+\omega^2)(100+\omega^4+20\omega^2)}(100+\omega^4+20\omega^2)}$$

Cette dérivée s'annule pour $\omega_r = 2\sqrt{2} = 2.82$. En remplaçant cette valeur dans l'expression du module de G , on obtient :

$$M_r = \frac{5}{\sqrt{11}} = 3.5655 \text{ dB}$$



2- On calcule la boucle ouverte $F(p)$.

$$G(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$$

Soit

$$F(p) = \frac{10(p + 1)}{p(p - 3)}$$

On trace le lieu de transfert de $F(p)$ dans l'abaque de Hall-Nichols et l'on relève la valeur de ω_r et de M_r .

Exercice 3 :

1- La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$\frac{K(p + 2)}{p^2}$$

dont le module et la phase sont donnés par :

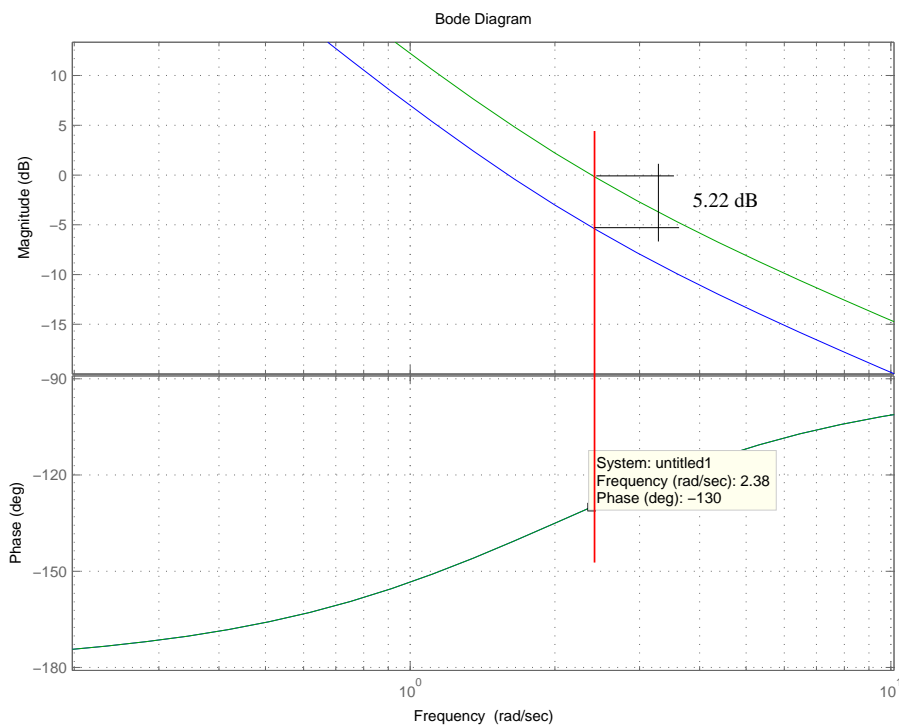
$$|G(j\omega)| = \frac{K\sqrt{4 + \omega^2}}{\omega^2} \quad \Phi(G(j\omega)) = -180^\circ + \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

On calcule la pulsation de coupure à 0 dB, ω_c pour laquelle la phase $\Phi(G(j\omega))$ doit être égale à 50 deg.

$$\omega_c = 2\tan(50^\circ) = 2.3855 \text{ rad/s}$$

On déduit le gain K :

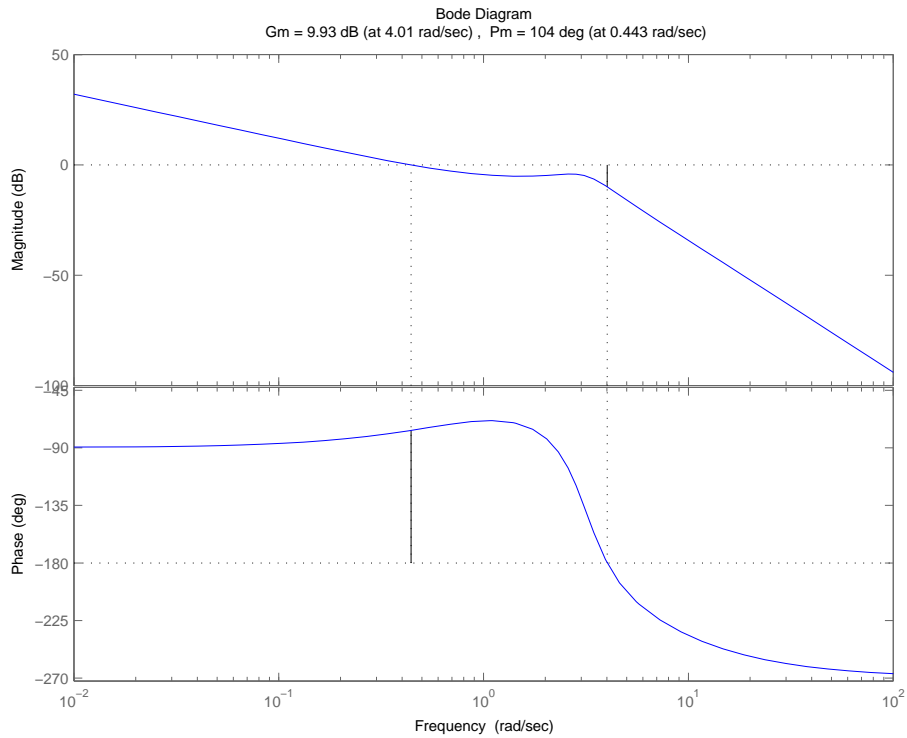
$$K = \frac{\omega_c^2}{\sqrt{4 + \omega_c^2}} = 1.8259$$



2- Pour toute valeur du gain K , la marge de gain est infinie.

Exercice 4 :

Le tracé dans le lieu de Bode est donné à la figure suivante.

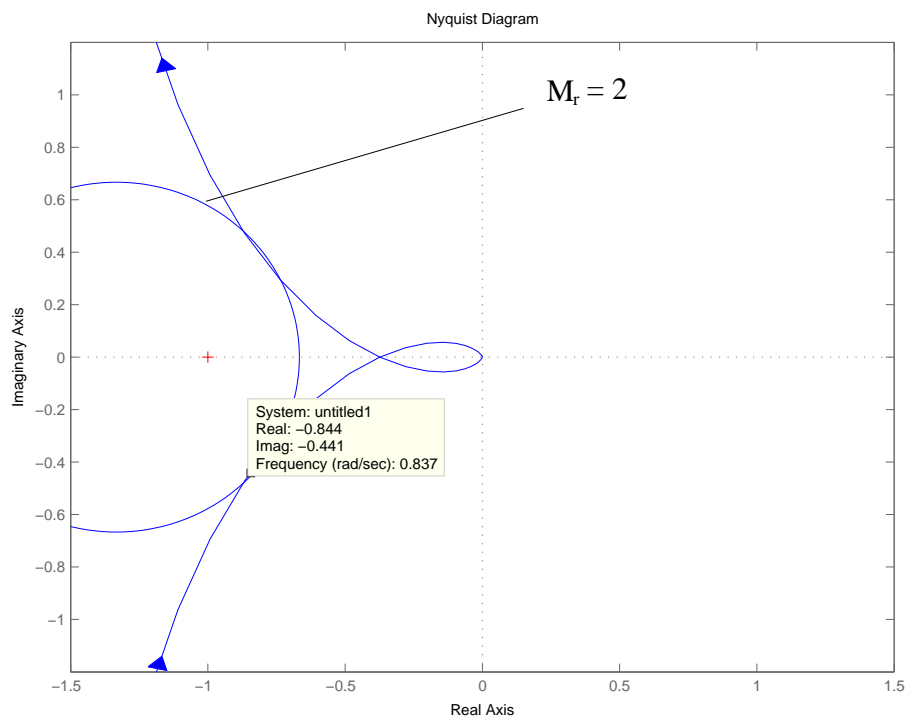


Les marges de phase et de gain sont données par :

$$M_{\Phi} = 104 \text{ deg} \quad K_g = 9.93 \text{ dB}$$

Exercice 5 :

1- Le tracé du lieu de Nyquist est donné par :

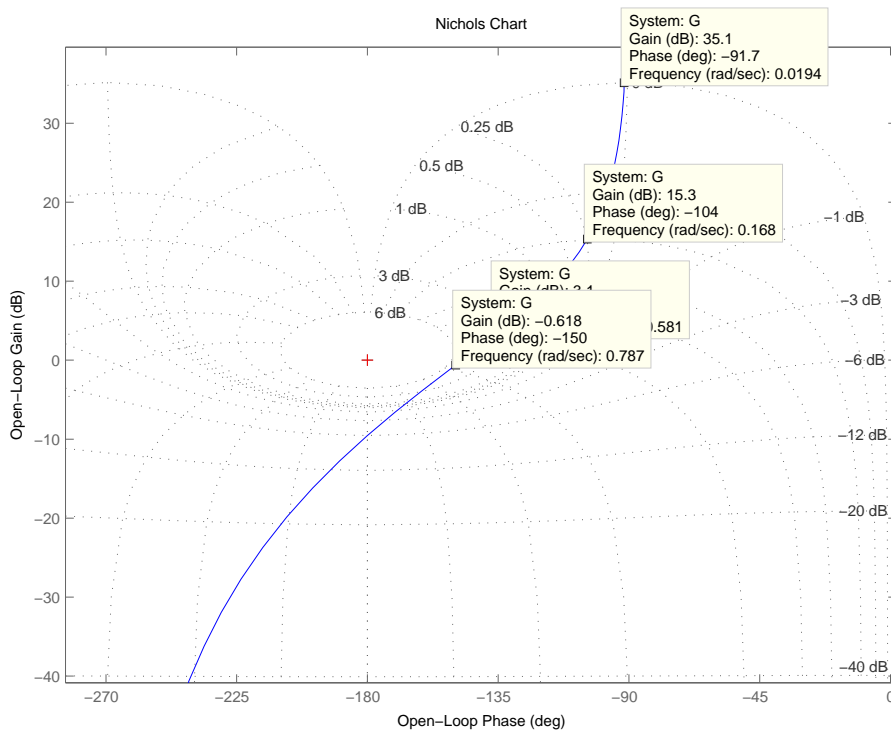


2- On obtient donc avec l'abaque des M-cercles.

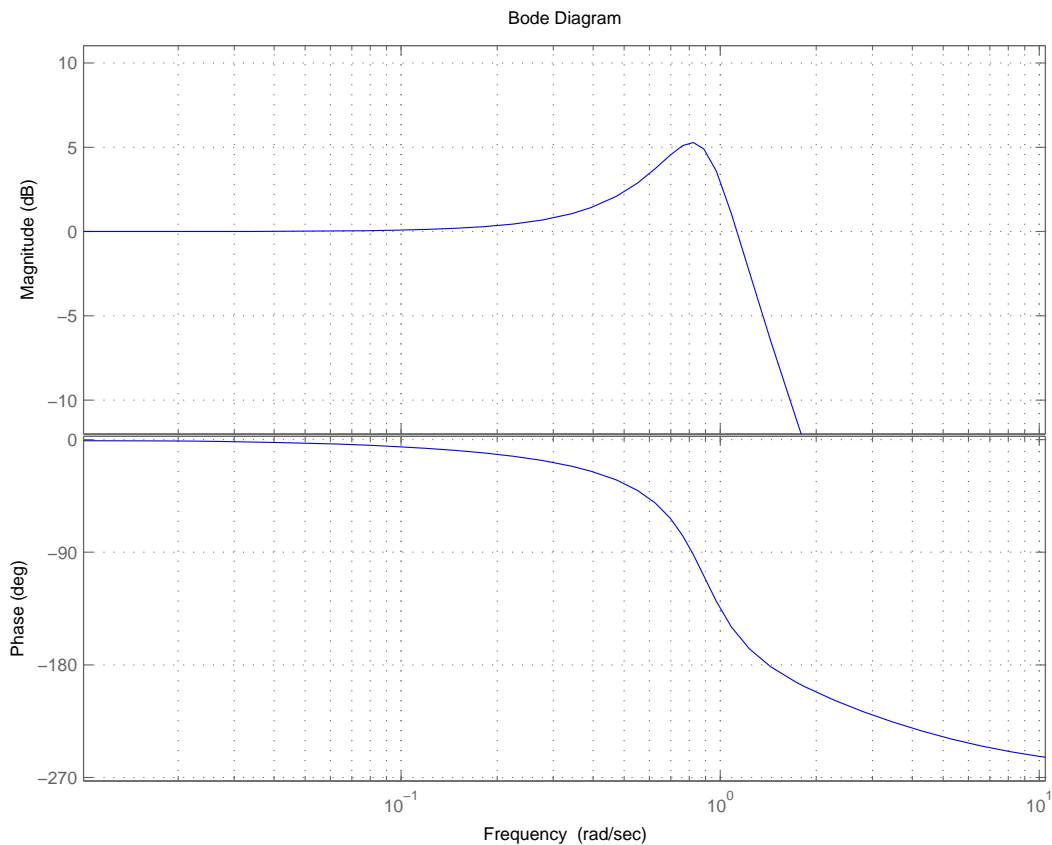
$$M_r = 2 \quad \omega_r = 0.83 \text{ rad/s}$$

Exercice 6 :

Le lieu de transfert de $G(p)$ dans l'abaque de Hall-Nichols est représenté à la figure suivante.



On prélève un certain nombre de points afin de tracer la boucle fermée dans Bode.



Notes bibliographiques

La lecture de l'article de 1934 de H.S. Black [3] permettra de constater que c'est sans doute la première référence ayant proposé l'utilisation de l'abaque de Hall-Nichols dans un plan (gain, phase) et dans le cas particulier de l'amplificateur opérationnel stabilisé. Le chapitre 4 du livre [14] est la référence la plus ancienne le présentant sous la forme utilisée jusqu'à présent dans le cadre de l'étude du Radar SCR-584 et reconnue comme telle dans la littérature [5]. A défaut de consulter la référence original sur le sujet [12], [5] est une référence très détaillée pour la construction des abaques des M-cercles et des N-cercles dans le plan de Nyquist. Des références plus modernes et donc plus accessibles sont données par [8], [25], [15].

La marge de module a été introduite par I.D. Landau dans [23] Les ouvrages recommandés en bibliographie ont été regroupés suivant des catégories ayant trait à leur nature ou au sujet traité si ce dernier est particulièrement pertinent pour un des sujets du chapitre.

- Articles fondateurs : articles de H.S. Black et H.W. Bode dans [3]
- Manuels historiques : [14],[12], [22], [29], [5], [4], [13], [24], [20] ;
- Manuels généraux : [28], [21], [8], [6], [19], [25], [11], [15] ;
- Manuels modernes : [10], [31], [1], [26], [17], [2], [30] ;
- Critère de Nyquist multivariable : [9], [18], [27] ;
- Systèmes à contre-réaction : [16], [8], [10], [25], [7] ;
- Fonctions de sensibilité : [8], [10], [30] ;
- Analyse fréquentielle en boucle fermée et abaques : [8], [25], [17], [30]

Références

- [1] A. Abramovici and J. Chapsky. *Feedback control systems : A fast-track guide for scientists and engineers*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, USA, 2000.
- [2] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems*. Birkhäuser, Boston, Massachusetts, USA, 2006.
- [3] T. Basar, editor. *Control theory, twenty-five seminal papers (1932-1981)*. IEEE press, Piscataway, New Jersey, USA, 2000.
- [4] B. M. Brown. *The mathematical theory of linear systems*. Chapman and Hall, London, UK, 1961.
- [5] H. Chesnut and R. W. Mayer. *Servomécanismes et régulation*. Dunod, Paris, France, 1957.
- [6] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern control systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [7] S. Engelberg. *A mathematical introduction to control theory*. Imperial College Press, Singapore, Singapore, 2005.
- [8] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeni. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2009.
- [9] B. Friedland. *Control system design*. Dover publications, Mineola, New York, USA, 2009.
- [10] T. Glad and L. Ljung. *Control theory : Multivariable and nonlinear methods*. Taylor and Francis, New York, New York, USA, 2000.
- [11] G.C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control system design*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.
- [12] A. C. Hall. *Analysis and synthesis of linear servomechanisms*. Technology Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1943.
- [13] I. M. Horowitz. *Synthesis of feedback systems*. Academic Press, London, UK, 1963.
- [14] H. M. James, N. B. Nichols, and R. S. Phillips. *Theory of servomechanisms*. McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1942.
- [15] B. C. Kuo and F. Golnaraghi. *Automatic control systems*. John Wiley, New York, New York, USA, 2003.
- [16] H. K. Kwakernaak and R. Sivan. *Modern signals and systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.

- [17] J. R. Leigh. *Control theory*. MPG books LTD, Bodmin, UK, 2004.
- [18] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust process control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1989.
- [19] A. G. O. Mutambara. *Design and analysis of control systems*. CRC press, Boca Raton, Florida, USA, 1999.
- [20] P. Naslin. *Technologie et calcul pratique des systèmes asservis*. Dunod, Paris, France, 1968.
- [21] K. Ogata. *Modern control engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1990.
- [22] R. Oldenburg and H. Sartorius. *Dynamics of automatic control systems*. Oldenburg, Munich, Allemagne, 1951.
- [23] A. Oustaloup, editor. *Régulation numérique robuste. Le placement de pôles avec calibrage de la fonction de sensibilité*, chapter 6. Hermès, Paris, France, 1993.
- [24] R. Pallu de la Barrière. *Cours d'automatique*. Dunod, Paris, France, 1966.
- [25] W. J. Palm. *Modeling, analysis and control of dynamical systems*. John Wiley, New York, New York, USA, 2000.
- [26] M. Schetzen. *Linear time-invariant systems*. John Wiley, New York, New York, USA, 2003.
- [27] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control*. John Wiley, New York, New York, USA, 1996.
- [28] Y. Takahashi, M. J. Rabins, and D. M. Auslander. *Control and dynamic systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachussets, USA, 1970.
- [29] J.C. Truxal. *Automatic Feedback Control System Synthesis*. Mc Graw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series. Mc Graw-Hill, New York, USA, 1955.
- [30] D. Xue, Y. Chen, and D. P. Atherton. *Linear feedback control : Analysis and design with MATLAB®*. Advances in design and control. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 2007.
- [31] H. Özbay. *Introduction to feedback control theory*. CRC press, New York, New York, USA, 2000.