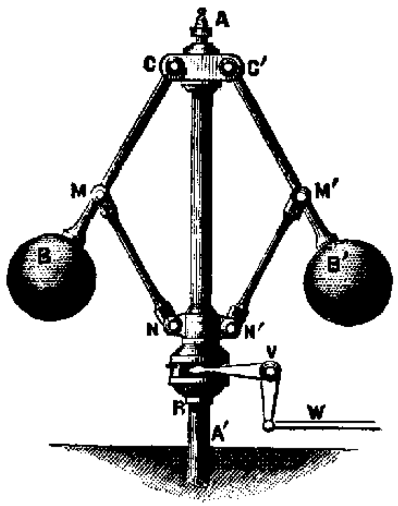
Représentation et analyse des systèmes linéaires

PC 3

Formes canoniques compagnes

Propriétés structurelles



- Système mono-variable :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

- Fonction de transfert :

$$\begin{aligned} H(p) &= C(p\mathbf{1}_n - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{b_n p^n + \cdots + b_0}{\underbrace{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}_{\text{Polynôme caractéristique}}} \end{aligned}$$

La forme compagne de commande

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_i & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_i & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Nota : si la paire (A, B) est commandable

La forme compagne de commande : algorithme

La matrice de passage :

$$P_c = [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_n = B \\ P_{n-1} = (A + a_{n-1}\mathbf{1}_n)B \\ P_{n-2} = (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}\mathbf{1}_n)B = AP_{n-1} + a_{n-2}B \\ P_{n-3} = (A^3 + a_{n-1}A^2 + a_{n-2}A + a_{n-3}\mathbf{1}_n)B = AP_{n-2} + a_{n-3}B \\ \ldots \\ P_1 = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1\mathbf{1}_n)B = AP_2 + a_1B \end{array}}$$

La forme compagne d'observation

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota : si la paire (A, C) est observable

La forme compagne d'observation : algorithme

La matrice de passage P_o :

$$\boxed{P_o^{-1} = \begin{bmatrix} C(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 \mathbf{1}_n) \\ C(A^{n-2} + a_{n-1}A^{n-3} + \cdots + a_3 A + a_2 \mathbf{1}_n) \\ \vdots \\ C(A + a_{n-1}\mathbf{1}_n) \\ C \end{bmatrix}}$$

- Equations d'état :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Polynôme caractéristique :

$$P(p) = \det(p\mathbf{1} - A) = p^3 - p = p(p-1)(p+1)$$

- Fonction de transfert :

$$C(p\mathbf{1}-A)^{-1}B = \frac{C}{P(p)} \times \begin{bmatrix} (p-1)^2 & 0 & p-1 \\ 0 & p(p+1) & 0 \\ -2(p-1) & 0 & (p-1)(p+2) \end{bmatrix} B = \frac{p^2-1}{p^3-p} = \frac{1}{p}$$

- Forme modale :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

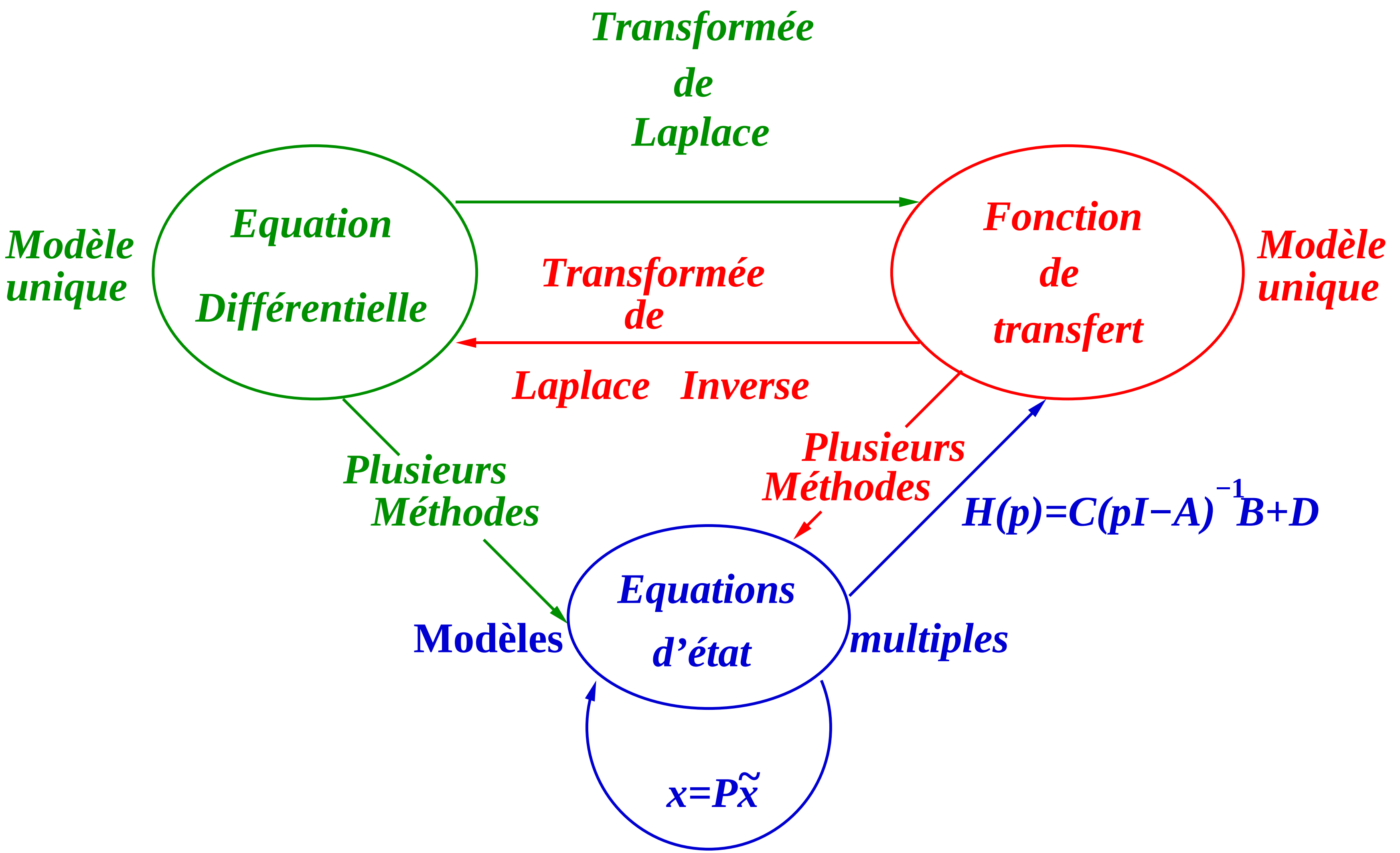
- La forme compagne de commande :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Relation entre les différents modèles

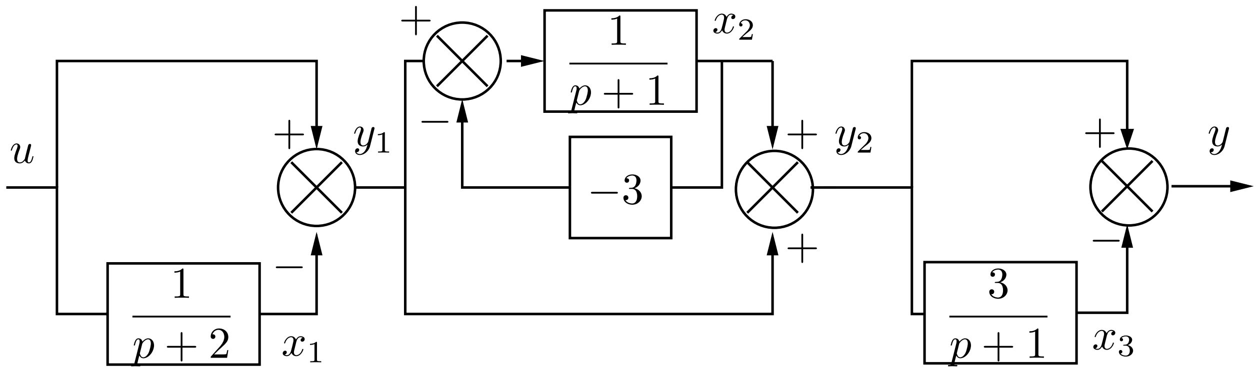


❒ Théorème 1 :

- *Le modèle entrée-sortie du type équation différentielle ne représente que la partie observable d'un système*
- *Le modèle entrée-sortie du type fonction de transfert ne représente que la partie observable et commandable d'un système*

  La représentation d'état associée à une fonction de transfert où des simplifications pôles-zéros interviennent est non commandable ou non observable suivant le choix des variables d'état

Exemple :



- La fonction de transfert est d'ordre 1 avec un pôle -2 et un zéro 1

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p-1}{p+2}$$

- L'équation différentielle entrée-sortie est d'ordre 2 avec deux pôles -2 et -1

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} - u$$

- Une équation d'état d'ordre 3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + u \end{aligned}$$

où les pôles sont donnés par -2, commandable et observable, 2 commandable et non observable et -1 non commandable et observable

- Forme modale de l'équation d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0607 \\ 2.4749 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1.2122 \end{bmatrix} x + u$$

où les pôles sont donnés par :

- -2 commandable et observable
- 2 commandable et non observable
- -1 non commandable et observable