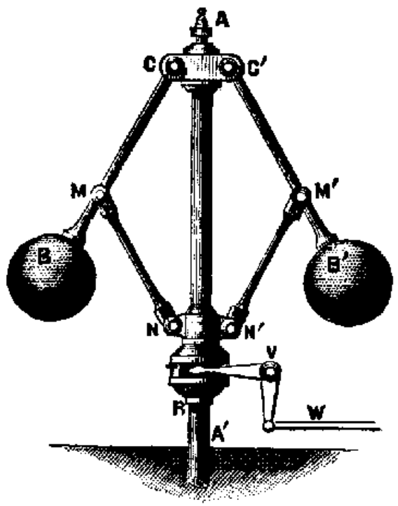
Représentation et analyse des systèmes linéaires

PC 3

Théorie de la réalisation

Formes canoniques compagnes



☛ PROBLÈME 1 (**réalisation**)

Etant donnée une représentation externe (matrice de transfert $H(p)$ ou de réponse impulsionnelle $h(t)$), déterminer une représentation d'état permettant de générer cette représentation externe.

$$H(p) \text{ ou } h(t) \longrightarrow (A, B, C, D)$$

- Justifications pratiques et théoriques :

  Nécessité de réalisation de filtres ou réseaux correcteurs synthétisés à partir de spécifications fréquentielles

  Etude des simplifications pôles-zéros dans les systèmes interconnectés
- Infinité de solutions
- Existence et Minimalité
- Algorithmes de réalisation

Nota : les concepts de commandabilité et d'observabilité jouent un rôle central

▼ DÉFINITION 1 (**Réalisation**)

Une réalisation de $H(p)$ est tout ensemble $\{A, B, C, D\}$ tel que :

$$H(p) = D + C(p\mathbf{1}_n - A)^{-1}B$$

▼ DÉFINITION 2 (**Paramètres de Markov**)

Toute matrice de transfert rationnelle réelle $H(p) \in \mathbb{C}^{r\times m}$ peut être décomposée en série de Laurent :

$$H(p) = H_0 + H_1p^{-1} + H_2p^{-2} + \cdots$$

où les matrices H_i, $i = 1, 2 \cdots$ sont les paramètres de Markov du système. Ils peuvent être calculés par

$$H_0 = \lim_{p\to\infty} H(p) \quad H_1 = \lim_{p\to\infty} p(H(p) - H_0) \quad H_2 = \lim_{p\to\infty} p^2(H(p) - H_0 - H_1p^{-1})$$
$$\ldots$$

❒ THÉORÈME 1

L'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est une réalisation de $H(p)$ ssi

$$H_0 = D \quad H_i = CA^{i-1}B \quad i = 1, 2, \cdots$$

❒ THÉORÈME 2

1- $H(p) \in \mathbb{C}^{r\times m}$ est une matrice de transfert réalisable par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

ssi $H(p)$ est une matrice de fonctions rationnelles telle que $\lim\limits_{p\to\infty} H(p) < \infty$ i.e. $H(p)$ est une matrice rationnelle propre.

2- $h(t) \in \mathbb{R}^{r\times m}$ est une matrice de réponse impulsionnelle réalisable par (1) ssi tous les éléments de $h(t)$ sont des sommes des fonctions élémentaires $\alpha t^k e^{\lambda t}$ et $\beta\delta(t)$ avec $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exemple :

$$h(t) = \begin{bmatrix} e^t + e^{-t} + \delta(t) & e^t \end{bmatrix} \quad H(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{p^2+2p-1}{p^2-1} & \dfrac{1}{p-1} \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes forment une réalisation d'état de $h(t)$ et de $H(p)$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

▼ Définition 3 (**Réalisation minimale**)

Une réalisation minimale ou réalisation irréductible de $H(p)$ $(h(t))$ est tout ensemble $\{A, B, C, D\}$ tel que son ordre n est minimal $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$.

❒ Théorème 3

Une réalisation $\{A, B, C, D\}$ d'ordre n de $H(p)$ $(h(t))$ est minimale si et seulement si la paire (A, B) est commandable et la paire (A, C) est observable.

Exemple : soit $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$

1-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

2-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

3-

$$A = -1 \quad B = 1 \quad C = 1 \quad D = 0$$

- Système mono-variable :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

- Fonction de transfert :

$$\begin{aligned} H(p) &= D + C(p\mathbf{1}_n - A)^{-1}B \\ &= \frac{b_n p^n + \cdots + b_0}{\underbrace{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}_{\text{Polynôme caractéristique}}} \\ &= b_n + \frac{\alpha_{n-1}p^{n-1} + \cdots + \alpha_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0} \\ &= b_n + \frac{(b_{n-1} - a_{n-1}b_n)p^{n-1} + \cdots + b_0 - a_0 b_n}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0} \end{aligned}$$

Nota : si la paire (A, B) est commandable

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_i & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D_c = b_n$$

❒ LEMME 1

Si (A_c, C_c) est une paire observable alors $\{A_c, B_c, C_c, D_c\}$ est une réalisation d'état minimale de la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{b_n p^n + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \xrightarrow{x = P_c \tilde{x}} \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \underbrace{P_c^{-1} A P_c}_{A_c} \tilde{x}(t) + \underbrace{P_c^{-1} B}_{B_c} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{C P_c}_{C_c} \tilde{x}(t) + \underbrace{D}_{D_c} u(t) \end{aligned}$$

Algorithme de calcul de la matrice de passage : $P_c = [P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_n]$

$$\boxed{\begin{aligned} & P_n = B \\ & P_{n-1} = (A + a_{n-1}\mathbf{1}_n)B \\ & P_{n-2} = (A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}\mathbf{1}_n)B = AP_{n-1} + a_{n-2}B \\ & P_{n-3} = (A^3 + a_{n-1}A^2 + a_{n-2}A + a_{n-3}\mathbf{1}_n)B = AP_{n-2} + a_{n-3}B \\ & \ldots \\ & P_1 = (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1\mathbf{1}_n)B = AP_2 + a_1B \end{aligned}}$$

Nota : si la paire (A, C) est observable

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_o = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_o = b_n$$

❒ LEMME 2

Si (A_o, B_o) est une paire commandable alors $\{A_o, B_o, C_o, D_o\}$ est une réalisation d'état minimale de la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{b_n p^n + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \quad \xrightarrow{x=P_o\tilde{x}} \quad \begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \underbrace{P_o^{-1}AP_o}_{A_o}\tilde{x}(t) + \underbrace{P_o^{-1}B}_{B_o}u(t)\\ y(t) &= \underbrace{CP_o}_{C_o}\tilde{x}(t) + \underbrace{D}_{D_o}u(t)\end{aligned}$$

Algorithme de calcul de la matrice de passage : $P_o^{-1} = [P_1' \ P_2' \ \cdots \ P_n']$

$$\boxed{P_o^{-1} = \begin{bmatrix} C(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1\mathbf{1}_n) = P_2A + a_1C \\ C(A^{n-2} + a_{n-1}A^{n-3} + \cdots + a_3A + a_2\mathbf{1}_n) = P_3A + a_2C \\ \vdots \\ C(A + a_{n-1}\mathbf{1}_n) = P_nA + a_{n-1}C \\ C \end{bmatrix}}$$

- Equations d'état :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Polynôme caractéristique :

$$P(p) = \det(p\mathbf{1} - A) = p^3 - p = p(p-1)(p+1)$$

- Fonction de transfert :

$$C(p\mathbf{1}-A)^{-1}B = \frac{C}{P(p)} \times \begin{bmatrix} (p-1)^2 & 0 & p-1 \\ 0 & p(p+1) & 0 \\ -2(p-1) & 0 & (p-1)(p+2) \end{bmatrix} B = \frac{p^2-1}{p^3-p} = \frac{1}{p}$$

Exemple (suite)

- Forme modale :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

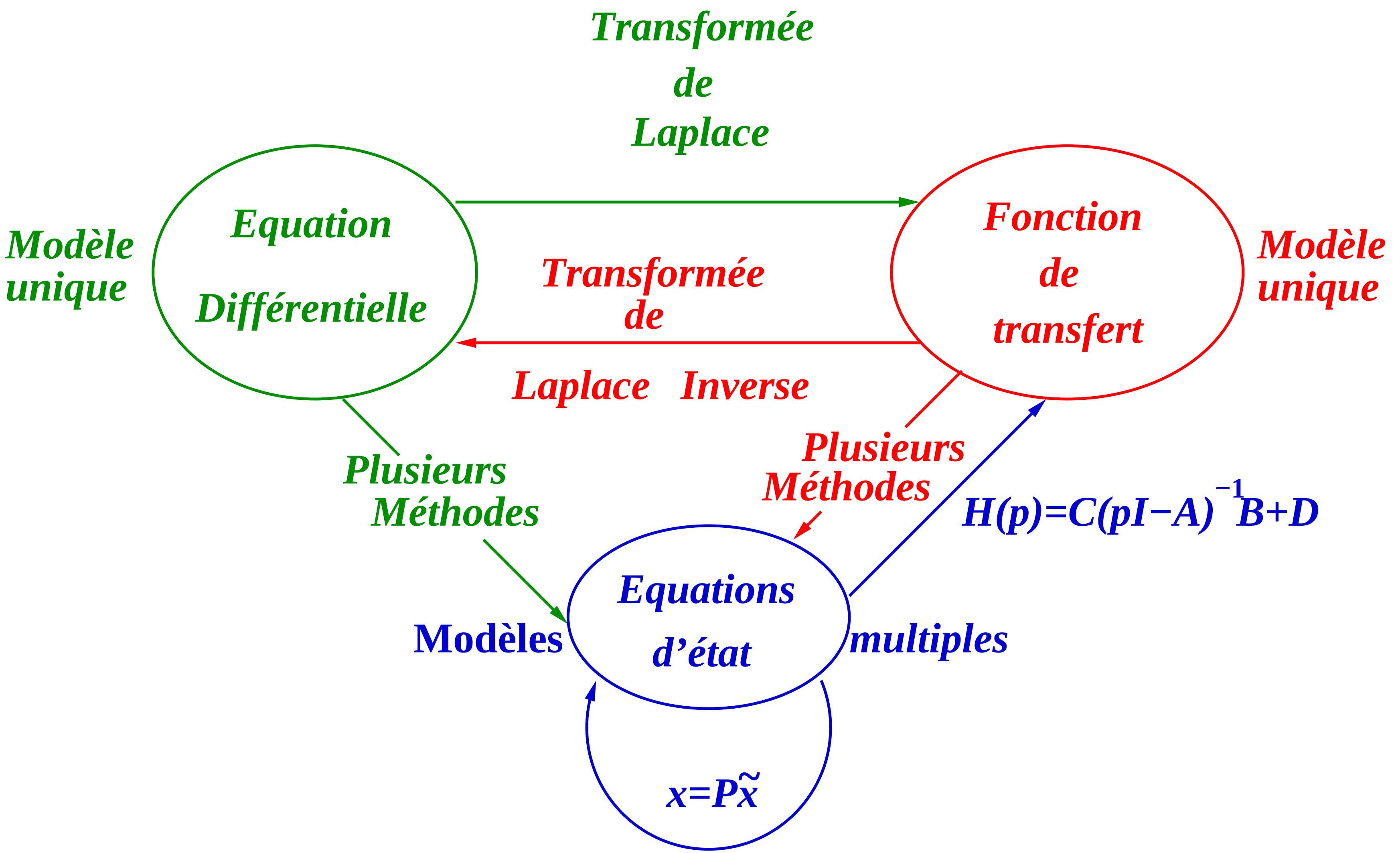
- La forme compagne de commande :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Relation entre les différents modèles

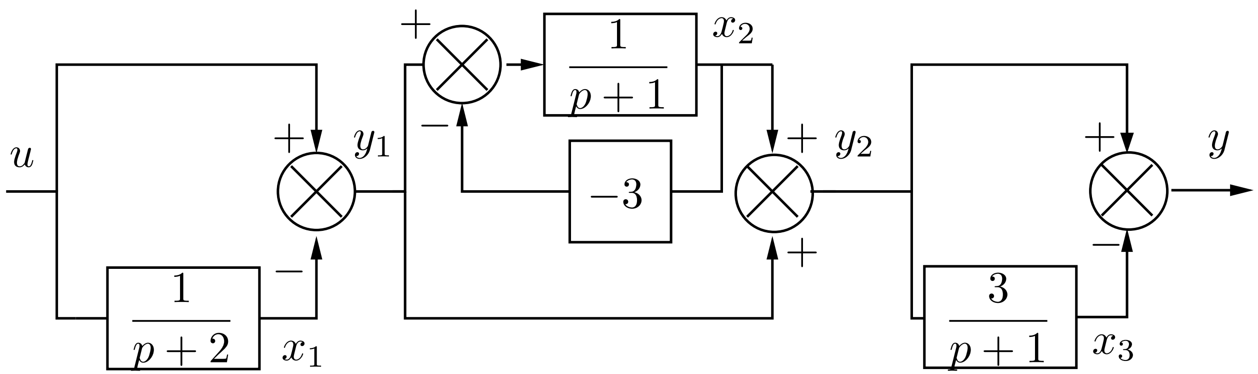


❐ THÉORÈME 4

- Le modèle entrée-sortie du type équation différentielle ne représente que la partie observable d'un système
- Le modèle entrée-sortie du type fonction de transfert ne représente que la partie observable et commandable d'un système

  La représentation d'état associée à une fonction de transfert où des simplifications pôles-zéros interviennent est non commandable ou non observable suivant le choix des variables d'état

Exemple :



- La fonction de transfert est d'ordre 1 avec un pôle -2 et un zéro 1

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p-1}{p+2}$$

- L'équation différentielle entrée-sortie est d'ordre 2 avec deux pôles -2 et -1

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} - u$$

- Une équation d'état d'ordre 3 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + u \end{aligned}$$

où les pôles sont donnés par -2, commandable et observable, 2 commandable et non observable et -1 non commandable et observable

- Forme modale de l'équation d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0607 \\ 2.4749 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1.2122 \end{bmatrix} x + u$$

où les pôles sont donnés par :

- -2 commandable et observable
- 2 commandable et non observable
- -1 non commandable et observable