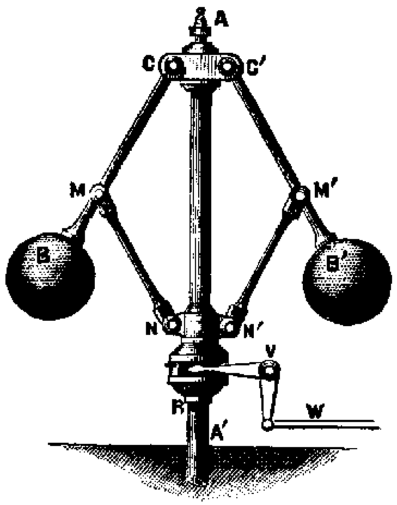
Représentation et analyse des systèmes linéaires

Cours 3

Stabilité des systèmes dynamiques



❶ Concept crucial pour la commande des systèmes dynamiques

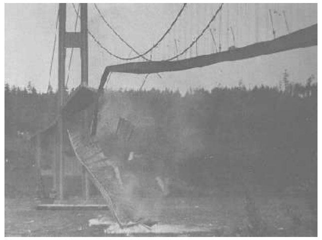
❶ Concept crucial pour la commande des systèmes dynamiques

❷ Différentes définitions de ce concept

☞ Stabilité BIBO (**B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) :

▼ **Définition 1** : *Stabilité BIBO*

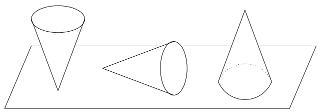
Un système est stable au sens BIBO ssi pour toute entrée bornée, la sortie est bornée



☞ Stabilité au sens de Lyapunov :

▼ **Définition 2** : *Stabilité interne*

Un point d'équilibre est stable si les trajectoires d'état du système y convergent en réponse à un état initial différent de l'état d'équilibre



Exemple : satellite en spin constant

Soient les équations d'état du satellite autour de l'axe z :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_{zz} \end{bmatrix} u_z(t) \qquad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Pour $u_z(t) = 1, \ \forall \ t \geq 0$, on obtient alors :

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2I_{zz}} \qquad y(t) = x_2(t) = \frac{t}{I_{zz}}$$

Le satellite n'est pas BIBO stable

✍ $a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$

✍ $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

✍ $H(p) = \dfrac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$

❒ **Théorème 1** : *Stabilité BIBO*

Un système LTI de réponse impulsionnelle $h(t)$ est BIBO-stable ssi

$$\boxed{\int_0^\infty |h(\tau)|d\tau \leq k < \infty}$$

Exemple : satellite

$$h(t) = \frac{t}{I_{zz}} \qquad \int_0^t \frac{1}{I_{zz}}\tau d\tau = \frac{1}{I_{zz}}\frac{t^2}{2}$$

N intégrations, Q pôles réels distincts et R paires distinctes de pôles complexes conjugués

$$H(p) = \frac{K\displaystyle\prod_{i=1}^{M}(p-z_i)}{p^N\displaystyle\prod_{k=1}^{Q}(p-\sigma_k)\prod_{i=1}^{R}(p^2-2\alpha_i p+(\alpha_i^2+\omega_i^2))}$$

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = \sum_{k=1}^{Q}A_k e^{\sigma_k t} + \sum_{j=1}^{R}B_j e^{\alpha_j t}\sin(\omega_j t) + \sum_{i=1}^{N}C_i t^{i-1}$$

Si $N=0$, $\alpha_j<0$, $\forall\ j=1,\cdots,R$ et $\sigma_k<0$, $\forall\ k=1,\cdots,Q$

$$\int_0^{+\infty}|h(t)|dt \leq -\sum_{k=1}^{R}|B_k|/\alpha_k - \sum_{j=1}^{Q}|A_j|/\sigma_j$$

❒ **Théorème 2** :

$G(p)$ est BIBO-stable ssi tous les pôles de $G(p)$ sont à partie réelle négative. Le demi-plan gauche $\mathbb{C}^-$ est appelé la région de stabilité

Procédure 1 :

❶ *Ecrire le polynôme caractéristique : (hypothèse $a_0 \neq 0$)*

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

❷ *Si un des coefficients est nul ou négatif alors qu'un autre coefficient au moins est positif, il existe une ou des racines imaginaires ou des racines à partie réelle positive*

❸ *Si tous les coefficients sont positifs, on calcule le tableau de Routh,*

$$\begin{array}{c|cccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
p^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
p^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p^0 & h_{n-1} & & &
\end{array}$$

✔ Coefficients du tableau :

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-3} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-1}} \qquad c_{n-3} = \frac{b_{n-1}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-5}}{b_{n-1}} \cdots$$

✔ Critère de Routh-Hurwitz :

❒ **Théorème 3** :

Le nbre de racines / $Re(p_i) > 0$ = nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh

Le système est donc stable ssi tous les coefficients de la première colonne sont non négatifs

✍ **Remarques 1** :

Si un élément de la première colonne est nul, on le remplace alors par $\epsilon > 0$. Si l'élément au dessous de ϵ est positif, il existe une racine $Re(p) = 0$. Si l'élément au dessous de ϵ est négatif, il existe une racine $Re(p) > 0$

Exemple 1 : [Maxwell 1868]

$$a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc}
p^3 & a_3 & a_1 \\
p^2 & a_2 & a_0 \\
p & -\dfrac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}}{a_2} & 0 \\
p^0 & a_0 &
\end{array}$$

$$\boxed{a_2a_1 > a_3a_0}$$

Exemple 2 :

$$p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3$$

$$\begin{array}{c|ccc}
p^5 & 1 & 3 & 5 \\
p^4 & 2 & 6 & 3 \\
p^3 & \cancel{0}\ \epsilon & \dfrac{7}{2} & 0 \\
p^2 & \dfrac{6\epsilon - 7}{\epsilon} & 3 & 0 \\
p & \dfrac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14} & 0 & 0 \\
p^0 & 3 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Deux racines à partie réelle positive}}$$

▼ Définition 3 : *Etat d'équilibre*

x_e *est un état d'équilibre si* $x(t_0) = x_e \;\Leftrightarrow\; x(t) = x_e \;\; t \geq \; t_0$ *en l'absence de commande et de perturbations*

Pour une représentation d'état $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, *les points d'équilibre sont les solutions de l'équation algébrique :*

$$\boxed{0 = f(x(t), 0)}$$

❒ Théorème 4 :

Un système continu LTI $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *peut avoir,*

- *Un point d'équilibre unique* $x = 0$ *si* A *est inversible*
- *Une infinité de points d'équilibre si* A *n'est pas inversible*

▼ **Définition 4** : *Stabilité au sens de Lyapunov*

L'état d'équilibre x_e est dit stable si $\forall\ t \geq 0$

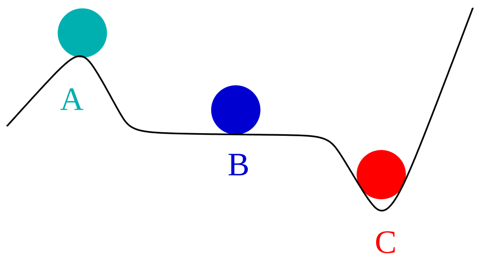
$$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0 \mid ||x(0) - x_e|| < \alpha\ \Rightarrow\ ||x(t) - x_e|| < \epsilon$$

Dans le cas contraire, x_e est dit instable

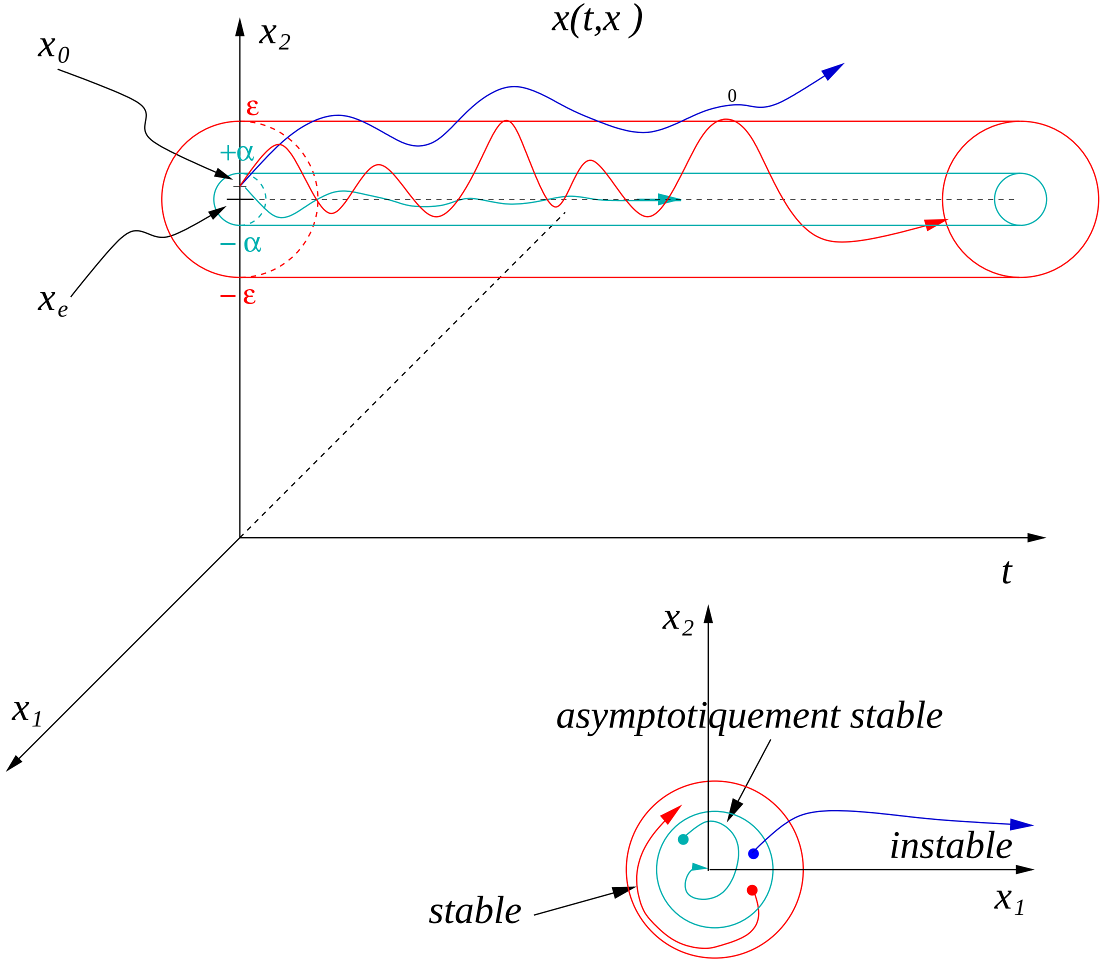
▼ **Définition 5** : *Stabilité asymptotique*

Un point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists\ \alpha > 0 \mid ||x(0) - x_e|| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$



Stabilité au sens de Lyapunov (suite)



Soit le système autonome (n valeurs propres distinctes)

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$x(t) = Pe^{\Lambda t}P^{-1}x_0 = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i' e^{p_i t} x_0$$

où

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}' \quad \Lambda = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

Les différents termes (fonctions élémentaires) de la somme sont appelés les modes du système

Si $x_0 = v_j$ alors

$$\boxed{x(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{p_i t} v_i w_i' v_j = e^{p_j t} v_j}$$

Soit le système autonome (k valeurs propres distinctes)

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$x(t) = Pe^{Jt}P^{-1}x_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{p_i t} M_i(t) x_0 = \sum_{i=1}^{k} T_i e^{J_i t} U_i x_0$$

où

$$P = \left[\begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & \cdots & T_k \end{array} \right] \quad P^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} U_1' & U_2' & \cdots & U_k' \end{array} \right]' \quad J = \mathrm{Jordan}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$$

Les différents termes de la somme sont appelés les modes du système

Si $x_0 = T_j^l$ alors

$$\boxed{x(t) = T_j e^{J_j t} e_l}$$

Exemple :

$$A = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{array} \right] \quad P = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right] \quad P^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{array} \right]$$

❒ **Théorème 5** :

Pour $\dot{x}(t) = Ax(t)$ *avec* r *valeurs propres distinctes,* $p_1, \cdots, p_r$ *et* $x_e = 0$ *point d'équilibre*

➜ *Si* $Re(p_j) > 0$, *pour* $j \in \{1, \cdots, r\}$, *alors* 0 *est instable*

➜ *Si* $Re(p_j) \leq 0$, *pour tout* $j \in \{1, \cdots, r\}$, *alors,*

- ✓ *si* $Re(p_j) < 0$, *pour tout* $j \in \{1, \cdots, r\}$, *alors* 0 *est asymptotiquement stable*
- ✓ *si un pôle est tel que* $Re(p_j) = 0$, *pour* $j \in \{1, \cdots, r\}$, *et la multiplicité est 1 alors* 0 *est stable*
- ✓ *si un pôle est tel que* $Re(p_j) = 0$, *pour* $j \in \{1, \cdots, r\}$, *et la multiplicité est* > 1 *alors,*
  (a) si J_i^j *associés à* p_j *sont scalaires alors* 0 *est stable*
  (b) si $\exists$ J_i^j *associé à* p_j *non scalaire, alors* 0 *est instable*

▼ **Définition 6** : *réalisation minimale*

A toute matrice de transfert $G(p)$, une réalisation d'état (A, B, C, D) est associée
La réalisation est minimale ssi A a la plus petite dimension possible ssi (A, B) est commandable et (A, C) est observable

❒ **Théorème 6** :

Un système LTI de représentation d'état minimale :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

et de matrice de transfert :

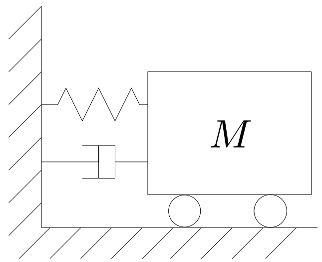
$$H(p) = C(p\mathbf{1} - A)^{-1}B + D$$

est asymptotiquement stable ssi BIBO-stable ssi

➦ *Tous les pôles du système appartiennent au demi-plan complexe gauche ssi les valeurs propres de A sont à partie réelle négative*

1- Equation du mouvement :

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$



2- Représentation d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2|x_2| - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3$$

3- Point d'équilibre : $(0,0)$

4- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mx_2^2$

5- Energie potentielle : $E_{pot.} = \displaystyle\int_0^x (k_0\beta + k_1\beta^3)d\beta = \frac{1}{2}k_0x_1^2 + \frac{1}{4}k_1x_1^4$

6- Energie totale : $E_m = V(x) = \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

✍ **Remarques 2** :

- *Le point d'énergie mécanique nulle est le point d'équilibre*
- *La stabilité asymptotique*

  $\Rightarrow$ *la convergence de l'énergie vers 0*
- *L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie mécanique*

On peut donc supposer que :

- *L'énergie mécanique reflète l'amplitude du vecteur d'état*
- *Les propriétés de stabilité peuvent être caractérisées par la variation de l'énergie mécanique / au temps*

Etude de la variation de l'énergie

$$\frac{d}{dt}[V(x)] = (m\ddot{x} + k_0 x + k_1 x^3)\dot{x} = -b|\dot{x}|^3 < 0$$

$\Longrightarrow$ Fonction de Lyapunov

Avantages

- Etude de la stabilité par examen de l'énergie totale du système
- Systèmes linéaires et non linéaires
- Ne nécessite ni la solution de l'équation d'état, ni la connaissance des pôles du système

Observation physique

Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système (linéaire ou non linéaire) devra rejoindre un point d'équilibre

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V(x)$ (fonction d'énergie généralisée)
$V(x) > 0 \ \ \forall \ x \neq 0$

❒ **Théorème 7** :

Pour le système autonome $\dot{x}(t) = f(x)$ *de point d'équilibre* 0
- *Si* $V(x) > 0$ *telle que* $\dot{V}(x) \leq 0$ *alors* 0 *est un point d'équilibre stable*
- *Si* $V(x) > 0$ *telle que* $\dot{V}(x) < 0$ *alors* 0 *est un point d'équilibre asymptotiquement stable*

Application aux modèles LTI :
- Modèle : $\dot{x}(t) = Ax(t)$
- Fonction candidate de Lyapunov quadratique :$V(x) = x'Px$

❒ **Théorème 8** :

$\dot{x} = Ax$ *est asymptotiquement stable ssi* $\forall \ Q = Q' > 0 \ \exists \ P > 0$ *solution de l'équation de Lyapunov*

$$A'P + PA + Q = 0$$

Exemple :

Soient :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On doit résoudre,

$$\begin{bmatrix} -2p_1 & 3p_1 - 3p_2 \\ 3p_1 - 3p_2 & 6p_2 - 4p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où la solution,

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$