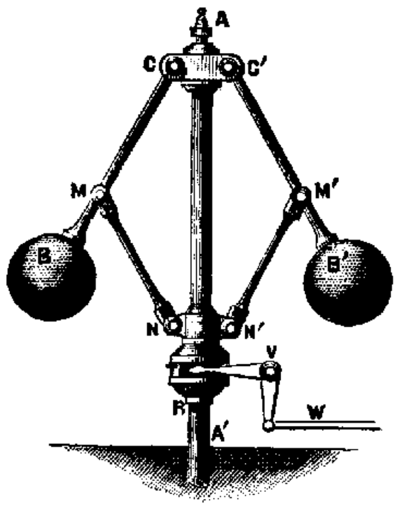
Représentation et analyse des systèmes linéaires

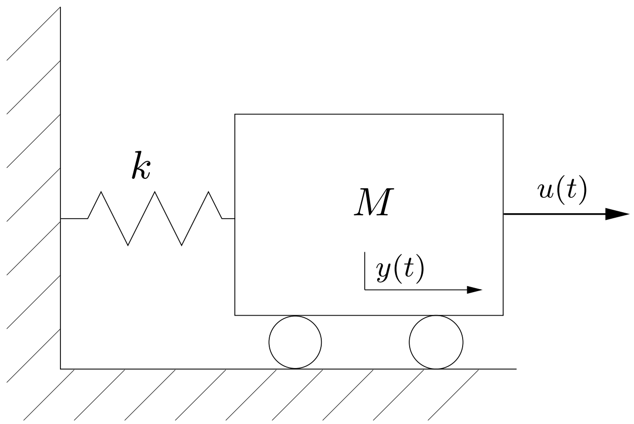
Cours 2

Modèles linéaires LTI et notion d'état



Le modèle interne : notion d'état

Exemple physique simple :



- Equation du système

$$M\ddot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

- Signal de commande $u(t)$
- Conditions initiales : $x(t_0) = \left[\begin{array}{cc} y(t_0) & \dot{y}(t_0) \end{array}\right]'$

Généralisation :

$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = u(t)$ et $x(t_0) = \left[\begin{array}{cccc} y(t_0) & \dot{y}(t_0) & \cdots & y^{(n-1)}(t_0) \end{array}\right]'$

Caractéristiques :

- Ensemble de variables physiques dont la spécification en l'absence de forces externes, déterminent complètement l'évolution du système (causalité)
- Nombre minimal (ordre) unique de variables non indépendantes (non uniques)
- Mémoire du système nécessaire pour décrire l'effet du passé sur l'évolution dynamique future du système
- Choix des variables d'état (nombre fixé et unique = nombre de conditions initiales)

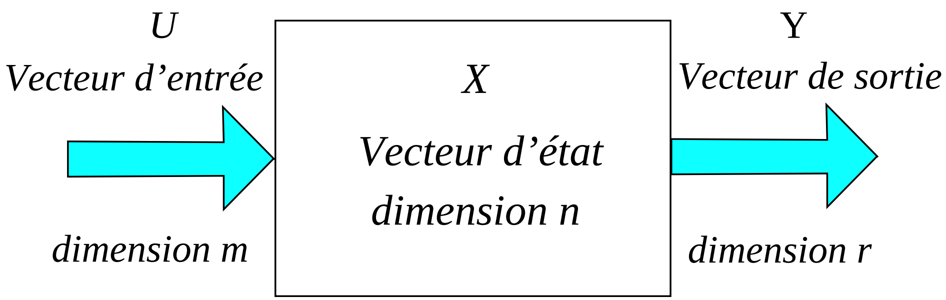
Nota :

- H. Poincaré : état thermodynamique d'un gaz (p, V, T)
- W.R. Hamilton : équations d'état de Hamilton : $\mathcal{H} = T + V = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2$

$$\begin{array}{lcl} \dot{q}_i(t) & = & \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{p}{M} \\ \dot{p}_i & = & -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -kq \end{array} \Leftrightarrow \dot{x}(t) = f(x) \text{ avec } x = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ M\dot{y} \end{bmatrix}$$

▼ Définition 1 : **Vecteur d'état**

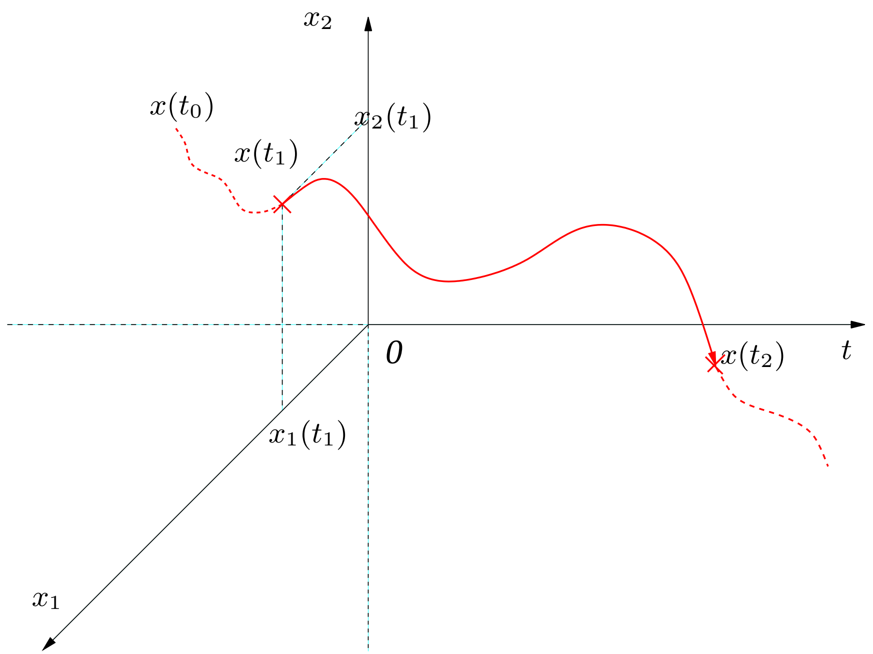
$x(t)$ est un vecteur contenant le nombre minimal de variables t.q. si pour t_0, $x(t_0)$ est connu alors la sortie $y(t_1)$ et l'état $x(t_1)$ peuvent être déterminés de manière unique pour tout $t_1 \geq t_0$ si $u(t)$ est connu sur l'intervalle $[t_0\ ,\ t_1]$



Le modèle interne : notion d'état (III)

L'état à l'instant t_0 d'un système doit constituer sa mémoire

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} z(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{t_0} z(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} z(\xi)d\xi = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(\xi)d\xi$$



Représentation d'état

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ équation dynamique

$y(t) = h(x(t), u(t), t)$ équation de mesure

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: vecteur de commande
- $y(t) \in \mathbb{R}^r$: vecteur de sortie
- $f \;:\; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$: fonction de Lipschitz / x, continue / u et continue par morceaux / t

Nota : pour $x(t_0)$ donné, $x(t) \in \mathcal{E}$ définit la trajectoire d'état

Il existe une fonction causale

$g\ :\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$ t.q. $(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0,t_1]}) \rightarrow x(t_1) = g(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0,t_1]})$ avec $x(t_1)$ unique

Il existe une fonction sans mémoire

$h\ :\ \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ t.q. $(t_1, x(t_1), u(t_1)) \rightarrow y(t_1) = h(t_1, x(t_1), u(t_1))$ avec $y(t_1)$ unique

Propriétés :

1- Propriété d'identité : $x(t_0) = g(t_0, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_0]})$

2- Propriété de causalité : si $u(t) = v(t)$ pour $t \in [t_0, t_1]$ alors

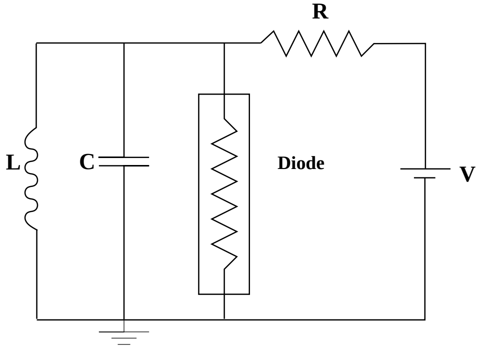
$$g(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0,t_1]}) = g(t_0, t_1, x(t_0), v_{[t_0,t_1]})$$

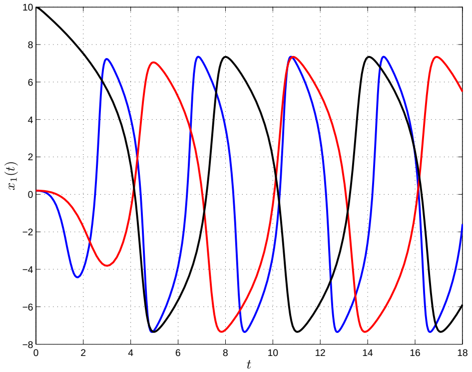
3- Propriété de semi-groupe : pour $t_0 < t_1 < t_2$ alors

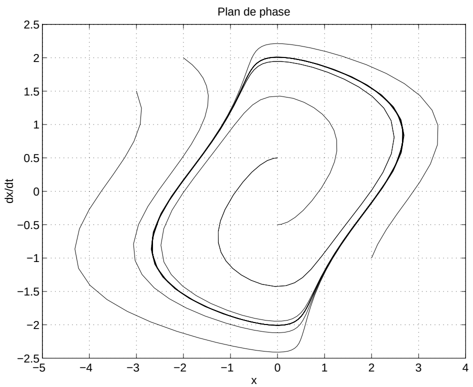
$$\begin{aligned} x(t_2) &= g(t_0, t_2, x(t_0), u_{[t_0,t_2]}) = g(t_1, t_2, x(t_1), u_{[t_1,t_2]}) \\ &= g(t_1, t_2, g(t_0, t_1, x(t_0), u_{[t_0,t_1]}), u_{[t_1,t_2]}) \end{aligned}$$

Exemple de modèle interne : oscillateur de Van der Pol

Van der Pol (Balthazar) 1889-1959







Radios à tubes à vide (diode tunnel)

Equation différentielle :

$$\ddot{v}(t) - \alpha(1 - \frac{v^2(t)}{\beta^2})\dot{v}(t) + \omega_0^2 v(t) = 0$$

$$\omega_0^2 = (LC)^{-1}$$

Equation d′état :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha(1 - \frac{x_1^2(t)}{\beta^2})x_2(t) - \omega_0^2 x_1(t)$$

- Equation différentielle non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

- Trajectoire nominale :

$$\dot{x}_0(t) = f(x_0(t), u_0(t), t)$$

- Perturbations/nominale :

$$u(t) - u_0(t) = \tilde{u}(t) \qquad t_0 \leq t \leq t_f$$

$$x(t_0) - x_0(t_0) = \tilde{x}(t_0)$$

$$x(t) - x_0(t) = \tilde{x}(t) \qquad t_0 \leq t \leq t_f$$

- Développement de Taylor :

$$\dot{x}_0(t) + \dot{\tilde{x}}(t) = f(x_0(t), u_0(t), t) + J_x(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{x}(t) + J_u(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{u}(t) + h(t)$$

- Matrices Jacobiennes :

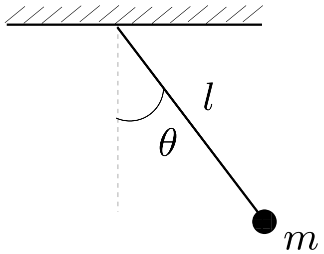
$$J_x = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \qquad J_u = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

- Equation d'état linéarisée :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = J_x(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{x}(t) + J_u(x_0(t), u_0(t), t)\tilde{u}(t) \quad t_0 \le t \le t_1$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t)$$

Exemple : pendule inverse



$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_{10}) - \frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

- Equation différentielle :

$$I_{zz}\ddot{\psi}(t) = u_z(t) = M(t) = F_c(t)d$$

- Vecteur d'état = variables de phase : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$
- Vecteur de sortie : $y(t) = \psi$
- Vecteur de commande : $u(t) = u_z(t)$
- Représentation d'état :

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_{zz} \end{bmatrix} u_z \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{array}}$$

▼ **Définition 2** : **La matrice de transition**

La solution de l'équation d'état homogène (non commandée) :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

où $A(t)$ est continue par rapport à t est :

$$x(t) = \Phi(t,\ t_0)x(t_0) \quad \forall\ t \geq t_0$$

où $\Phi(t,\ t_0)$ est **la matrice de transition**.

♥ **Propriétés 1** :

- $\Phi(t_2,\ t_1)\Phi(t_1,\ t_0) = \Phi(t_2,\ t_0)$ - $\Phi^{-1}(t,\ t_0) = \Phi(t_0,\ t) \quad \forall\ t,\ t_0$
- $\Phi(t,\ t_0)$ *est inversible* $\quad \forall\ t,\ t_0$

La solution de l'équation dynamique d'état $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est :

$$x(t) = \Phi(t,\ t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\ \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Soit l'ensemble de n conditions initiales linéairement indépendantes $x_i(t_0)$, $i = 1, \cdots, n$, alors il existe une solution unique $x_i(t)$, $i = 1, \cdots, n$ de l'équation homogène

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x_i(t_0)$$

On définit **la matrice fondamentale** (non unique) comme

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}$$

Par construction, $\varphi(t)$ vérifie $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$.

♥ **Propriétés 2** :

1- Matrices de transition et fondamentale :

$$\Phi(t, t_0) = \varphi(t)\varphi^{-1}(t_0)$$

2- La matrice de transition est l'unique solution de

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\ t_0) = A(t)\Phi(t,\ t_0), \qquad \forall\, t \geq t_0, \qquad \Phi(t_0,\ t_0) = \mathbf{1}_n$$

Soit le modèle Linéaire Temps Invariant (LTI)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m, \; y \in \mathbb{R}^r$

❒ **Théorème 1** *:*

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ *a pour matrice de transition*

$$\Phi(t, \; t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

où

$$e^{At} = \mathbf{1} + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} + \cdots$$

Le système LTI a pour solution :

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Exemple du satellite en spin constant :

Equation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_{zz} \end{bmatrix} u_z$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

La sortie :

$$\psi(t) = x_1(t) = x_{10} + t x_{20} + \frac{1}{I_{zz}} \int_0^t (t-\tau) u_z(\tau) d\tau$$

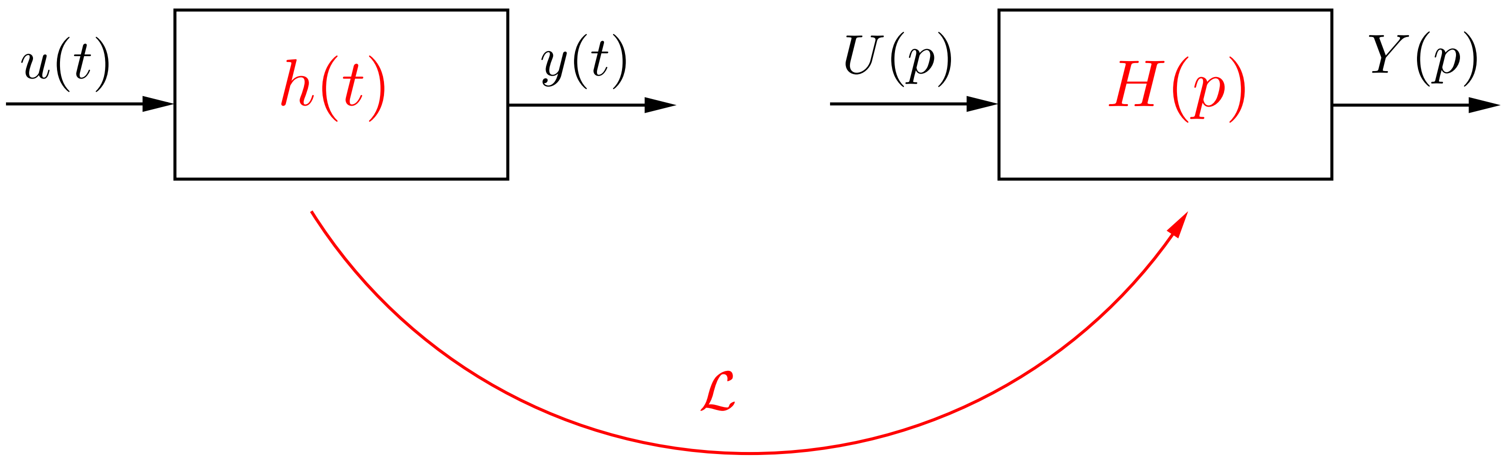
avec :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(0) = \dot{u}(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0 \\ y(0) = \dot{y}(0) = \cdots = y^{(n-1)} = 0 \end{array}}$$

$$y(t) = h(t) * u(t) \qquad\qquad Y(p) = H(p)U(p)$$



$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

❐ **Théorème 2** :

Pour $h(t)$ donnée, $y(t)$ est calculée par l'intégrale de convolution :

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Le produit de convolution :

$$y(t) = h(t) * u(t) = u(t) * h(t)$$

▼ **Définition 3** : *Réponse impulsionnelle*

Pour $H(p)$ donnée, la réponse impulsionnelle est

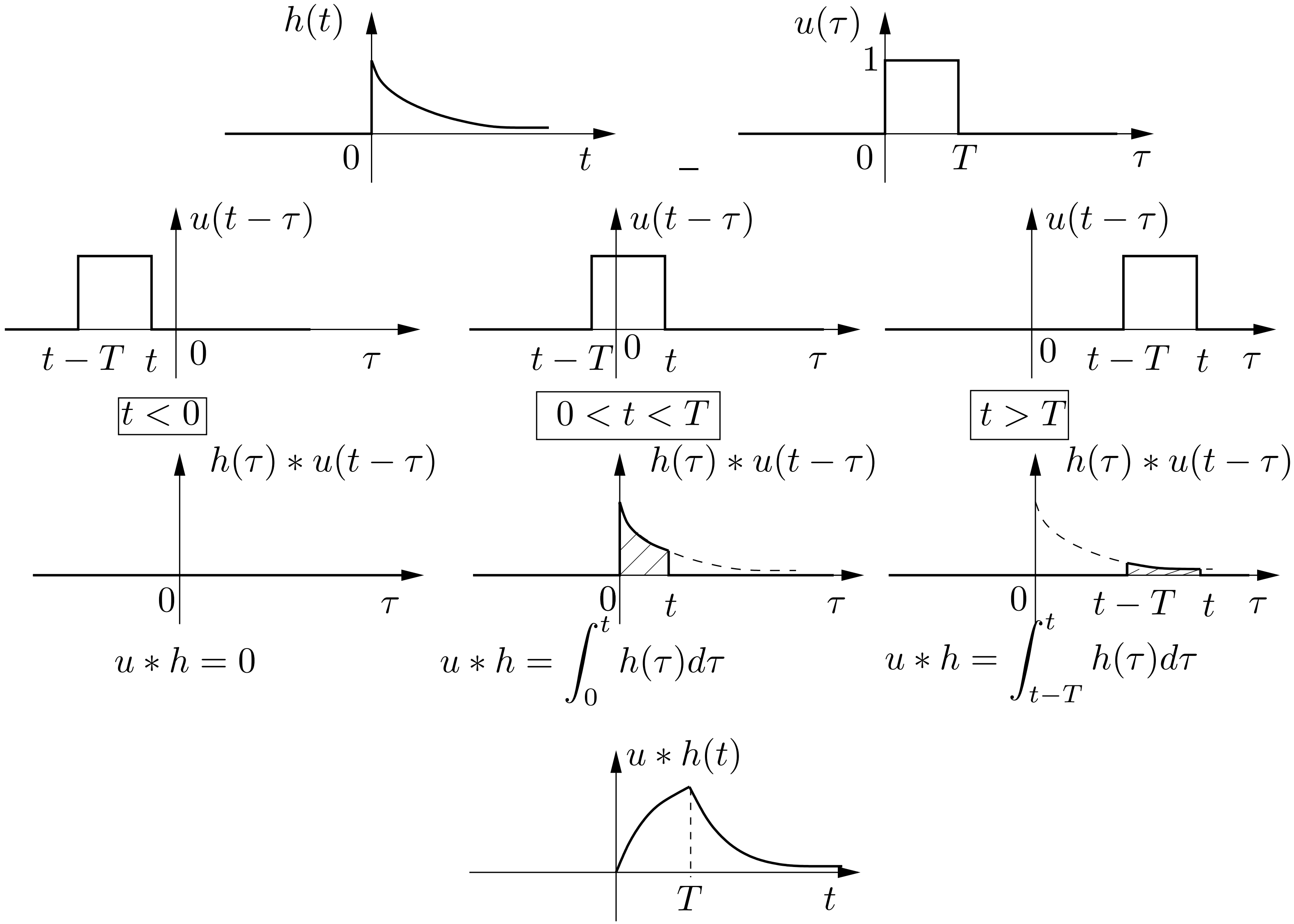
$$\boxed{h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)]}$$

✍ **Remarques 1** :

1- $H(p) = \mathcal{L}[h(t)]$

2- $y(t) = h(t) * u(t) \quad \Leftrightarrow \quad Y(p) = H(p)U(p)$

Illustration du produit de convolution



Exemple du satellite en spin constant :

- Equation différentielle :

$$I_{zz}\ddot{\psi}(t) = u_z(t) = M(t) = F_c(t)d$$

- Fonction de transfert (double intégrateur) :

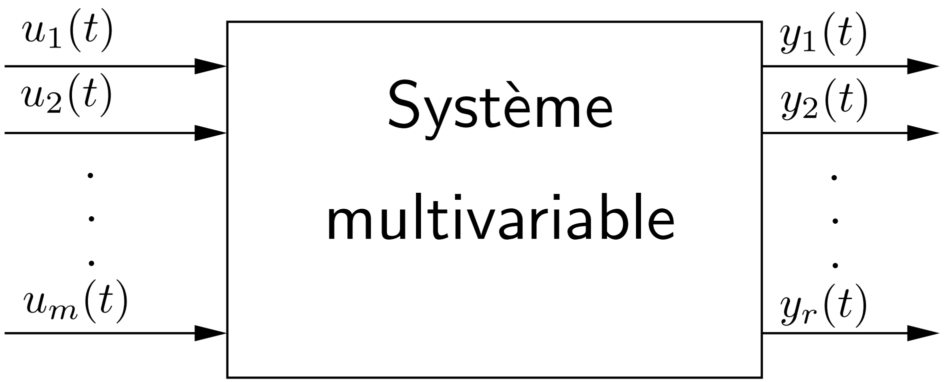
$$\psi(p) = \frac{1}{I_{zz}p^2}M(p)$$

$$G(p) = \frac{1}{I_{zz}p^2}$$

- Réponse impulsionnelle :

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)] = \frac{t}{I_{zz}}$$

La matrice de transfert



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p)$$
$$Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

Pour $x_0 = 0$,

$$Y(p) = (C(p\mathbf{1} - A)^{-1}B + D)U(p) = H(p)U(p) \qquad Y_i(p) = h_{ij}(p)U_j(p)$$

Matrice de réponse impulsionnelle :

▼ **Définition 4** : *la matrice de réponse impulsionnelle*

$$h(t) = Ce^{At}B \quad H(p) = \mathcal{L}[h(t)]$$

▼ **Définition 5** *: pôles et zéros d'un système*

Pour un système LTI de matrice de transfert $H(p)$, les pôles et les zéros sont respectivement les racines de $\pi_p(p) = 0$ et de $\pi_z(p) = 0$

1- Si le système est SISO (m=r=1) alors $H(p) = \dfrac{\pi_z(p)}{\pi_p(p)}$

2- Si le système est MIMO alors

- *Le polynôme caractéristique $\pi_p(p)$ est le plus petit commun dénominateur de tous les mineurs successifs non identiquement nuls de $H(p)$*
- *Pour m=r ($H(p)$ est une matrice carrée),* $\pi_z(p) = \det(H(p))\pi_p(p)$

Pour un système LTI de représentation d'état minimale (A, B, C, D)

- *Les pôles sont les valeurs propres de A*
- *les zéros sont les z_0 tels que* $M(z_0) = \begin{bmatrix} z_0\mathbf{1} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$ *n'est pas de rang maximal*

Nota : pour $n = m$, le système est propre et pour $n > m$, le système est strictement propre

- $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ et $I_{zz} = I_3$
- Découplage du mouvement autour de z / axes x et y
- Equations d'Euler de la cinématique linéarisées et découplées :

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_x - \omega_y\Omega(I_1 - I_3) &= u_x \\ I_1\dot{\omega}_y - \omega_x\Omega(I_3 - I_1) &= u_y \end{aligned}$$

- On pose $a = (1 - I_3/I_1)\Omega$ et $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} u_x/I_1 & u_y/I_1 \end{bmatrix}'$
- Equation de la dynamique :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- Equation de mesure :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x/I_1 \\ u_y/I_1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transfert :

$$(p\mathbf{1} - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + a^2} \begin{bmatrix} p & a \\ -a & p \end{bmatrix} \qquad G(p) = \frac{1}{p^2 + a^2} \begin{bmatrix} p - a^2 & a(p+1) \\ -a(p+1) & p - a^2 \end{bmatrix}$$

- Pôles et zéros :

$$\mathbf{P} = \{a * i, -a * i\} \qquad \mathbf{Z} = \emptyset$$

- Matrice de réponse impulsionnelle :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} \cos at - a \sin at & \sin at + a \cos at \\ -a \cos at - \sin at & -a \sin at + \cos at \end{bmatrix}$$