T.D. 3 de Mathématiques
de l'UF Outils mathématiques pour l'ingénieur.
Séries numériques et séries de fonctions.

Exercice I :

Etablir la divergence des séries de terme général défini par :

1. $n!$;
2. $n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ $(n \geq 1)$;
3. $(-1)^n$;
4. $\mathrm{sh}(n)$;
5. $\sin(n)$.

Exercice II :

Donner la nature des séries de terme général défini par :

1. $\dfrac{n!}{n^n}$;
2. $\dfrac{n!}{a^n}$ avec $a > 0$;
3. $\dfrac{2n}{n+2^n}$;
4. $\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ avec $a > 0$ et $b > 0$;
5. $\left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$.

Exercice III :

Donner la nature des séries de terme général défini par :

1. $\dfrac{\sin^2(n)}{n^2}$;
2. $\dfrac{\mathrm{ch}(1/n)}{n}$;
3. $\dfrac{a^n}{2-\sin(n)}$ avec $a > 0$;
4. $\dfrac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}}$;
5. $\dfrac{\mathrm{th}(n)}{n}$;
6. $e^{\sin(n)}$;
7. $\dfrac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n}$;
8. $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(n)}$.

Exercice IV :

Soit $(u_n)_{n \geq \nu}$ une suite à termes positifs, comparer la nature des séries dont le terme général est donné par :

1. u_n, $n \geq \nu$;
2. $\dfrac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq \nu$.

Exercice V :

On considère la série harmonique alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, vérifier que cette série est convergente sans l'être absolument. A l'aide de la formule de Mac-Laurin appliquée à $\ln(1+x)$, pour $x=0$ et pour $x=1$, trouver la valeur de la somme de cette série.

Exercice VI :

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $[0,3]$. Pour $n \geq 1$, le tableau de variations de f_n est donné dans la Figure 1.

x	0		1		2		3
$f_n(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{n^2}$	↘	$-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$	↗	$\dfrac{1}{n}$

FIGURE 1 – Tableau de variations de f_n, $n \geq 1$.

1. La série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge-elle normalement sur $[0,3]$? Justifier.
2. Donner un segment $[a,b]$ telle que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Exercice VII :

On suppose que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,3]$ vers S et que $\sum f_n'$ converge simplement sur $[0,3]$ vers G.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la Figure 2 donne le tableau de variations sur $[0,3]$ de $|f_n'|$ et de $|f_n|$.

t	0		$t_n = \frac{1}{n}$		3
$\lvert f_n'(t)\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	↘	$\frac{1}{n^2}$	↘	0
$\lvert f_n(t)\rvert$	0		↗		$\dfrac{e^{-n}}{n}$

FIGURE 2 – Tableau de variations des fonctions $|f_n'|$ et $|f_n|$ sur $[0,3]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S sur $[0,3]$ et que $\sum f_n'$ converge simplement vers G sur $[0,3]$.

1. Montrer que S est continue sur $[0,3]$.
2. (a) Montrer que $\sum f_n'$ ne converge pas normalement sur $[0,3]$.
   (b) Les renseignements collectés jusqu'ici suffisent-ils pour conclure quant à la dérivabilité de S sur $[0,3]$? Justifiez brièvement votre réponse.
   (c) Soit $a \in]0,3]$. Montrer que $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur $[a,3]$.
   (d) En déduire que S est dérivable sur $]0,3]$.

Exercice VIII :

Soit la série $\sum f_n$ de fonctions de terme général : $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{n!}, n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Etudier la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
   (b) Etudier la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.
   (c) Etudier la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[-a, a]$ avec $a > 0$.
2. Montrer que S est de classe C^1 (et même C^∞) sur $[-a, a]$ $(a > 0)$, puis sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que S est solution de l'EDO suivante :

$$y'(x) + 2xy(x) = 0, \qquad \text{avec :} \quad y(0) = 1.$$

   En déduire la valeur de S.

Exercice IX : On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement et calculer sa somme S.
2. Étudier la continuité sur $[0, 1]$ de f_n et de S. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
3. Étudier la convergence normale, puis uniforme de la série sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice X :
Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^3x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est continue sur $[a, +\infty[$, $a > 0$, puis sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que S est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, $a > 0$, puis sur $]0, +\infty[$.