T.D. de Mathématiques
de l'UF Outils mathématiques pour l'ingénieur.
Systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Exercice I :

Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer la matrice A et la fonction f permettant d'écrire le système comme une EDO :

$$X'(t) = AX(t) + f(t),$$

où $X(t)$ représente un vecteur de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Résoudre ensuite chaque système.

1. $(S_1)\ \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 4x - 2y \\ y' & = & x + y \end{array}\right.$
2. $(S_2)\ \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y + t^2 \\ y' & = & x - t^2 \end{array}\right.$
3. $(S_3)\ \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & x + 3y - z \\ z' & = & x + 2y \end{array}\right.$
4. $(S_4)\ \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x + y + z - 1 \\ y' & = & x - y + z - 1 \\ z' & = & x + y - z - 1 \end{array}\right.$
5. $(S_5)\ \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2x - y - 3 \\ y' & = & -2x + 3y + 1 \end{array}\right.$
6. $(S_6)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1 + x_2 \\ x_2' & = & -x_1 + x_2 \end{array}\right.$
7. $(S_7)\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1 - 3x_2 + \cos t \\ x_2'(t) & = & x_1 - 2x_2 + \sin t \end{array}\right.$

Exercice II : On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E)\quad y''' + y'' - y' - y = 0$$

1. (a) Ecrire l'équation (E) sous la forme d'un système de la forme : $X'(t) = AX(t)$.
   (b) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A.
   (c) En déduire les solutions de (S), puis de (E). De combien de constantes arbitraires dépendent les solutions de (E) ? Que peut-on en conclure ?
   (d) Vérifier que $y_1(t) = te^{-t}$ est solution de (E) et en déduire la solution générale de (E).
2. Proposer une méthode inspirée du cours pour résoudre l'équation (E) sans passer par les systèmes différentiels.

Exercice III : Calculer les exponentielles des matrices suivantes :

1. $A_1 = aI_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Généralisation : $A = I_n + N$ où N est une matrice nilpotente d'ordre p c'est-à-dire :

$$N^p = 0 \quad \text{mais} \quad N^{p-1} \neq 0.$$