T.D. de Mathématiques
de l'UF Outils mathématiques pour l'ingénieur.
Equations différentielles ordinaires.

Exercice I :

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes et préciser les intervalles où sont définies les solutions :

1. $y'(x) - 3y(x) = \cos x$.
2. $xy'(x) - 2y(x) = x^3$.
3. $(x^3 + x^2 + 1)y'(x) - \frac{1}{3}x(3x + 2)y(x) = 0$.
4. $xy'(x) + 2y(x) + x^5y^3(x)e^x = 0$.
5. $y(x) - y'(x) = y^2(x) + xy'(x)$.
6. $3y'(x) + y^2(x) + \frac{2}{x^2} = 0$.
7. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 2x$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
8. $x^2y''(x) - 2y(x) = x^3$.

Exercice II :

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

Indication : chercher $y(x)$ sous la forme x^α avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercice III :

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes en utilisant les changements de fonctions proposés :

1. $xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = e^x$, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, en posant : $z(x) = xy(x)$.
2. $\dfrac{xy'(x)}{y(x)^2} + \dfrac{3}{y(x)} = x^2$, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, en posant : $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

Exercice IV :

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) - y'(x) + 4x^3y(x) = 0,$$

en posant le changement de variable suivant : $t = x^2$, on notera $y(x) = z(t)$.

Exercice V :

Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes et préciser les intervalles où sont définies les solutions :

1. $x(x - 1)y'(x) + (x - n - 1)y(x) = 0$. *(Penser à la décomposition en éléments simples).*
2. $y' - \tan x\ y = \sin(2x)$ avec la condition $y(\pi) = 0$.
3. $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = x$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
4. $y''(x) + y(x) = \sin x$
5. $t^2y''(t) + ty'(t) - 4y(t) = t^2$.