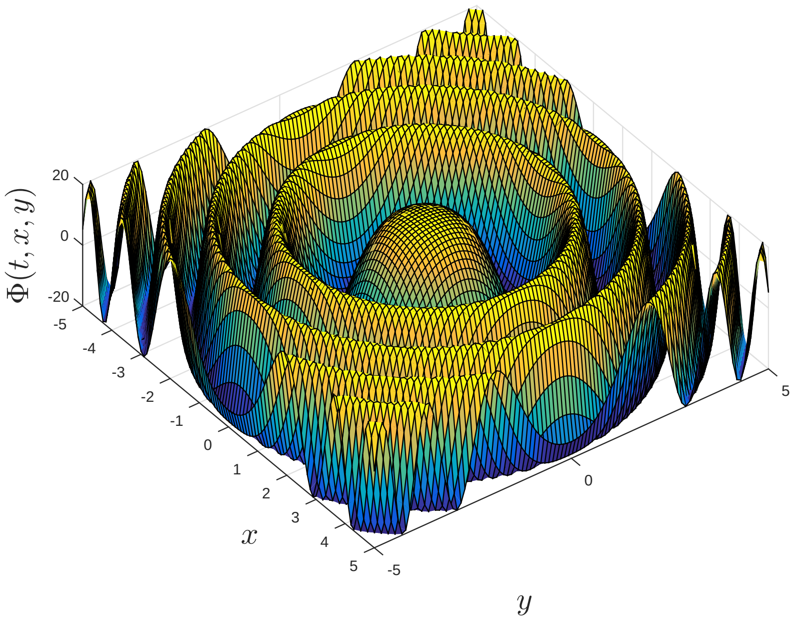
Introduction à l'Etude des Equations aux Dérivées Partielles Linéaires du Second Ordre



Informations pratiques

Enseignant Denis Arzelier : directeur de recherche au LAAS-CNRS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 - email : arzelier@laas.fr

Web-page http ://homepages.laas.fr/∼arzelier

Organisation du cours

❶ 10 cours 1h15 : 12h30

- ➪ Cours magistral en amphi avec transparents

❷ 10 séances TD 1h15 : 12h30

- ➪ Exercices d'application

❸ 1 examen intermédiaire : 1h15 + 1 examen final : 1h15

Enseignant Jean-Paul Vila : professeur INSA

Contact email : vila@insa-toulouse.fr

❶ 2 cours moodle 3h00 : 6h00

❷ 2 séances TP (Python) 3h00 : 6h00

Durée totale = 37h00

✔ Algèbre linéaire

❶ Calcul vectoriel et matriciel, espaces vectoriels et bases

❷ Valeurs propres λ, vecteurs propres v : $Av = \lambda v$, Ex. : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

✔ Résolution des ODE classiques

❶ Intégration / parties : $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$, Ex. : $\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$

❷ Intégration / chang. de var. : $\int_a^b u(v(t))v'(t)\mathrm{d}t = \int_{v(a)}^{v(b)} u(x)\mathrm{d}x$, Ex. : $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\mathrm{d}x$

❸ ODE à variables séparables $\dot{y} = f(x)g(y)$, Ex. : $\dot{y} = -\frac{2}{x}y$

❹ ODE homogènes et non homogènes linéaires à coefficients constants
$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = f(x)$, Ex. : $\ddot{y} = -y$

✔ Analyse des fonctions à plusieurs variables

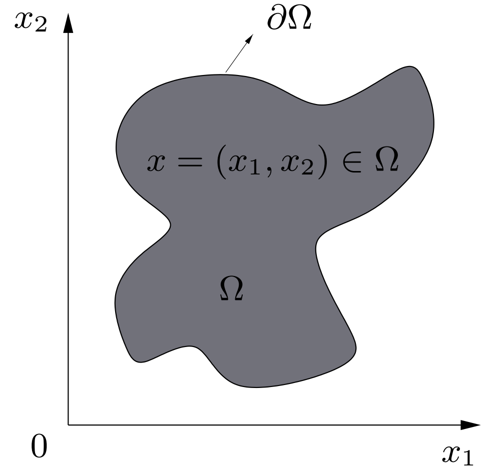
❶ Dérivées partielles Ex. : $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^4$

❷ Analyse vectorielle et opérateurs différentiels linéaires : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f), \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\overrightarrow{f}), \mathrm{div}(\overrightarrow{f}), \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{f}), \Delta(\overrightarrow{f})$,
Ex. : $\overrightarrow{f}(x,y,z) = [x^3 - 2xy + z \mid y^4 \mid z^3 - xyz]^T$

Définition 1 *On appelle* *Equation aux Dérivées Partielles (EDP)* *définie dans* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *et d'inconnue* $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *toute relation entre* Φ, $x = (x_1, \cdots, x_N)$ *et des dérivées partielles de* Φ *par rapport aux* x_j

$$F(x_1, \cdots, x_N, \Phi, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots) = 0$$

- ✔ La fonction Φ est une variable dépendante, (inconnue) de l'EDP
- ✔ L'ordre de l'EDP est n si la dérivée partielle d'ordre le plus élevé est d'ordre n
- ✔ N est la dimension ou nombre de variables indépendantes x_j de l'EDP
- ✔ Ω est le domaine d'appartenance des variables indépendantes
- ✔ L'EDP est dite homogène si elle ne contient que des termes en Φ et ses dérivées partielles
- ✔ L'EDP est dite linéaire quand elle l'est par rapport à Φ et à toutes ses dérivées partielles



EDP - Quelques exemples classiques et historiques (I)

✔ Equation des ondes (1747)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \Delta \Phi(t,x) = f(t,x)}$$

J. le Rond d'Alembert (1717-1783)

- c vitesse de l'onde, $f(t,x)$ force externe
- Corde vibrante : $\Phi(t,x)$ champ de déplacement vertical
- Acoustique linéaire : $\Phi(t,x)$ champ de pression du fluide
- Equation linéaire non homogène du second ordre
- Capteurs à corde vibrante : jauge de contrainte extensométrique (génie civil)

✔ Equation de la chaleur (1811)

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) - c^2 \Delta \Phi(t,x) = f(t,x)}$$

- $\Phi(t,x)$ champ de température, c^2 coefficient de diffusivité thermique
- $f(t,x)$ source de chaleur
- Equation linéaire non homogène du second ordre
- Diffusion de la chaleur, surface isolée, pas de convection
- Problème aux limites unidimensionnel : $\Phi(t,0) = 0$ et $\Phi(t,l) = 0$

J. Fourier (1768-1830)

EDP - Quelques exemples classiques et historiques (II)

✔ Equation dynamique de la poutre d'Euler-Lagrange (1750 - vibrations de flexion)

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t,x) + EI \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}(t,x) = f(t,x)}$$

L. Euler (1707-1783)

- $\mu = \rho S$ masse par unité de longueur, E module de Young, I moment d'inertie
- $\Phi(t,x)$ déformée verticale, $f(t,x)$ charge distribuée par unité de longueur
- Equation linéaire non homogène d'ordre 4
- Théorie de l'élasticité isotrope pour un matériau homogène
- Pas de cisaillement et pas de gauchissement

✔ Equations de l'élastodynamique (1821)

$$\boxed{\rho(x)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\lambda(x)\mathrm{div}\Phi - \sum_{j=1}^{3} \mu(x)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\right) = f_i(t,x),\ i = 1,2,3}$$

- ρ densité de masse, λ, μ coefficients de Lamé
- $\Phi(t,x)$ champ de déplacement, $f(t,x)$ force externe par unité de longueur
- Equation linéaire non homogène d'ordre 2
- Théorie de l'élasticité isotrope pour un matériau homogène
- Ondes sismiques, vibrations des structures

C.L.M.H. Navier (1785-1836)

Définition 2 *Un opérateur différentiel linéaire d'ordre n est défini comme opérant sur des fonctions suffisamment différentiables par :*

$$L[\Phi] = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(x) D^\alpha [\Phi]$$

où les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions de $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ est un multi-indice avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}$ et $\partial_j^{\alpha_j} = \dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j}$

♥ **Propriétés 1**

- *EDP linéaire :* $L[\Phi] = h$
- *Principe de superposition :* $L[\Phi_i] = h_i, \ \forall i = 1, \cdots, n$ *alors* $L\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$

Exemples : Laplacien : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, d'Alembertien : $\Box = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

E.D.P. linéaire d'ordre 2

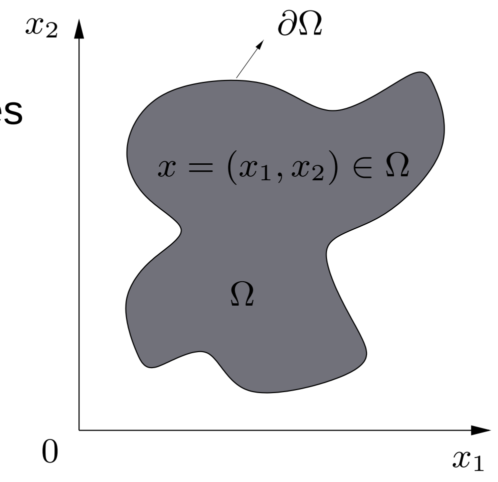
Définition 3 *On appelle E.D.P. linéaire d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *et d'inconnue* $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *une équation différentielle du type*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}(x)\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} + g(x)\Phi(x) = h(x)$$

Du fait que $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j \partial x_i}$, *on supposera que* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$

✔ Ecriture vectorielle : $A(x) : H\Phi(x) + F(x).\nabla\Phi(x) + g(x)\Phi(x) = h(x)$

- $A(x) = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$: matrice $N \times N$ symétrique des coefficients des termes d'ordre 2
- $F(x) = (f_i(x))_{1\le i\le N}$: vecteur de taille N des coefficients des termes d'ordre 1.
- $H\Phi(x)$: matrice Hessienne de Φ, $(H\Phi(x))_{ij} = \frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$
- $\nabla\Phi(x)$: vecteur gradient de Φ, $(\nabla\Phi(x))_i = \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}$
- Produit scalaire de Frobenius $A : B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}b_{ij}$



Définition 4 *Une E.D.P. linéaire du second ordre*

$$A(x) : H\Phi(x) + F(x).\nabla\Phi(x) + g(x)\Phi(x) = h(x)$$

est dite

- *elliptique en $x \in \Omega$ si les valeurs propres de $A(x)$ sont* ***non nulles*** *et* ***toutes de même signe***
- *hyperbolique en $x \in \Omega$ si les valeurs propres de $A(x)$ sont* ***non nulles*** *et* ***toutes de même signe*** *sauf* ***une de signe opposé***
- *parabolique en $x \in \Omega$ si les valeurs propres de $A(x)$ sont* ***non nulles de même signe*** *sauf* ***une nulle*** *et le vecteur propre $v(x)$ associé à cette v.p. est tel que $v(x).F(x) \neq 0$. Si $v(x).F(x) = 0$ alors l'EDP est dégénérée en x*

Remarques :

- Si $A(x) = x^T Ax$ alors $A(x) = K$ est l'équation d'un ellipsoide, hyperboloide, paraboloide
- L'opérateur $L_0[\Phi] = H\Phi$ est la partie principale de $L[\Phi]$
- $\neq$ phénomènes physiques $=$ différentes propriétés mathématiques

Classification des E.D.P. linéaires d'ordre 2 (II)

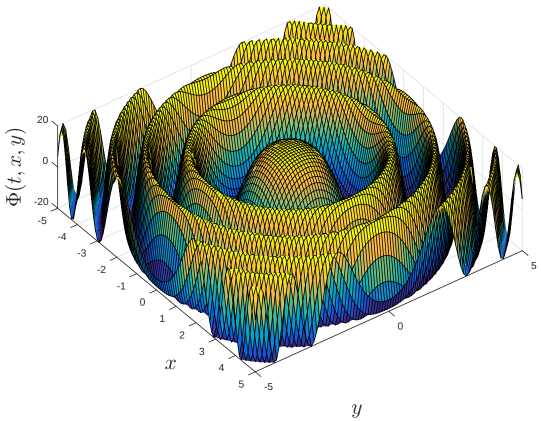
✔ EDP elliptiques

$$\boxed{\mathrm{div}(k(x)\nabla\Phi(x)) = f(x),\ k(x) > 0}$$

- Pb. d'équilibre ou stationnaire (température, pression, torsion...)
- Equation de Laplace $\Delta\Phi(x) = f(x)$


P.S. de Laplace (1749-1827)

✔ EDP hyperboliques



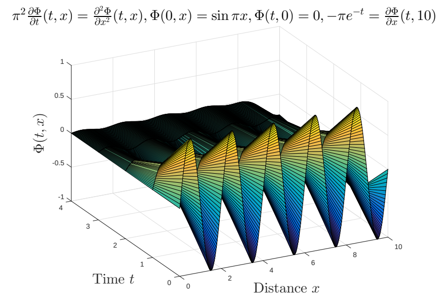
$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) - \mathrm{div}(c(x)\nabla\Phi(t,x)) = f(t,x),\ c(x) > 0}$$

- Propagation des ondes
- Equation des ondes $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) - c^2\Delta\Phi(t,x)) = f(t,x)$

✔ EDP paraboliques

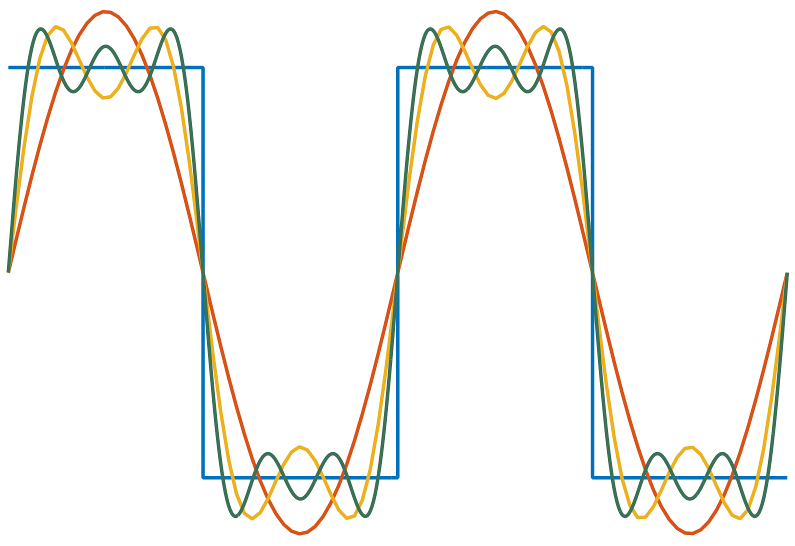
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) - \mathrm{div}(k(x)\nabla\Phi(t,x)) = f(t,x),\ k(x) > 0}$$

- Phénomènes de diffusion
- Equation de la chaleur $\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) - k\Delta\Phi(t,x)) = f(t,x)$



Analyse Harmonique

Séries de Fourier



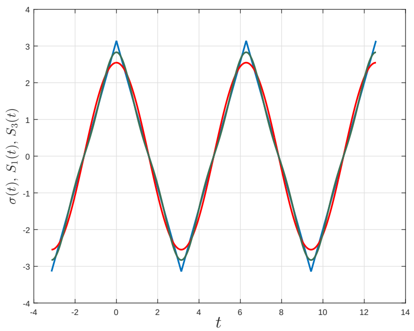
✔ Equation de la chaleur (1811)

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) - c^2 \Delta \Phi(t,x) = 0, \quad \Phi(t,0) = \Phi(t,1) = 0, \quad \Phi(0,x) = f(x),}$$

- « *Théorie analytique de la chaleur* » (1822)
- $\Phi_n(t,x) = a_n e^{-c^2\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x) + b_n e^{-c^2\pi^2 n^2 t} \cos(n\pi x)$
- $\Phi(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-c^2\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x) + b_n e^{-c^2\pi^2 n^2 t} \cos(n\pi x)$
- Utilisation de la méthode de séparation des variables

J. Fourier (1768-1830)

✔ Décomposition d'une fonction à l'aide de fonctions trigonométriques



- $f(t) \sim \sum a_n e^{2i\pi n t / T_0}$ pour f périodique de période T_0
- $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} \mathrm{d}t \right] e^{i2\pi\omega t} \mathrm{d}\omega$

Définition 5 *(Fonction T_0-périodique)*

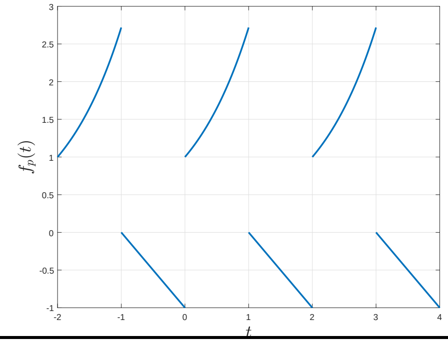
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est périodique de période* $T_0 > 0$ *ssi* $f(t + T_0) = f(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Ex. : $f_n(t) = e^{2i\pi n \frac{t}{T_0}}, \sin(2\pi n t/T_0), \cos(2\pi n t/T_0)$

Définition 6 *(Extension périodique)*

Soit f *fonction définie sur un intervalle de longueur* $2a$ *(l'intervalle* $(-a, a)$ *p.e.). L'extension périodique de* f *est la fonction notée* f_p *t.q.* $f_p(t + kT_0) = f(t) \quad \text{pour } T_0 = 2a,\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$

Ex. : $f(t) = \begin{cases} e^t, & t \in [0, \frac{T_0}{2}] \\ -t + \frac{T_0}{2}, & t \in]\frac{T_0}{2}, T_0[\end{cases}$



Proposition 1 *Pour* f T_0*-périodique alors* $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T_0} f(t)\mathrm{d}t$

Définition 7

$L_p^2(0,T_0)$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodiques de période T_0 t.q. $|f|^2$ est intégrable sur $[0, T_0]$

$$L_p^2(0,T_0) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \text{ de période } T_0 \text{ et } \int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty \right\}$$

Ex. :

- $\displaystyle\int_0^{T_0} \sin^2(2\pi n t/T_0)\mathrm{d}t = \frac{T_0}{2}$
- $f(t) = \begin{cases} e^t, & t \in [0, \frac{T_0}{2}] \\ -t + \frac{T_0}{2}, & t \in]\frac{T_0}{2}, T_0[\end{cases}$ avec $\displaystyle\int_0^{T_0} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(e^{T_0} - 1) + \frac{T_0^3}{24}$

Proposition 2 $(L_p^2(0,T_0), +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$*

- $f,\ g \in L_p^2(0,T_0) \ \Rightarrow f + g \in L_p^2(0,T_0)$
- $f \in L_p^2(0,T_0),\ \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda \in \mathbb{C}) \ \Rightarrow \lambda \cdot f \in L_p^2(0,T_0)$

$L^2_p(0, T_0)$ comme un espace préhilbertien

❒ **Axiomes 1** *Produit scalaire*

Pour f, g, $h \in L^2_p(0, T_0)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$

- $< f, f > \geq 0$ *et* $< f, f > = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$
- $< f + h, g > = < f, g > + < h, g >$ *et* $< f, g + h > = < f, g > + < f, h >$
- $< \lambda f, g > = \lambda < f, g >$ *et* $< f, \lambda g > = \overline{\lambda} < f, g >$
- $< f, g > = \overline{< g, f >}$

Proposition 3 *L'espace vectoriel* $(L^2_p(0, T_0), +, \cdot)$ *muni du produit scalaire* $< f, g >$ *est un espace préhilbertien sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$*. De plus, l'application* $\| \cdot \|_2 \ : \ L^2_p(0, T_0) \to \mathbb{R}$*, appelée moyenne quadratique de* f *est une norme*

$$< f, g > = \int_0^{T_0} f(t)\overline{g}(t)\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

Ex. : $< \sin(2\pi nt/T_0), \cos(2\pi nt/T_0) > = 0$, $< e^{2i\pi nt/T_0)}, e^{2i\pi mt/T_0} > = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \neq m \\ T_0 & \text{pour} \quad n = m \end{cases}$

Définition 8 *(Orthogonalité)*

Deux fonctions f *et* g *de* $L_p^2(0,T_0)$ *sont orthogonales* $f \perp g$ *ssi* $< f, g >= \int_0^{T_0} f(t)\overline{g}(t)\mathrm{d}t = 0$

♥ **Propriétés 2** *Pour* f, $g \in L_p^2(0,T_0)$

- *Inégalité de Schwartz :* $|< f, g >| \leq \sqrt{< f, f > \cdot < g, g >} = \|f\| \cdot \|g\|$
- *Identité du parallélogramme :* $< f+g, f+g > + < f-g, f-g >= 2(< f, f > + < g, g >)$
- *Théorème de Pythagore :* $f \perp g \Rightarrow \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$

Définition 9 *(Presque Partout)*

$$f = 0 \;\; \text{presque partout (p.p.)} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f\|_2 = 0$$

$$f = g \;\; \text{p.p.} \quad \Longleftrightarrow \quad f - g = 0 \;\; \text{p.p.}$$

Proposition 4 *L'EV* $(L_p^2(0,T_0), +, \cdot)$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_2 = \sqrt{< \cdot, \cdot >}$ *est un espace de Hilbert (espace préhilbertien complet) sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$

Convergence dans $L_p^2(0,T_0)$ (en moyenne quadratique)

Définition 10 *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n \in L_p^2(0,T_0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ converge en moyenne quadratique (ou converge dans $L_p^2(0,T_0)$) si $\exists\, f \in L_p^2(0,T_0)$ t.q.*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{T_0}|f_n(t)-f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_2 = 0$$

Ex. : $f_n(t) = \dfrac{\sin(2n\pi t/T_0)}{n}$ CS vers $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ et converge vers $f \equiv 0$ dans $L_p^2(0,T_0)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{T_0}|f_n(t)|^2\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{T_0}{2n^2} = 0$$

♥ **Propriétés 3** *Pour $f_n \underset{L_p^2}{\longrightarrow} f$ et $g_n \underset{L_p^2}{\longrightarrow} g$*

1- $a,\ b \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty}\|af_n + bg_n\|_2 = af + bg$

2- $h \in L_p^2(0,T_0)$, $\lim_{n\to+\infty} < h, f_n > = < h, f >$ *(convergence faible)*

3- $\lim_{n\to+\infty} < f_n, g_n > = < f, g >$ *(continuité du produit scalaire)*

4- $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_2 = \|f\|_2$

Définition 11 *Système orthogonal et orthonormal*

Une ensemble $S = \{\phi_0, \cdots, \phi_n, \cdots\}$ *d'éléments d'un espace préhilbertien* H *est un système orthogonal si* $\phi_i \perp \phi_j$, $i \neq j$. *Il est orthonormal si de plus* $\|\phi_i\| = 1, \forall\, \phi_i \in S$

Ex. :

- Dans $L_p^2(0, T_0)$ sur $\mathbb{C}$ avec $< f, g >= \int_0^{T_0} f(t)\overline{g}(t)\mathrm{d}t$, le système de fonctions $\{e_0(t), \cdots, e_n(t), \cdots\}$ avec $e_n(t) = \dfrac{e^{2i\pi nt/T_0}}{\sqrt{T_0}}$, $n \in \mathbb{Z}$ est un système orthonormal de $L_p^2(0, T_0)$ sur $\mathbb{C}$ puisque

$$< e_n, e_m >= \int_0^{T_0} e_n(t)\overline{e}_m(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{2i\pi(n-m)t/T_0}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \neq m \\ 1 & \text{pour} \quad n = m \end{cases}$$

- Le système $\left\{1, \cos\left(\dfrac{2\pi nt}{T_0}\right), \sin\left(\dfrac{2\pi nt}{T_0}\right), \; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est un système orthogonal de $L_p^2(0, T_0)$ sur $\mathbb{R}$ avec $< f, g >= \int_0^{T_0} f(t)g(t)\mathrm{d}t$

♥ **Propriétés 4** *Dans un espace de Hilbert* H*, un système orthogonal d'éléments non nuls est un système linéairement indépendant*

Définition 12 *On appelle polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N les fonctions*

$$\gamma_n \in \mathbb{C},\ p(t) = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{\frac{2i\pi n t}{T_0}} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} + \beta_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0},\ \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{C}$$

ou dans le cas réel

$$p(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos\frac{2\pi n t}{T_0} + \beta_n \sin\frac{2\pi n t}{T_0},\ \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{R}$$

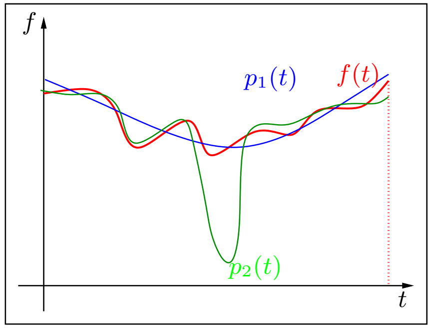
avec $\alpha_n = \gamma_n + \gamma_{-n} \quad \text{et} \quad \beta_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n}),\ \forall\, n \geq 0$

♥ **Propriétés 5** *L'espace $(\mathcal{P}_N, +, \cdot)$, muni du produit scalaire $< p, q >_{T_0} = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} \overline{p}(t)q(t)\mathrm{d}t$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N est un espace vectoriel préhilbertien de dimension $2N+1$ sur $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$. $\{e^{-2i\pi n t/T_0}, e^{2i\pi n t/T_0},\ n \in \mathbb{N},\ n \leq N\}$ et $\{\cos(2\pi n t/T_0),\ 1,\ \sin(2\pi n t/T_0),\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \leq N\}$ forment respectivement un système orthonormal et un système orthogonal dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{P}_N, +, \cdot)$*

Nota : $\mathcal{P}_N \subset L^2_p(0, T_0)$ et $\|p\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} |\gamma_n|^2$

- Ecart maximum $\max |f - p_1|$
- Ecart quadratique moyen

$$\left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [f(t) - p_2(t)]^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$



Problème : **Meilleure approximation en moyenne quadratique**

Etant donnés $f \in L_p^2(0, T_0)$ et un degré fixé $N \in \mathbb{N}^*$, déterminer les coefficients γ_n de $p_N^* \in \mathcal{P}_N$ minimisant l'écart quadratique avec f i.e.

$$p_N^* = \mathrm{Arg}\left[\min_{p \in \mathcal{P}_N} \|f - p\|_2\right] = \mathrm{Arg}\left[\min_{p \in \mathcal{P}_N} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}} \right\|_2\right]$$

Théorème 1

- p_N^* est *unique*
- $p_N^*(t) = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}}$, $\gamma_n =< f, e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}} >_{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{\frac{-2i\pi nt}{T_0}} \mathrm{d}t$
- p_N^* est *la projection orthogonale de* f *sur* $\mathcal{P}_N$, $< f - p_N^*, p >_{T_0} = 0, \; \forall \, p \in \mathcal{P}_N$

Approximation quadratique dans $L_p^2(0,T_0)$:

$$f(t) \simeq \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{\dfrac{2i\pi nt}{T_0}} \quad \text{ou} \quad f(t) \simeq \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos\frac{2\pi nt}{T_0} + \beta_n \sin\frac{2\pi nt}{T_0}$$

Pour $f \in L_p^2(0,T_0)$ et pour un système orthonormal $S = \{\cdots, \phi_{-n}, \cdots, \phi_n, \cdots\}$ de $L_p^2(0,T_0)$

$$\boxed{f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\phi_n = \Sigma(f)?}$$

<u>3 Questions :</u>

- Quelles conditions sur f et sur $\{\cdots, \phi_{-n}, \cdots, \phi_n, \cdots\}$ t.q. $\Sigma(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\phi_n$ converge ?
- Si le développement converge, comment calculer $\{\cdots, c_{-n}(f), \cdots, c_n(f), \cdots\}$?
- $f = \Sigma(f)$?

Définition 13 *Soient* $S = \{\cdots, \phi_{-n}, \cdots, \phi_n, \cdots\}$ *un système orthogonal de* $L_p^2(0, T_0)$ *doté de* $< \cdot, \cdot >$ *et la fonction* $f \in L_p^2(0, T_0)$*, la série de fonctions définie comme*

$$f \sim \Sigma(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n \text{ avec } c_n(f) = \frac{< f, \phi_n >}{< \phi_n, \phi_n >}, \; n \in \mathbb{Z}$$

est la série de Fourier générée par f *et les* c_n *sont les coefficients de Fourier de* f *relativement à* S

Théorème 2 *Soit* $f \in L_p^2(0, T_0)$*,* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *alors* f *est égale presque partout à (converge en moyenne quadratique vers) sa série de Fourier :*

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \frac{e^{2i\pi nt/T_0}}{\sqrt{T_0}} \quad \text{presque partout} \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \quad \text{presque partout} \end{aligned}$$

avec $a_0 = \frac{2c_0}{\sqrt{T_0}}, \quad a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{T_0}}, \quad b_n = \frac{i(c_n - c_{-n})}{\sqrt{T_0}}$ et $p_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}} = S_N(f)$

- Pour $(L^2_p(0, T_0), < \cdot, \cdot >)$ sur $\mathbb{C}$ et le système orthonormal $S = \{1, \frac{e^{2i\pi t/T_0}}{\sqrt{T_0}}, \cdots, \frac{e^{2i\pi nt/T_0}}{\sqrt{T_0}}, \cdots, \}$, les coefficients de Fourier exponentiels de $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \frac{e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}}}{\sqrt{T_0}}$ sont

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_a^{a+T_0} f(t) e^{\frac{-2i\pi nt}{T_0}} \mathrm{d}t \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{R}}$$

- Pour $(L^2_p(0, T_0), < \cdot, \cdot >)$ sur $\mathbb{R}$ et $S = \left\{1, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de $f(t) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)$ sont

$$\boxed{\begin{array}{lcl} a_n(f) & = & \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \mathrm{d}t \quad \text{pour tout n} \in \mathbb{N} \\ b_n(f) & = & \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \mathrm{d}t \quad \text{pour tout n} \in \mathbb{N}^* \end{array}}$$

L'amplitude et la phase sont définis par

$$\rho_n(f) = \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} \text{ et } \phi_n(f) \in [-\pi; \pi[\text{ tel que } \cos(\phi_n) = \frac{a_n}{\rho_n} \text{ et } \sin(\phi_n) = \frac{b_n}{\rho_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriétés des coefficients de Fourier de $f \in L^2_p(0, T_0)$

♥ **Propriétés 6**

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_0 = \frac{a_0\sqrt{T_0}}{2},\ c_n = \frac{(a_n - ib_n)\sqrt{T_0}}{2},\ c_{-n} = \frac{(a_n + ib_n)\sqrt{T_0}}{2}$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_0 = \frac{2c_0}{\sqrt{T_0}},\ a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{T_0}},\ b_n = \frac{i(c_n - c_{-n})}{\sqrt{T_0}}$
- *Linéarité :* $c_n(af + bg) = ac_n(f) + bc_n(g)$ *pour* $a, b \in \mathbb{C}$, $f, g \in L^2_p(0, T_0)$
- *Symétrie hermitienne :* *si* $f \in L^2_p(0, T_0)$ *sur* $\mathbb{R},\ c_{-n}(f) = \overline{c}_n(f)$
- *Parité :* *Si* f *est impaire, alors* $c_{-n}(f) = -c_n(f)$, $a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right)\mathrm{d}t,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. *Si* f *est paire, alors* $c_{-n}(f) = c_n(f)$, $a_n(f) = \dfrac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right)\mathrm{d}t$ *et* $b_n(f) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
- *Dilatation :* *soit* $f_d(t) = f(t/d)$, $d > 0$ *alors si* $f \in L^2_p(0, T_0)$, $f_d \in L^2_p(0, dT_0)$, $c_n(f_d) = \sqrt{d}c_n(f)$
- *Translation :* *Pour* $h \in \mathbb{R}$, $f_h(t) = f(t - h) \in L^2_p(0, T_0)$ *si* $f \in L^2_p(0, T_0)$ *et*

$$c_n(f_h) = e^{-2\pi i n h/T_0} c_n(f)$$

- *Dérivation :* *si* f *est dérivable et* f' *est continue alors*

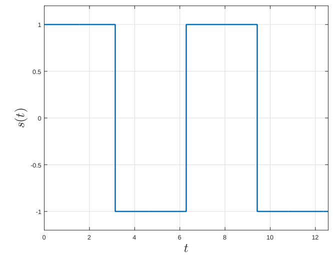
$$c_n(f') = \frac{2\pi i n}{T_0} c_n(f)$$

- *Unicité :* *si* $f \in L^2_p(0, T_0)$ *et* $g \in L^2_p(0, T_0)$, *alors*

$$f = g \text{ p.p.} \ \Leftrightarrow\ c_n(f) = c_n(g)$$

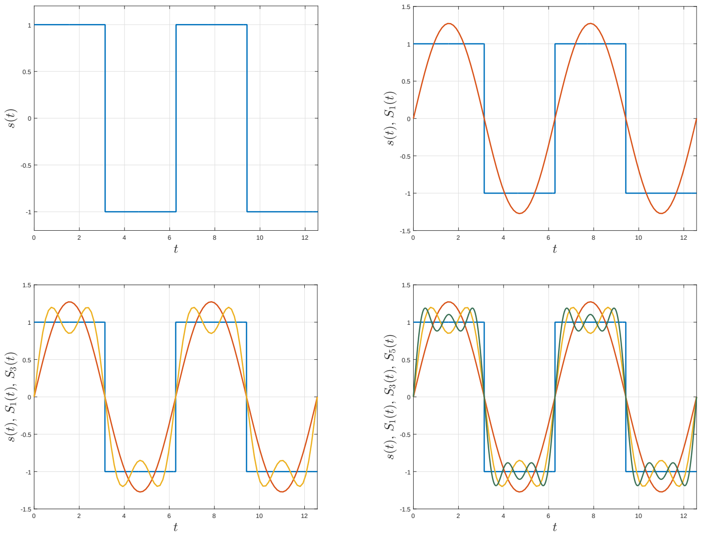
Développements en séries de Fourier : exemple I

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $s(t) = 1$ pour $t \in [0, \pi[$, $s(t) = -1$ pour $t \in [\pi, 2\pi[$ et s est périodique de période 2π



Calcul des coefficients de Fourier trigonométriques :

- s est une fonction impaire donc $a_n = 0$
- $b_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} s(t)\sin(2\pi n t/T_0)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \text{ pair} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{pour} \quad n \text{ impair} \end{cases}$



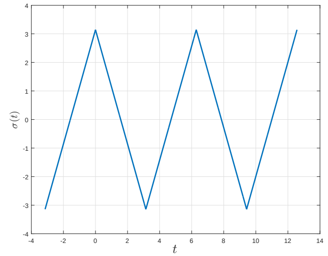
$$s(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \cdots\right)$$

$$S_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t)$$

$$S_3(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t)\right)$$

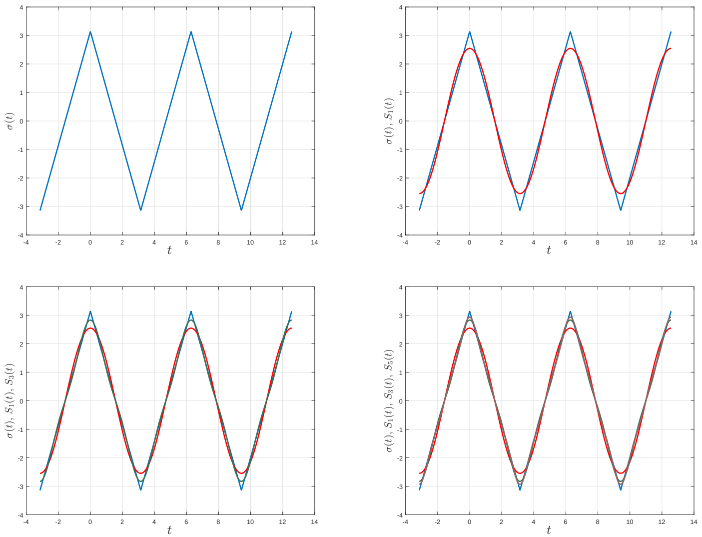
$$S_5(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)\right)$$

Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sigma(t) = \pi - 2t$ pour $t \in [0, \pi[$, paire, et périodique de période 2π



Calcul des coefficients de Fourier trigonométriques :

- σ est une fonction paire donc $b_n = 0$
- $a_n = \dfrac{2}{T_0} \displaystyle\int_0^{T_0} \sigma(t) \cos(2\pi n t / T_0) \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(t) \cos(nt) \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad n \text{ pair} \\ \dfrac{8}{n^2 \pi} & \text{pour} \quad n \text{ impair} \end{cases}$



$$S_1(t) = \frac{8}{\pi} \cos(t)$$

$$S_3(t) = \frac{8}{\pi} \left(\cos(t) + \frac{1}{9} \cos(3t) \right)$$

$$S_5(t) = \frac{8}{\pi} \left(\cos(t) + \frac{1}{9} \cos(3t) + \frac{1}{25} \cos(5t) \right)$$

♥ **Propriétés 7** *Pour* $f \in L_p^2(0,T_0)$ *et* $c_n(f)$ *les coefficients de Fourier exponentiels de* f,

$$\boxed{\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \|f\|_2^2,\ \forall\, N \in \mathbb{N}}$$

<u>Preuve :</u> *en posant* $f_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ *alors* $f - f_N \perp f_N$ *donc*

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2 \geq \|f_N\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \text{ et } \|f\|_2^2 = \int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty \text{ et } \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_0^{T_0} f(t) e^{-2i\pi n t/T_0} \mathrm{d}t = 0$$

De plus, $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^{T_0} \left| f(t) - \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{2i\pi n t/T_0} \mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}t = 0$

<u>Nota :</u> $f = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e_n$ dans $L_p^2(0,T_0)$ mais pas $f(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{2i\pi n t/T_0}$ pour t donné

♥ **Propriétés 8** *Egalité de Parseval*

Pour $f \in L^2_p(0, T_0)$,

$$\boxed{\int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2}$$

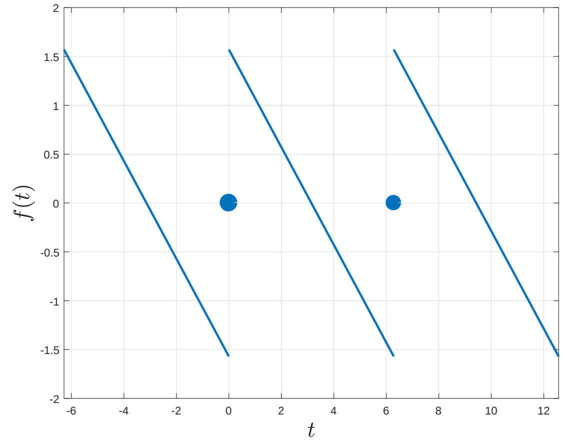
qui s'écrit dans le cas réel :

$$\boxed{\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}|a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}$$

Preuve : à partir de l'inégalité de Bessel, en posant $f_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$ alors $f - f_N \perp f_N$ donc $\|f\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2$ et avec $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_2 = 0$, on obtient $\lim_{N\to\infty} \|f_N\|_2^2 = \|f\|_2^2$ soit $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$

Formule de Parseval : exemple

Soit la fonction f périodique de période 2π t.q. $f(k\pi) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ pour $0 < t < 2\pi$



f est une fonction impaire donc $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(2\pi n t/T_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

donc

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{n}$$

et d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

d'où :

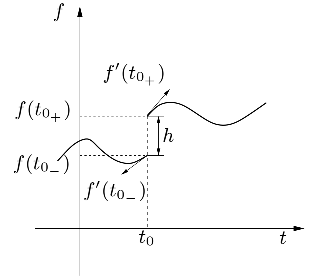
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Convergence simple des séries de Fourier (I)

Théorème 3 *(Dirichlet)*

Soit $f \in L_p^2(0, T_0)$ fonction C^1 par morceaux sur I (f continue par morceaux, dérivable sur I sauf en un nombre fini de points et à dérivée continue par morceaux), alors :

- *Si f est discontinue en t_0 alors $\Sigma(f)$ converge vers $\dfrac{f(t_{0_+}) + f(t_{0_-})}{2}$ en t_0*
- *Si f est continue en t_0 alors $\Sigma(f)$ converge vers $f(t_0)$ en t_0*



Ex. :

$$S(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t) = \begin{cases} s(t) & \text{si } t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

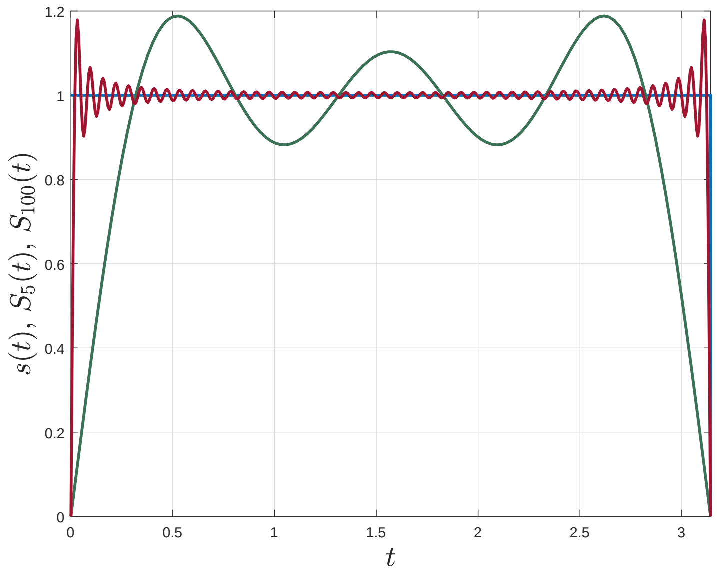
$$\Sigma(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t) = \sigma(t), \quad \text{quel que soit } t \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$

Soit la série de Fourier tronquée $f_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{c_n e^{2\pi i n t/T_0}}{\sqrt{T_0}}$ de la fonction T_0-périodique f continue par morceaux

- Si f a une discontinuité d'amplitude h en t_0 alors $f_N(t)$ exhibe des oscillations au voisinage de la discontinuité t_0 dont le dépassement maximal $\sim 9\% h$ à la discontinuité
- Pour N croissant, le dépassement se rapproche de la discontinuité mais son amplitude reste finie et non nulle
- Seule la surface de ces oscillations tend vers 0 quand $N \to \infty$

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} f_N(t_0/N) = \frac{2h}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \simeq \frac{1.1789h}{2}}$$



$$s(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \cdots\right)$$

$$S_5(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)\right)$$

$$\max_{t\in[0,2\pi]} S_5(t) = 1.1884 \text{ pour } t = \pi/6 \simeq 0.5236$$

$$\max_{t\in[0,2\pi]} S_{100}(t) = 1.1790 \text{ pour } t \simeq 0.0315$$

Notion de spectre discret de fréquences

Pour une fonction $f \in L^2_p(0,T_0)$,

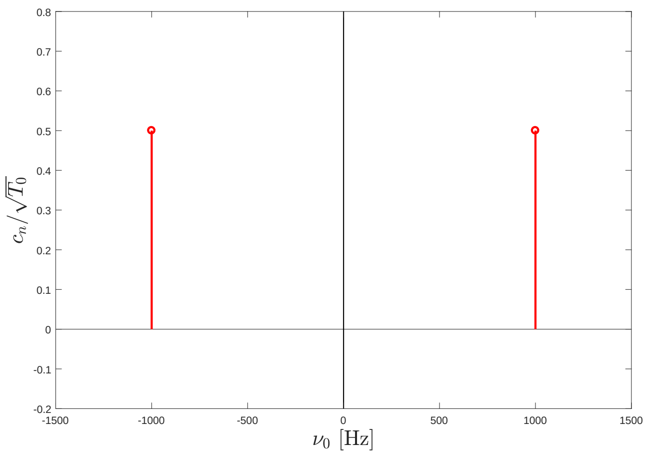
Equation de synthèse :	Equation d'analyse :
$f(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{in\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}}$	$c_n \quad = \quad \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} f(t) \frac{e^{-in\omega_0 t}}{\sqrt{T_0}} \mathrm{d}t$

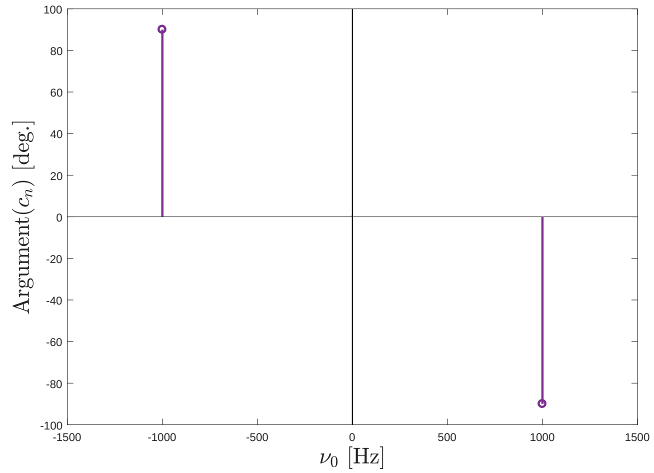
- c_n mesure la corrélation de $f(t)$ avec $e^{-in\omega_0 t}$
- c_n contient l'amplitude et la phase du contenu fréquentiel de la fonction f en $\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}$
- $\frac{\omega_0}{2\pi}$ est la fréquence fondamentale
- $\{(n/T_0, c_n)\},\ n \in \mathbb{Z}$ définit le spectre fréquentiel ou spectre de Fourier
- Pour $f \in L^2_p(0,T_0)$, le spectre fréquentiel est
  - ✔ discret (réparti sur les harmoniques) en $\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0},\ n \in \mathbb{Z}$
  - ✔ complexe $c_n = |c_n| e^{i\theta_n} \in \mathbb{C},\ \theta_n \in [-\pi, \pi[$
    - Spectre d'amplitude $(n/T_0, |c_n|)$ (fondamentale $|n| = 1$ et harmoniques $|n| > 1$)
    - Spectre de phase $(n/T_0, \theta_n)$

Notion de spectre discret de fréquences : exemples

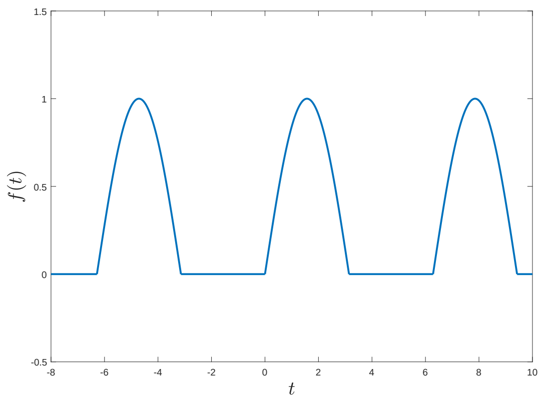
✔ $f(t) = \sin(2000\pi t), \nu_0 = 1$ kHz

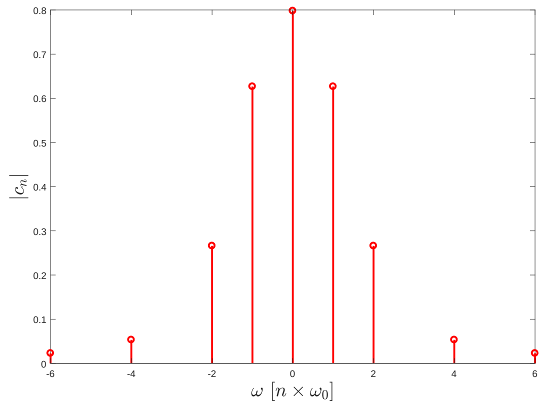
- f impaire
- $c_1 = -c_{-1} = \dfrac{\sqrt{T_0}}{2i}$
- $c_n = c_{-n} = 0$





✔ Redressement mono-alternance $f(t) = \begin{cases} A\sin(\omega_0 t) & t \in [0, T_0/2] \\ 0 & t \in [T_0/2, T_0] \end{cases}$





- $c_0 = \dfrac{A\sqrt{T_0}}{\pi}$, $c_1 = -c_{-1} = \dfrac{A\sqrt{T_0}}{4i}$,
  $c_{2p} = \dfrac{A\sqrt{T_0}}{\pi(1-4p^2)}$
- $f(t) = A\left[\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{\sin(\omega_0 t)}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2p\omega_0 t)}{1-4p^2}\right]$

❶ Développement en séries de Fourier :

$$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},\ s \in L^2_p(0,T)$$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_a^{a+T} s(t) e^{-2in\pi \frac{t}{T}} \mathrm{d}t,\ n \in \mathbb{Z}$$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} s(t) \cos(2n\pi \frac{t}{T}) \mathrm{d}t,\ n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_a^{a+T} s(t) \sin(2n\pi \frac{t}{T}) \mathrm{d}t,\ n \geq 1 \end{aligned}$$

s impaire

$$\begin{aligned} a_n &= 0,\ n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(2n\pi \frac{t}{T}) \mathrm{d}t,\ n \geq 1 \end{aligned}$$

s paire

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(2n\pi \frac{t}{T}) \mathrm{d}t,\ n \in \mathbb{N} \\ b_n &= 0,\ n \geq 1 \end{aligned}$$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\sqrt{T}} c_0 \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} (c_n + c_{-n}),\ n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} (c_n - c_{-n}),\ n \geq 1 \end{aligned}$$

$s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2in\pi \frac{t}{T}}$$

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2n\pi \frac{t}{T}) + b_n \sin(2n\pi \frac{t}{T}))$$

❷ Convergence de $S(t)$ vers $s(t)$ (A-t-on $S(t) = s(t)$?) : Th. de Dirichlet : Soit $s \in L^2_p(0,T)$ continue par morceaux

- Si s est différentiable en t_0 alors $S(t_0) = s(t_0)$
- Si s est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors $S(t) = \begin{cases} s(t) & \text{si} \quad \text{s est continue en t} \\ \dfrac{s(t_+) + s(t_-)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

❸ Calcul de séries particulières :

1- Dirichlet + valeurs de t

2- Couper en indices pairs/impairs

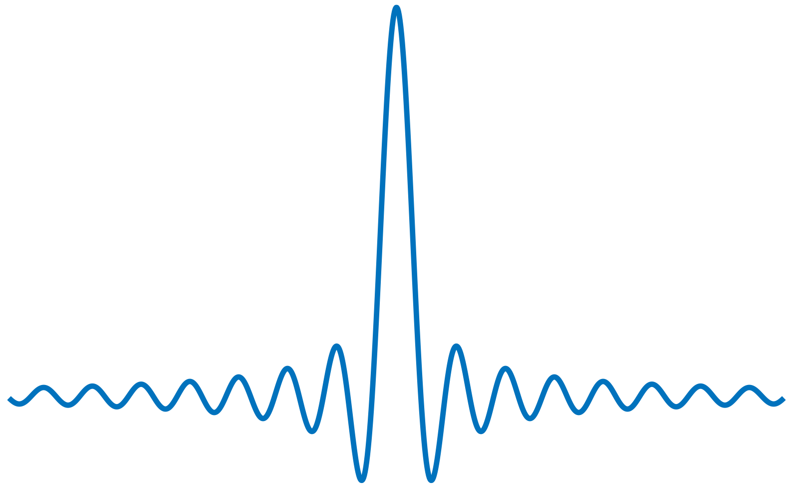
3- Parseval

$$\int_0^T |s(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

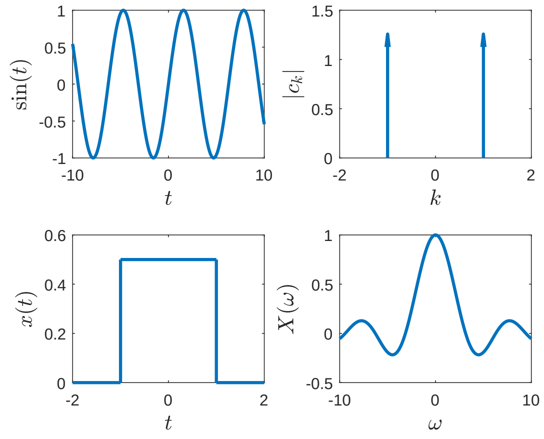
$$\frac{2}{T} \int_0^T |s(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Analyse Harmonique

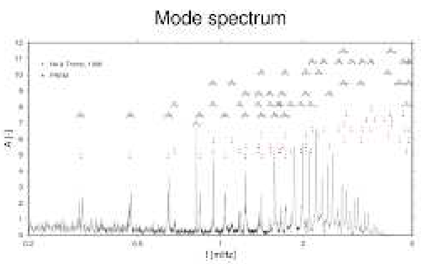
Transformée de Fourier



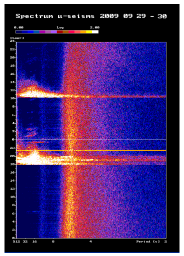
- ✔ Transformation de Fourier d'une fonction
  - Fonctions périodiques + séries de Fourier = spectre discret
  - Extension aux fonctions apériodiques
  - Fonctions apériodiques + Transformation de Fourier = spectre continu
  - Conditions d'existence de la TF d'une fonction apériodique
  - Transformation de Fourier des distributions



- ✔ Applications



Crédits : H.G. Scherneck, Chalmers University of Technology, Onsala Space Observatory



- Mathématiques (EDP, produit de convolution, statistiques...)
- Traitement du signal (filtrage, Radar, reconnaissance vocale...)
- Traitement d'images (JPEG, filtres...)
- Analyse spectrale (astrophysique, géologie, physique...)
- Biologie (analyse séquence ADN)

✔ Soit $f : (-T/2, T/2) \to \mathbb{R}$ continue / morceaux et son extension périodique $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période T_0

- Développement en séries de Fourier de f_p

$$f_p(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{\frac{i2\pi nt}{T_0}}}{\sqrt{T_0}} \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(t) e^{\frac{-i2\pi nt}{T_0}} \mathrm{d}t$$

- On pose $\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T_0$

$$f_p(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(u) e^{-i\omega_n u} \mathrm{d}u \right] e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(u) e^{-i\omega_n u} \mathrm{d}u \right] e^{i\omega_n t} \frac{\Delta\omega_n}{2\pi}$$

- $T_0 \to \infty$, $\omega_n \to \omega \to 0$ et $\Delta\omega_n \to d\omega$:

$$\lim_{T_0 \to +\infty} \sqrt{T_0} c_n = \lim_{T_0 \to +\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_p(u) e^{-i\omega_n u} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u$$

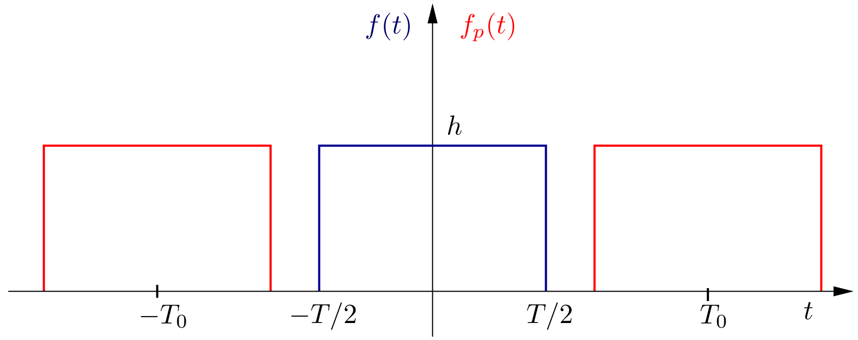
$$\lim_{T_0 \to +\infty} f_p(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u \right] e^{i\omega t} d\omega$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u}$$

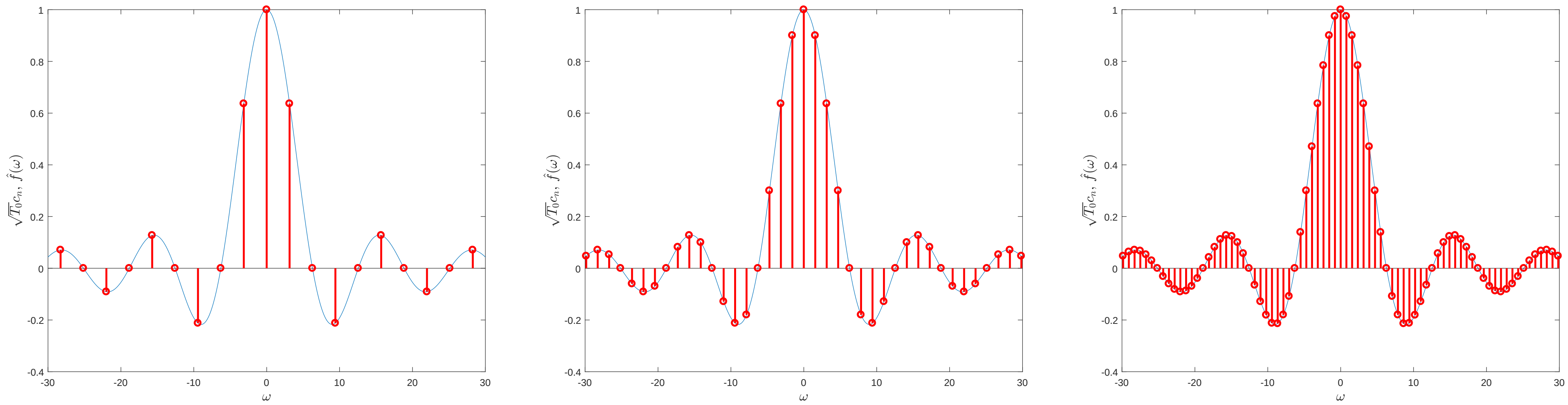
Exemple : Pour la fonction porte $f_p = \begin{cases} h & t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ de période T_0, on obtient :

- Coefficients de Fourier :

$$c_0 = \frac{hT}{\sqrt{T_0}}$$
$$c_n = h\sqrt{T_0}\frac{\sin(\omega_n T/2)}{\pi n}$$



- Spectre fréquentiel continu : $\hat{f}(\omega) = \frac{2h}{\omega}\sin(\omega T/2)$



Définition 14

Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, $\left(f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty\right)$

La transformée de Fourier de f, dénotée $\hat{f}$, est définie par :

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t}$$

Nota :

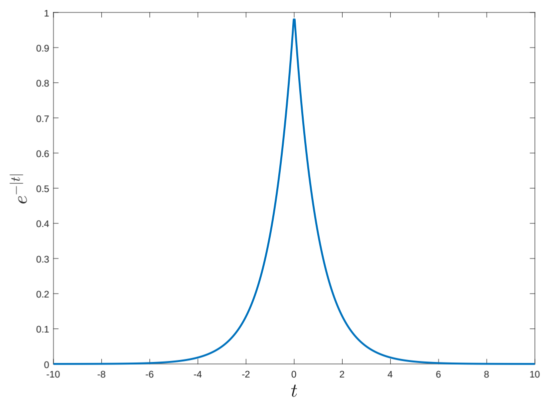
- Notations : $\hat{f}\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\hat{f} = \mathcal{F}f$ ou $\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f(t))(\omega)$
- Notation : pour $\omega = 2\pi\nu$, alors

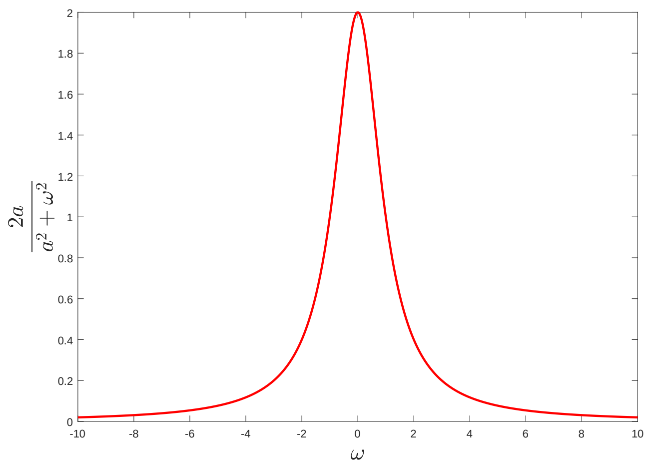
$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\mathrm{d}t$$

- Interprétation : $\hat{f}$ est une intégrale impropre (indéfinie) dépendant d'un paramètre ω

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)G(t,\omega)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t,\omega)\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cos(\omega t) \mathrm{d}t - i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \sin(\omega t) \mathrm{d}t}_{=0,\ \text{impaire}} \\
&= 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-at} \cos(\omega t) \mathrm{d}t = 2 I_1
\end{aligned}
$$

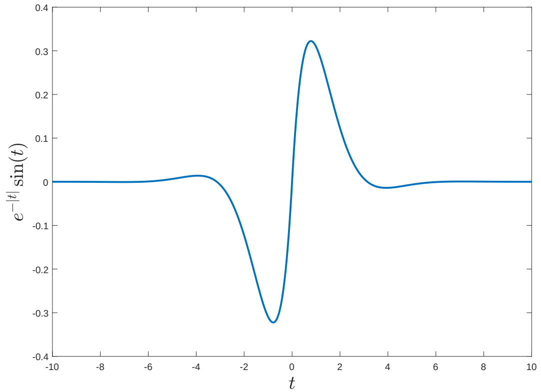


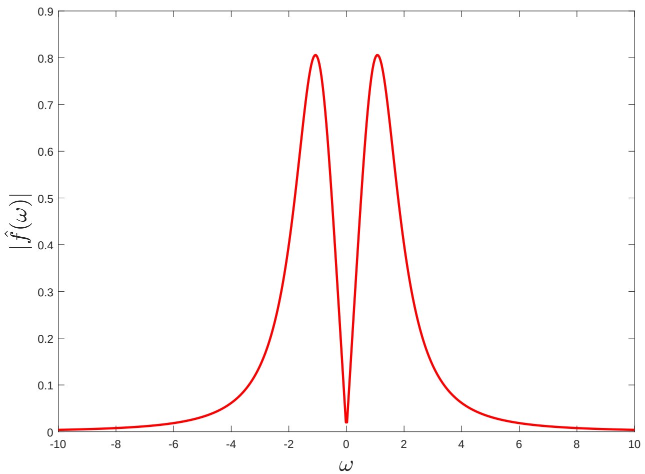


$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{1}{a} \left[e^{-at} \cos(\omega t) \right]_0^{+\infty} \\
&\quad -\frac{\omega}{a} \int_{0}^{+\infty} e^{-at} \sin(\omega t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a} - \frac{\omega^2}{a^2} I_1
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F} f(t))(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}
$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\sin(at)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\sin(at)\cos(\omega t)\mathrm{d}t}_{=0,\ \text{impaire}} \\
&\quad -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\sin(at)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \\
&= -i\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\cos((a-\omega)t)\mathrm{d}t + i\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\cos((a+\omega)t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{a}\left[e^{-at}\cos(\alpha t)\right]_0^{+\infty} \\
&\quad -\frac{\alpha}{a}\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\sin(\alpha t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{a^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = (\mathcal{F}f(t))(\omega) = \frac{ia}{a^2+(a+\omega)^2} - \frac{ia}{a^2+(a-\omega)^2}}$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$,

- ✔ La transformée de Fourier $\hat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$
- ✔ La transformée de Fourier $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini

$$\boxed{\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0}$$

- ✔ Si on définit $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|$ et $\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}$, on a

$$\boxed{\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1}$$

En effet,

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-i\omega t}| \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t = \|f\|_1$$

donc $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| = \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

- ✔ Ainsi, la transformation de Fourier

$$\boxed{\mathcal{F} \;:\; \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})}$$

✔ Linéarité

Soient $f,\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$\boxed{\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g} \Leftrightarrow \mathcal{F}(f+g) = (\mathcal{F}f) + (\mathcal{F}g)}$$

✔ Décalage temporel ou spatial

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier

$$\boxed{(\mathcal{F}f(t-a))(\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega),\ \ a \in \mathbb{R}}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f(t-a))(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \overset{\tau=t-a}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega(\tau+a)}\mathrm{d}\tau \\
&= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

Nota : Avec la notation $\hat{f}(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$, la translation temporelle change la phase $\phi(\omega)$ en $\phi(\omega) - \omega a$ mais ne modifie pas l'amplitude $A(\omega)$

✔ Modulation

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier

$$\boxed{(\mathcal{F}e^{i\omega_0 t}f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}e^{i\omega_0 t}f(t))(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t \\ &= \hat{f}(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

✔ Changement d'échelle

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier

$$\boxed{(\mathcal{F}f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \quad a \in \mathbb{R}^*}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f(at))(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \overset{\tau = at}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega}{a}\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{|a|}\hat{f}(\tfrac{\omega}{a})\end{aligned}$$

Définition 15 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ décomposée en sa partie paire f_e et sa partie impaire f_o :*

$$f(t) = \overbrace{f_e(t)}^{\text{paire}} + \overbrace{f_o(t)}^{\text{impaire}}$$

la transformée cosinus de f est définie par :

$$\boxed{\hat{f}_c(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f_e(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t}$$

alors que la transformée sinus est définie par :

$$\boxed{\hat{f}_s(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f_o(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t}$$

Si la transformée de Fourier de f est $\hat{f} \in \mathcal{L}^\infty$ alors

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \underbrace{\hat{f}_c(\omega)}_{\text{paire}} - i\,\underbrace{\hat{f}_s(\omega)}_{\text{impaire}}}$$

$$\hat{f}(\omega) = \underbrace{\hat{f}_c(\omega)}_{\text{paire}} - i \underbrace{\hat{f}_s(\omega)}_{\text{impaire}} = 2\int_0^{+\infty} f_e(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t - 2i\int_0^{+\infty} f_o(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$	Résultats
Complexe et paire	Complexe et paire	$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_c(\omega)$
Complexe et impaire	Complexe et impaire	$\hat{f}(\omega) = -i\hat{f}_s(\omega)$
		$\Re(\hat{f}(\omega)) = \Re(\hat{f}(-\omega))$
		$-\Im(\hat{f}(\omega)) = \Im(\hat{f}(-\omega))$
Réelle	Complexe	$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}}(\omega)$
Imaginaire pure	Complexe	$\hat{f}(-\omega) = -\overline{\hat{f}}(\omega)$
Réelle et paire	Réelle et paire	$\Im(\hat{f}_c(\omega)) = 0$
Réelle et impaire	Imaginaire pure et impaire	$\Im(\hat{f}_s(\omega)) = 0$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ avec $f^{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, \cdots, m$ et $\hat{f} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ sa TF alors

$$\boxed{(\mathcal{F}f^{(m)}(t))(\omega) = (i\omega)^m \hat{f}(\omega)}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f'(t))(\omega) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \lim_{h\to 0} \frac{e^{-i\omega(t-h)} - e^{-i\omega t}}{h}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \lim_{h\to 0} \frac{e^{-i\omega(t-h)} - e^{-i\omega t}}{h}\mathrm{d}t \\
&= i\omega \hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

Une forme équivalente à l'ordre 1 s'écrit pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(s)\mathrm{d}s$ avec $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors

$$(\mathcal{F}F(t))(\omega) = \frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega) \text{ si } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Réciproquement, si $t^k f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $k = 1, \cdots, m$ alors $\hat{f}$ est m fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{(\mathcal{F}t^k f(t))(\omega) = (i)^k \hat{f}^{(k)}(\omega)}$$

Nota : La transformée de Fourier échange dérivation et multiplication par un monôme

Définition 16 *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on appelle produit de convolution de f et g, noté $f * g$, la fonction, si elle existe, définie par*

$$\boxed{f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\mathrm{d}u}$$

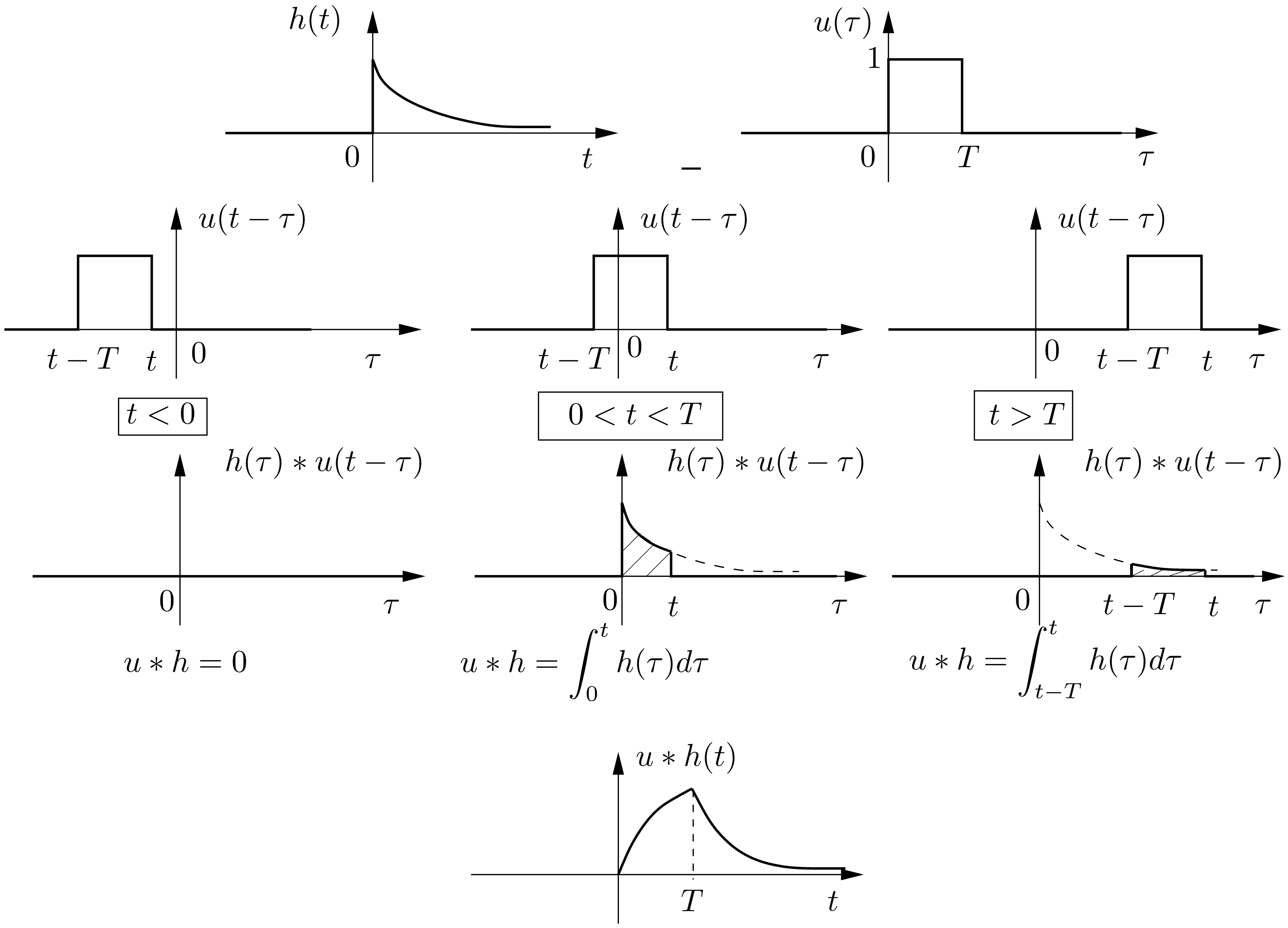
Conditions d'existence du produit de convolution

- ✔ Si $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et f ou g à support compact alors $f * g(x)$ existe $\forall\, x \in \mathbb{R}$
- ✔ Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
  - i $f * g$ est définie presque partout
  - ii $f * g$, définie presque partout $\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
  - iii $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

♥ **Propriétés 9** *sous réserve d'existence du produit de convolution (ici $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$)*

- ✔ *Commutativité* $f * g = g * f$
- ✔ *Linéarité* $(f_1 + f_2) * g = (f_1 * g) + (f_2 * g)$ *et* $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$
- ✔ *Associativité* $f * (g * h) = (f * g) * h$
- ✔ *Produit de convolution et TF*

$$\boxed{(\mathcal{F} f * g(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)} \quad \text{et} \quad \boxed{(\mathcal{F} f \cdot g(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(\omega)}$$


$h(t)$
0
t
$u(\tau)$
1
0
T
τ
$u(t-\tau)$
$t-T$ t 0 τ
$u(t-\tau)$
$t-T$ 0 t τ
$u(t-\tau)$
0 $t-T$ t τ
$t<0$
$0<t<T$
$t>T$
$h(\tau)*u(t-\tau)$
0 τ
$h(\tau)*u(t-\tau)$
0 t τ
$h(\tau)*u(t-\tau)$
0 $t-T$ t τ
$u*h=0$
$u*h=\int_0^t h(\tau)d\tau$
$u*h=\int_{t-T}^t h(\tau)d\tau$
$u*h(t)$
T
t

Définition 17

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et on suppose que sa transformée de Fourier* $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

On définit la transformation de Fourier inverse de f *comme :*

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \ \text{ p.p.}}$$

L'égalité est vraie en tout point de continuité de f

Notations : $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$ ou $f(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\omega))(t)$ et $\mathcal{F}^{-1}f = \check{f}$ ou $\check{f}(t) = (\mathcal{F}^{-1}f(\omega))(t)$

♥ **Propriétés 10**

✔ *Formule d'échange ou de réciprocité (Dualité)*

Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *alors :*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{g}(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\check{g}}(t)\mathrm{d}t} \text{ ou } \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)\mathrm{d}t}$$

✔ *Si* $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et* f *continue et soit la symétrisée de* f *:* $f_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *t.q.* $f_\sigma(t) = f(-t)$ *alors :*

$$\boxed{\mathcal{F}\mathcal{F}f = 2\pi f_\sigma}$$

- Linéarité : $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$
- Décalage : $(\mathcal{F}f(t-a))(\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega), \ \ a \in \mathbb{R}$
- Modulation : $(\mathcal{F}e^{i\omega_0 t}f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0), \ \ \omega_0 \in \mathbb{R}$
- Changement d'échelle : $(\mathcal{F}f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \ \ a \in \mathbb{R}^*$
- Dérivation 1 : $(\mathcal{F}f^{(m)}(t))(\omega) = (i\omega)^m \hat{f}(\omega)$
- Dérivation 2 : $(\mathcal{F}t^k f(t))(\omega) = (i)^k \hat{f}^{(k)}(\omega)$
- Dualité :
$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{g}(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\check{g}}(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)\mathrm{d}t$
- $\mathcal{F}\mathcal{F}f = 2\pi f_\sigma$
- Convolution : $(\mathcal{F}f * g(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ et $(\mathcal{F}f \cdot g(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et donc l'intégrale définissant $\hat{f}$ pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ peut être divergente

Exemples : $\dfrac{\sin(x)}{x} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mais $\dfrac{\sin(x)}{x} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Question : Comment définir la transformée de Fourier des fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$?

Théorème 4 *Il existe un opérateur linéaire unique* $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$ *t.q.*

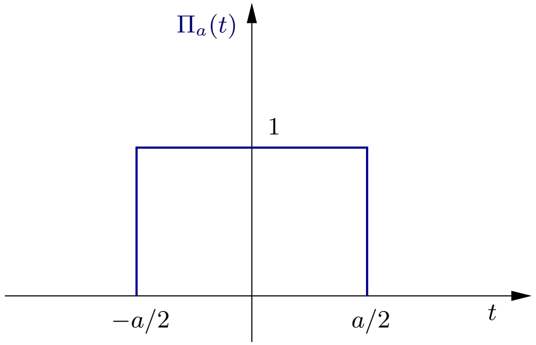
- ✔ $\mathcal{F}$ *est continue :* $\forall\, f_j \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \overset{\mathcal{L}^2}{\rightarrow} f$ *alors* $\mathcal{F}f_j \overset{\mathcal{L}^2}{\rightarrow} \mathcal{F}f$
- ✔ *La formule de Parseval-Plancherel est vraie dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{lcccccccc} \forall\, f,g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & \langle f,g\rangle & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g}(t)\mathrm{d}t & = & (1/2\pi) < \hat{f},\hat{g} > & = & (1/2\pi)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}}(\omega)\mathrm{d}\omega \\ \forall\, f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) & \|f\|_2 & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t & = & (1/2\pi)\|\hat{f}\|_2 & = & (1/2\pi)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \end{array}$$

- ✔ $\mathcal{F}$ *coïncide p.p. avec la TF sur* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
- ✔ $\forall\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *alors* $\hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
- ✔ *La propriété d'inversion de la TF est vraie p.p. dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *:* $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$
- ✔ $\forall\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *alors* $\mathcal{F}\hat{f} = 2\pi f_\sigma$ *p.p.*

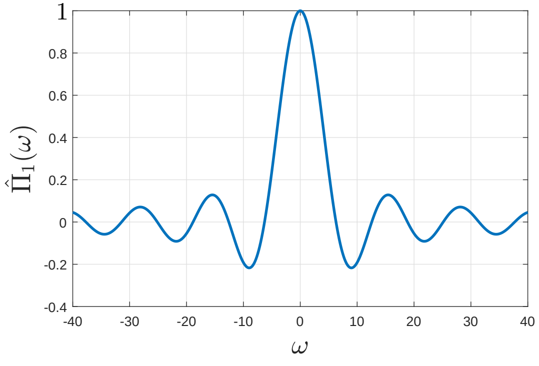
Exemple : Soit la fonction porte $\Pi_a(t) = 1_{[-a/2,a/2]}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a/2 \\ 0 & |t| > a/2 \end{cases}$

- Transformée de Fourier $\hat{\Pi}_a(\omega)$: (fonction réelle et paire)



$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_a(\omega) &= \hat{f}_c(\omega) = 2\int_0^{+\infty} 1_{[-a/2,a/2]}(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\omega}\sin(\tfrac{a\omega}{2}) = a\sin\mathrm{c}(\tfrac{a\omega}{2}) \end{aligned}$$

- Transformée de Fourier $(\mathcal{F}\sin\mathrm{c}(t))(\omega)$, $\sin\mathrm{c}(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:



$$\begin{aligned} \sin\mathrm{c}(at/2) &= \tfrac{1}{a}(\mathcal{F}\Pi_a(s))(t) \text{ donc} \\ (\mathcal{F}\sin\mathrm{c}(at/2))(\omega) &= \tfrac{1}{a}(\mathcal{F}(\mathcal{F}\Pi_a(s))(t))(\omega) \\ &= \tfrac{2\pi}{a}\Pi_a(-\omega) = \tfrac{2\pi}{a}\Pi_a(\omega) \text{ donc} \\ (\mathcal{F}\sin\mathrm{c}(t))(\omega) &= \pi\Pi_a(\tfrac{a\omega}{2}) = \pi\Pi_2(\omega) \end{aligned}$$

Table des transformées de Fourier sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\Pi_a(t)$	$2\sin(\frac{a\omega}{2})/\omega = a\,\mathrm{sin\,c}(\frac{a\omega}{2})$
$\mathrm{Tr}_a(t)$	$8\sin^2(\frac{a\omega}{4})/(a\omega^2) = \frac{a}{2}\,\mathrm{sin\,c}^2(\frac{a\omega}{4})$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\mathrm{sin\,c}(t)$	$\pi 1_{[-1,1]}(\omega)$
$\mathrm{sin\,c}^2(t)$	$\pi \mathrm{Tr}_4(\omega)$
$e^{-at}1_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\frac{1}{a+i\omega},\ \Re(a) > 0$
$\frac{t^k}{k!}e^{-at}1_{\mathbb{R}^+}(t)$	$\frac{1}{(a+i\omega)^{k+1}},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \Re(a) > 0$
$\frac{1}{a+it}$	$2\pi e^{a\omega}1_{\mathbb{R}^-}(\omega),\ \Re(a) > 0$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\|\omega\|}$

Nota :

- Fonction porte $\Pi_a(t) = 1_{[-a/2,a/2]}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a/2 \\ 0 & |t| > a/2 \end{cases}$
- Fonction triangle $\mathrm{Tr}_a(t) = (1 - 2\frac{|t|}{a})\Pi_a(t)$
- Fonction sinus cardinal $\mathrm{sin\,c}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$

Tableau synthétique pour la transformation de Fourier

❶ Calcul de la transformée de Fourier :

$$\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}t \longleftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\ :\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| < \infty\right) \longleftrightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

f impaire

$$\hat{f}(\omega) = -i\hat{f}_s(\omega) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

f paire

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_c(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

❷ Dérivation :

$$(\mathcal{F}f^{(m)}(t))(\omega) = (i\omega)^m\hat{f}(\omega)$$

❸ Dualité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{g}(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\check{g}}(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\hat{g}(t)\mathrm{d}t$$

❹ Convolution :

$$(\mathcal{F}f * g(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}f\cdot g(t))(\omega) = \hat{f} * \hat{g}(\omega)$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et l'EDO

$$-\frac{1}{\omega_0^2} g''(t) + g(t) = f(t) \quad \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \quad \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right] \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

La fonction $\omega \mapsto \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]$ n'a pas de zéro réel et d'après la Table, planche 55, on a

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \frac{2\omega_0}{2(\omega_0^2 + \omega^2)} \qquad \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} \qquad h(t) = \frac{\omega_0}{2} e^{-\omega_0 |t|}$$

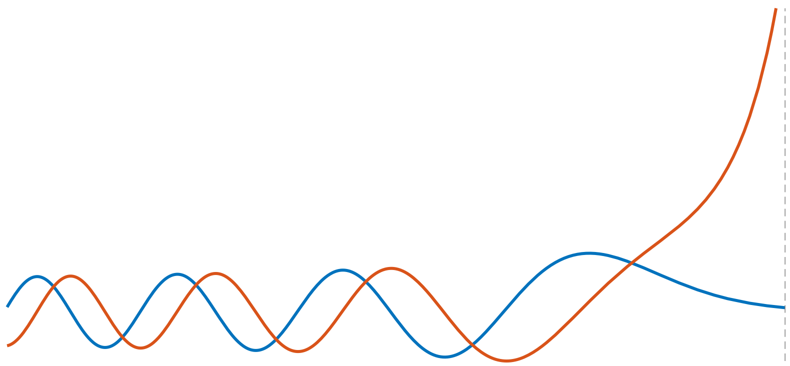
Comme $\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega)$ et $f,\ h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, en appliquant la propriété du produit de convolution de deux fonctions

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) = \widehat{h * f}(\omega)$$

On en conclut que

$$\boxed{g(t) = h * f(t) = \frac{1}{2}\omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega_0 |t-s|} f(s) \mathrm{d}s}$$

Problème de Sturm-Liouville



Définition 18 *On appelle* ***problème régulier de Sturm-Liouville*** *le problème d'inconnues*

$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$ *suivant*

$$(p(x)\varphi'(x))' + (q(x) + \mu s(x))\varphi(x) = 0,\ \forall\, x \in \,]a,b[$$

avec les conditions aux limites suivantes

C. Sturm (1803-1855)

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1\varphi(a) + \alpha_2\varphi'(a) & = & 0 \\ \beta_1\varphi(b) + \beta_2\varphi'(b) & = & 0 \end{array}$$

J. Liouville (1809-1882)

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, *et* p, p', q *et* $s \in \mathcal{C}([a,b])$ *et* $p(x) > 0,\ \ s(x) > 0,\ \forall\, x \in\ [a,b]$

Remarques :

- Problèmes singuliers : p ou s s'annulent ou sont discontinues en a ou b ou intervalle infini
- Opérateur différentiel de Sturm-Liouville : $L_{sl}[\cdot] = \dfrac{d}{dx}(p(x)\dfrac{d}{dx}(\cdot)) + q(x)(\cdot)$
- $s \in \mathcal{C}([a,b])$: Fonction de pondération
- $(\lambda = -\mu, \varphi)$ solutions non triviales : valeur propre (eigenvalue) et fonction propre (eigenfunction) du problème de valeur propre de Sturm-Liouville $L_{sl}[\varphi] = \lambda s \varphi$

Exemple : $\varphi''(x) + \mu\varphi(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq \pi$, sous les conditions $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(\pi) = 0$

- Pas de solution non triviale pour $\mu \leq 0$
- Pour $\mu > 0$, les valeurs propres et fonctions propres sont

$$\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2}{4}, \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right), \quad n = 0,\ 1,\ \cdots$$

✔ Toute ODE linéaire du second ordre de la forme
$M[\varphi] = a_1(x)\varphi''(x) + a_2(x)\varphi'(x) + (a_3(x) + \mu)\varphi(x) = 0$ avec $a_1 > 0$ et $a_1 \in \mathcal{C}([a,b])$ est équivalente au problème de Sturm-Liouville

$$L_{sl}[\varphi] - \lambda s(x)\varphi(x) = (p(x)\varphi'(x))' + (q(x) + \mu s(x))\varphi(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}M[\varphi]$$

avec $p(x) = \exp(\int_c^x a_2(u)/a_1(u)\mathrm{d}u)$, $q(x) = [p(x)/a_1(x)]a_3(x)$ et $s(x) = p(x)/a_1(x)$

Remarque :

La solution de certaines EDP par séparation des variables nécessite la résolution de :

$$a_1(x)\varphi''(x) + a_2(x)\varphi'(x) + (a_3(x) + \mu)\varphi(x) = 0$$

avec $a_1 > 0$ et $a_1 \in \mathcal{C}([a,b])$ ◇

Propriétés associées au problème de Sturm-Liouville (I)

Théorème 5 *Pour le problème régulier de Sturm-Liouville, deux fonctions propres φ_i et $\varphi_j \in \mathcal{C}^1([a,b])$ correspondant à deux valeurs propres distinctes λ_i et λ_j sont orthogonales pour le produit scalaire $<\varphi_i, \varphi_j>_s$:*

$$<\varphi_i, \varphi_j>_s = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)s(x)\mathrm{d}x = 0$$

✔ Preuve :

- $L_{sl}[\varphi_i] = \lambda_i s \varphi_i$ et $L_{sl}[\varphi_j] = \lambda_j s \varphi_j$
- $\varphi_j L_{sl}[\varphi_i] - \varphi_i L_{sl}[\varphi_j] = (\lambda_i - \lambda_j) s \varphi_i \varphi_j$
- Identité de Lagrange : $\varphi_j L_{sl}[\varphi_i] - \varphi_i L_{sl}[\varphi_j] = [p(\varphi_j \varphi_i' - \varphi_i \varphi_j')]'$
- $\displaystyle\int_a^b \varphi_j L_{sl}[\varphi_i] - \varphi_i L_{sl}[\varphi_j]\mathrm{d}x = [p(\varphi_j \varphi_i' - \varphi_i \varphi_j')]_a^b$ (formule de Green)
- donc $[p(\varphi_j \varphi_i' - \varphi_i \varphi_j')]_a^b = (\lambda_i - \lambda_j) <\varphi_i, \varphi_j>_s$
- $(\alpha_1 \varphi_i(a) + \alpha_2 \varphi_i'(a))\varphi_j(a) - (\alpha_1 \varphi_j(a) + \alpha_2 \varphi_j'(a))\varphi_i(a) = \alpha_2(\varphi_i'(a)\varphi_j(a) - \varphi_j'(a)\varphi_i(a)) = 0$
- $(\beta_1 \varphi_i(b) + \beta_2 \varphi_i'(b))\varphi_j(b) - (\beta_1 \varphi_j(b) + \beta_2 \varphi_j'(b))\varphi_i(b) = \beta_2(\varphi_i'(b)\varphi_j(b) - \varphi_j'(b)\varphi_i(b)) = 0$
- donc $[p(\varphi_j \varphi_i' - \varphi_i \varphi_j')]_a^b = 0$
- soit $(\lambda_i - \lambda_j) <\varphi_i, \varphi_j>_s = 0$ et $<\varphi_i, \varphi_j>_s = 0$ puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$

Propriétés associées au problème de Sturm-Liouville (II)

Théorème 6 *Les valeurs propres λ_i d'un problème de Sturm-Liouville régulier sont toutes réelles et simples (une unique fonction propre associée à une constante multiplicative près)*

✔ Preuve 1 :

- Valeur propre complexe $\lambda_j = \alpha + i\beta$ et fonction propre $\varphi_j(x) = u(x) + iv(x)$
- $L_{sl}[\varphi_j] = \lambda_j s \varphi_j$
- $(p(x)(u'(x) + iv'(x)))' + (q(x) + (\alpha + i\beta)s(x))(u(x) + iv(x)) = 0$
- alors $L_{sl}[\bar{\varphi}_j] = \bar{\lambda}_j s \bar{\varphi}_j$
- donc $\lambda_k = \bar{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ et $\varphi_k(x) = \bar{\varphi}_j(x) = u(x) - iv(x)$ sont valeur et fonction propres
- on a toujours $(\lambda_k - \lambda_j) < \varphi_k, \varphi_j >_s = 2i\beta \int_a^b s(x)(u^2(x) + v^2(x))\mathrm{d}x = 0$ pour $\lambda_k \neq \lambda_j$ donc $\beta = 0$

✔ Preuve 2 :

- Valeur propre λ de multiplicité 2 avec $\varphi_1 \neq \varphi_2$ fonctions propres associées
- $L_{sl}[\varphi_1] = \lambda s \varphi_1$ et $L_{sl}[\varphi_2] = \lambda s \varphi_2$
- alors $\varphi_2 L_{sl}[\varphi_1] - \varphi_1 L_{sl}[\varphi_2] = [p(\varphi_2 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_2')]' = 0$
- donc $p(\varphi_2 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_2') = K = p(a)(\varphi_2(a)\varphi_1'(a) - \varphi_1(a)\varphi_2'(a)) = 0$
- donc $\varphi_2(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x) = 0, \forall\, x \in [a, b]$ donc $\varphi_1 = K\varphi_2$

Théorème 7 *(admis) Un problème de Sturm-Liouville régulier avec $q(x) \leq 0$ admet une infinité de valeurs propres $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_i > \ldots$ telles que $\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = -\infty$*

Exemple : $\varphi''(x) + \mu\varphi(x) = 0, 0 \leq x \leq \pi, \varphi(0) = 0$ et $\varphi'(\pi) = 0$: $\lambda_n = -\dfrac{(2n+1)^2}{4}$

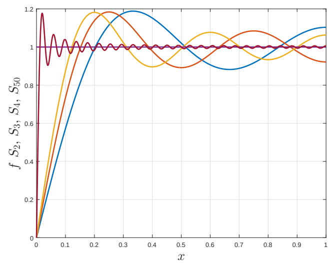
Théorème 8 *(admis) Soit $(\varphi_n)_n$ un ensemble de fonctions propres d'un problème de Sturm Liouville régulier, alors toute fonction $f \in \mathcal{L}^2([a,b],\mathbb{R})$ dérivable par morceaux peut être représentée par une série de Fourier généralisée telle que*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \varphi_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

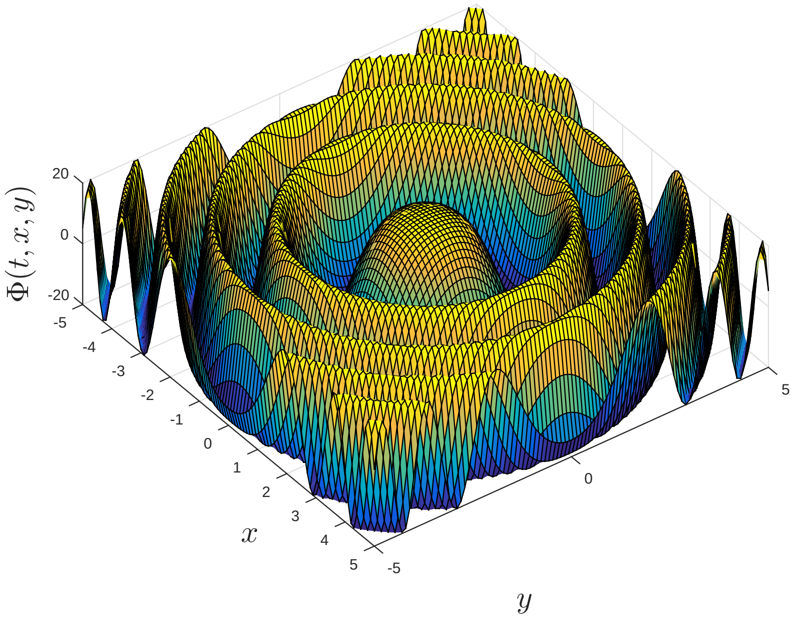
avec les coefficients de Fourier généralisés $a_n = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi_n(x)s(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \varphi_n^2(x)s(x)\mathrm{d}x}$

Exemple : Approximer $f(x)=1$ sur $[0,1]$ avec $\varphi_n(x)=\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}x)$. On a $1=\sum_n a_n \sin(\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x)$ avec

$$a_n = \frac{<1,\varphi_n>}{<\varphi_n,\varphi_n>} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 \sin^2(\frac{(2n+1)\pi}{2}x)\mathrm{d}x} = \frac{4}{(2n+1)\pi}$$



Méthode de séparation des variables



Q : Que signifie résoudre une équation différentielle ?

- Solutions explicites en termes de fonctions élémentaires
- Nécessité d'ajouter des conditions additionnelles pour choisir une solution dans l'ensemble des solutions

Définition 19

*Un problème de résolution d'EDP est **bien posé** si*

- *Il **existe** une solution*
- *Cette solution est **unique***
- *La solution dépend **continûment** des conditions aux limites*


J.S. Hadamard (1865-1963)

Contre-ex. : $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = c_0 \Phi(x,y) + c_1(x,y)$ pour $c_1 \equiv 0$ et $\Phi(x,0) = 2e^{c_0 x}$

✔ Conditions initiales : $\frac{\partial^j \Phi}{\partial t^j} = g_j(x), t = 0, j = 0, \cdots, k-1$ (Problème et données de Cauchy)

✔ Conditions aux limites : $g(\Phi, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \cdots) = 0$ si $x \in \partial\Omega$

- Conditions de Dirichlet $\Phi(x) = \Phi_0$
- Conditions de Neumann $k\dfrac{\partial \Phi}{\partial n}(x) = k\nabla(\Phi(x)).\overrightarrow{n}(x) = g_0$
- Conditions de Robin $k\dfrac{\partial \Phi}{\partial n}(x) + \alpha\Phi(x) = g_0$

Méthode de séparation des variables (I)

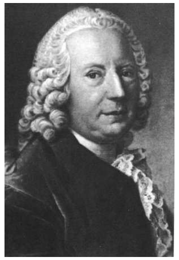
➩ Equations linéaires du second ordre, homogènes avec conditions initiales et aux limites homogènes

Principe général :

- ✔ Recherche de solutions sous la forme $u(t,x) = X(x)T(t)$ et séparations des conditions initiales et aux limites
- ✔ Résolution de deux ODEs en $X_n(x)$ et $T_n(t)$ (problème de valeur propre de Sturm-Liouville)
- ✔ Solution générale obtenue comme une série infinie de solutions produits (principe de superposition généralisé) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t)$
- ✔ Calcul des coefficients c_n de la série

Remarques :

- J. Fourier a utilisé cette méthode pour résoudre l'équation de la chaleur (+développement de Fourier pour toute fonction réelle)
- J. le Rond d'Alembert et D. Bernoulli avaient proposé une idée similaire pour la corde vibrante



D. Bernoulli (1700-1782)

Résolution d'une classe simple d'EDP pour des géométries simples

➩ Equations linéaires du second ordre à deux variables, homogènes avec conditions initiales et de bord homogènes :

$$EQ = a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_{tt} + c(t,x)u_x + d(t,x)u_t + e(t,x)u = 0,\, t \in I \text{ et } x \in J$$

✔ Recherche de solutions sous la forme $u(t,x) = X(x)T(t)$ et séparations des conditions initiales et aux limites

$$a(t,x)X''T + b(t,x)XT'' + c(t,x)X'T + d(t,x)XT' + e(t,x)XT = 0$$

✔ S'il existe $p(t,x) : I \times J \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $EQ/p(t,x)$ devient

$$a_1(x)X''T + b_1(t)XT'' + a_2(x)X'T + b_2(t)XT' + [a_3(x) + b_3(t)]XT = 0$$

✔ alors en $\cdot/\cdot$ par XT

$$a_1(x)\frac{X''}{X} + a_2(x)\frac{X'}{X} + a_3(x) = -[b_1(t)\frac{T''}{T} + b_2(t)\frac{T'}{T} + b_3(t)] = \lambda$$

où λ est la constante de séparation

✔ Résolution de deux ODEs en $X_n(x)$ et $T_n(t)$ associées à un problème de valeur propre

$$\begin{aligned} M[X] &= a_1(x)X'' + a_2(x)X' + a_3(x)X = \lambda X \\ N[T] &= b_1(t)T'' + b_2(t)T' + b_3(t)T = -\lambda T \end{aligned}$$

Remarque :

Le problème de valeur propre est un problème régulier de Sturm-Liouville avec $p(x) = a_1(x)$, $q(x) = a_3(x)$ et $s(x) = 1$ si $a_1(x) > 0$ et $a_2(x) = a_1'(x)$ sur J, $a_i \in \mathcal{C}(J)$ $\diamond$

- ✔ Calcul des valeurs propres et fonctions propres $(\lambda_n, X_n(x))$ avec les conditions aux limites

$$M[X] = a_1(x)X'' + a_2(x)X' + a_3(x)X = \lambda X$$

- ✔ Identification d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ tel que $< X_n(x), X_m(x) >= 0$ si $n \neq m$
  - Chercher $p(x) > 0 \in \mathcal{C}(J)$ telle que $a_1(x)p'(x) - p(x)a_2(x) = 0$
  - Calculer $s(x) = \dfrac{p(x)}{a_1(x)}$ et $q(x) = \dfrac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x)$
  - $< X_n(x), X_m(x) >= \displaystyle\int_J X_m(x)X_n(x)s(x)\mathrm{d}x = 0$ pour $n \neq m$
- ✔ Calculer la solution de $N[T_n] = -\lambda_n T_n$ paramétrée par des constantes d'intégration
- ✔ Ecrire la solution de l'EDP sous la forme d'une série infinie

$$\boxed{u(t,x) = \sum_n X_n(x)T_n(t)}$$

dont les constantes sont calculées à l'aide des conditions initiales

Déterminer $u(t,x)$ solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in [0,L],\ k > 0$$
$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \text{ (conditions de Dirichlet)}$$
$$u(0,x) = u_0(x),\ u_0(0) = u_0(L) = 0$$

- ✔ On pose $u(t,x) = \varphi(x)\psi(t)$ et par séparation des variables

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = k\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

- ✔ On cherche les solutions non nulles de $\varphi''(x) = \dfrac{\lambda}{k}\varphi(x),\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0$

$$\boxed{\lambda_n = -k\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2,\ \varphi_n(x) = K\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n = 1,\cdots}$$

Remarque :

Problème de valeur propre de Liouville avec $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ et $s(x) = \dfrac{1}{k}$ ◇

- On choisit le produit scalaire

$$< \varphi_n, \varphi_m >= \int_0^L \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{L}{2} & m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On cherche les solutions non nulles de $\psi'(t) = \lambda_n \psi(t)$

$$\boxed{\psi_n(t) = c_n e^{-k\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t}, \; n = 1, 2, \cdots}$$

- Si $u_0(x) = \sum_{n\geq 1}^{N} \psi_n(0)\varphi_n(x)$, une solution de l'équation de la chaleur vérifiant les conditions de Dirichlet est (principe de superposition)

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\geq 1}^{N} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n\geq 1}^{N} c_n e^{-k\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

✔ Si $u_0(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ alors une solution formelle est donnée par

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} c_n e^{-k\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

✔ Déterminer les constantes en projetant la condition initiale $u_0(x)$ sur la base de la solution

$$\begin{aligned}
\left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\rangle &= \int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{n\geq 1} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\geq 1} c_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} c_n \langle \varphi_n, \varphi_m\rangle = c_n \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{c_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle} = \frac{2}{L}\langle u_0(x), \varphi_n(x)\rangle}$$

Remarque :

c_n sont les coordonnées ou les coefficients de Fourier généralisés de la fonction u_0 dans la base des fonctions $(\varphi_n)_n$ ◇

Déterminer $u(t,x)$ solution de

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in [0,L] \\
&u(t,0) = u(t,L) = 0 \text{ (conditions de Dirichlet)} \\
&u(0,x) = u_0(x),\ u_0(0) = u_0(L) = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x),\ v_0(0) = v_0(L) = 0
\end{aligned}$$

- ✔ On pose $u(t,x) = \varphi(x)\psi(t)$ et par séparation des variables

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = c^2\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

- ✔ On cherche les solutions non nulles de $\varphi''(x) = \dfrac{\lambda}{c^2}\varphi(x),\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0$

$$\boxed{\lambda_n = -c^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2,\ \varphi_n(x) = K\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n = 1,\cdots}$$

Remarque :

Problème de valeur propre de Liouville avec $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ et $s(x) = \dfrac{1}{c^2}$ ◇

- On choisit le produit scalaire

$$< \varphi_n, \varphi_m >= \int_0^L \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{L}{2} & m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On cherche les solutions non nulles de $\psi''(t) = \lambda_n \psi(t)$

$$\boxed{\psi_n(t) = c_n \sin\left(\frac{c\pi n t}{L}\right) + d_n \cos\left(\frac{c\pi n t}{L}\right), \; n = 1, 2, \cdots}$$

- Une solution formelle de l'équation de la corde vibrante est donnée par

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} (c_n \sin\left(\frac{c\pi n t}{L}\right) + d_n \cos\left(\frac{c\pi n t}{L}\right)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

✔ Déterminer les constantes c_n et d_n en projetant les conditions initiales $(u_0(x), v_0(x))$ sur la base de la solution

$$\begin{aligned}
\left\langle u_0(x), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\rangle &= \int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{n\geq 1} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\geq 1} d_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} d_n \langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = d_n\frac{L}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle v_0(x), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\rangle &= \int_0^L \sum_{n\geq 1} c_n \frac{\pi n c}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\geq 1} c_n \frac{\pi n c}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n\geq 1} c_n \frac{\pi n c}{L}\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = c_n\frac{\pi n c}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{d_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle} = \frac{2}{L}\langle u_0(x), \varphi_n(x)\rangle \qquad c_n = \frac{L}{\pi n c}\frac{\langle v_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle} = \frac{2}{\pi n c}\langle v_0(x), \varphi_n(x)\rangle}$$

Séparation des variables avec un terme source (I)

Soit à résoudre l'EDP linéaire du second ordre $L[u(t,x)] = h(t,x)$ avec $u(t,x) = X(x)T(t)$

$$
\begin{aligned}
L[u] &= L[XT] = a_1(x)X''T + b_1(t)XT'' + a_2(x)X'T + b_2(t)XT' + [a_3(x) + b_3(t)]XT \\
&= T(t)M[X] + X(x)N[T]
\end{aligned}
$$

- ✔ Séparation des variables pour l'équation homogène $L[u] = 0$
- ✔ Solution du problème de valeur propre $M[X] = \lambda_n X$: $(\lambda_n, X_n(x))$
- ✔ Identification d'un produit scalaire $< X_n, X_m >_s = 0,\ n \neq m$
- ✔ Définir la solution $u_n(t,x) = X_n(x)T(t)$
- ✔ Projection de l'équation non homogène sur la base des fonctions propres $X_n(x)$

$$
\begin{aligned}
< L[u_n], X_n > &= < L[X_nT], X_n > = < h(t,x), X_n > \\
&= < TM[X_n] + X_nN[T], X_n > = < h(t,x), X_n > \\
&= T(t) < M[X_n], X_n > + < X_n, X_n > N[T] = < h(t,x), X_n > \\
&= (\lambda_n T(t) + N[T]) < X_n, X_n > = < h(t,x), X_n >
\end{aligned}
$$

- ✔ Résoudre l'ODE $N[T] + \lambda_n T(t) = \dfrac{< h(t,x), X_n >}{< X_n, X_n >} = h_n(t)$ pour obtenir $T_n(t)$
- ✔ Déterminer les constantes en projetant les conditions initiales sur la base de la solution

Exemple :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = t\sin(\pi x), \quad \text{pour } 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ u(0,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

- ✔ $u(t,x) = \varphi(x)\psi(t)$ pour l'équation homogène $L[u] = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- ✔ Solution du problème de valeur propre $M[\varphi] = \varphi'' = \lambda_n \varphi$: $(-n^2\pi^2, \sin(n\pi x))$
- ✔ Identification d'un produit scalaire $< \varphi_n, \varphi_m >_s = \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = 0, \ n \neq m$
- ✔ Définir la solution $u_n(t,x) = \varphi_n(x)\psi(t) = \psi(t)\sin(n\pi x)$
- ✔ Projection de l'équation non homogène sur la base des fonctions propres $\varphi_n(x)$
- ✔ Résoudre $\psi_n''(t) - \lambda_n \psi_n(t) = h_n(t) = \frac{<h(t,x),\varphi_n>}{<\varphi_n,\varphi_n>}$ avec $h_1(t) = t$ et $h_n(t) = 0, \ n \geq 2$

$$\psi_1(t) = c_1 \sin(\pi t) + d_1 \cos(\pi t) + \frac{t}{\pi^2} \qquad \psi_n(t) = c_n \sin(n\pi t) + d_n \cos(n\pi t)$$

- ✔ Déterminer les constantes en projetant les conditions initiales sur la base de la solution

$$c_1 = -1/\pi^3, \ c_n = 0 \quad n \geq 2 \quad d_n = 0, \ n \geq 1 \quad u(t,x) = \left(-\frac{\sin(\pi t)}{\pi^3} + \frac{t}{\pi^2}\right)\sin(\pi x)$$

Soit à résoudre l'EDP linéaire du second ordre en $u(t,x)$ avec des conditions aux limites non homogènes

$$\begin{cases} L[u(t,x)] = h(t,x), \quad \text{pour } a < x < b, \ \ t > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, \ \alpha u(t,a) + \beta u_x(t,a) = a(t), \ \gamma u(t,b) + \delta u_x(t,b) = b(t) \end{cases}$$

On cherche la solution $u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + \theta(t,x)$ telle que

$$\alpha\theta(t,a) + \beta\theta_x(t,a) = a(t), \ \gamma\theta(t,b) + \delta\theta_x(t,b) = b(t)$$

Remarque :

$\theta(t,x) = (A_1 + B_1 x + C_1 x^2)a(t) + (A_2 + B_2 x + C_2 x^2)b(t)$ ◇

On cherche la solution de l'EDP linéaire non homogène du second ordre en $\tilde{u}(t,x)$ avec des conditions aux limites homogènes

$$\begin{cases} L[\tilde{u}(t,x)] = \tilde{h}(t,x), \quad \text{pour } a < x < b, \ \ t > 0 \\ \tilde{u}(0,x) = f(x), \ \tilde{u}_t(0,x) = g(x), \ \alpha\tilde{u}(t,a) + \beta\tilde{u}_x(t,a) = 0, \ \gamma\tilde{u}(t,b) + \delta\tilde{u}_x(t,b) = 0 \end{cases}$$

avec $\tilde{h}(t,x) = h(t,x) - L[\theta(t,x)]$, $f(x) = -\theta(0,x)$, $g(x) = -\theta_t(0,x)$

Conditions aux limites non homogènes (II)

Conditions aux limites	$\theta(t,x)$
Dirichlet : $u(t,0)=a(t),\ u(t,L)=b(t)$	$\theta(t,x)=a(t)+\frac{x}{L}(b(t)-a(t))$
Neumann : $u_x(t,0)=a(t),\ u_x(t,L)=b(t)$	$\theta(t,x)=xa(t)+\frac{x^2}{2L}(b(t)-a(t))$
Mixtes : $u(t,0)=a(t),\ u_x(t,L)=b(t)$	$\theta(t,x)=a(t)+xb(t)$
Mixtes : $u_x(t,0)=a(t),\ u(t,L)=b(t)$	$\theta(t,x)=(x-L)a(t)+b(t)$

Exemple : Résoudre en $u(t,x)$

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-4u_{xx}(t,x)=(1-x)\cos(t), \quad \text{pour } 0<x<\pi,\ \ t>0, \\ u(0,x)=\dfrac{x^2}{2\pi},\ u_t(0,x)=\cos(3x),\ u_x(t,0)=\cos(t)-1,\ \ u_x(t,\pi)=\cos(t) \end{cases}$$

- ✔ On pose $\tilde{u}(t,x)=u(t,x)-\theta(t,x)$ avec $\theta(t,x)=x(\cos(t)-1)+\dfrac{x^2}{2\pi}$
- ✔ Résoudre en $\tilde{u}(t,x)$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(t,x)-4\tilde{u}_{xx}(t,x)=\cos(t)+\dfrac{4}{\pi}, \quad \text{pour } 0<x<\pi,\ \ t>0, \\ \tilde{u}(0,x)=0,\ \tilde{u}_t(0,x)=\cos(3x),\ \tilde{u}_x(t,0)=\tilde{u}_x(t,\pi)=0 \end{cases}$$

Conditions aux limites non homogènes (III)

- $\tilde{u}(t,x) = \tilde{\varphi}(x)\tilde{\psi}(t)$ pour l'équation homogène $L[\tilde{u}] = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = 0$
- Solution du problème de valeur propre $M[\tilde{\varphi}] = \tilde{\varphi}'' = \lambda_n \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}'(0) = \tilde{\varphi}'(\pi) = 0$

$$(\lambda_n, \tilde{\varphi}_n(x)) = (-n^2, \cos(nx)),\ n \geq 0$$

- Identification d'un produit scalaire

$$< \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m >_s = \int_0^{\pi} \tilde{\varphi}_n(x)\tilde{\varphi}_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \end{cases}$$

- Définir la solution

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{\varphi}_n(x)\tilde{\psi}_n(t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{\psi}_n(t)\cos(nx)$$

- Projection de l'équation non homogène sur la base des fonctions propres $\tilde{\varphi}_n(x)$

$$< \tilde{u}_{tt}(t,x), \cos(mx) > -4 < \tilde{u}_{xx}(t,x), \cos(mx) > = < \cos(t) + \frac{4}{\pi}, \cos(mx) >$$

- ✔ Résoudre $\tilde{\psi}_n''(t) + (2n)^2\tilde{\psi}_n(t) = \tilde{h}_n(t) = \frac{<\cos(t)+4/\pi,\tilde{\varphi}_n>}{<\tilde{\varphi}_n,\tilde{\varphi}_n>} = \begin{cases} \cos(t) + \dfrac{4}{\pi} & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$

$$\tilde{\psi}_0(t) = 1 - \cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + \tilde{\psi}_0'(0)t + \tilde{\psi}_0(0) \qquad \tilde{\psi}_n(t) = A_n\cos(2nt) + B_n\sin(2nt)$$

- ✔ Déterminer les constantes d'intégration A_n et B_n en projetant les conditions initiales sur la base $\tilde{\varphi}_n$ de la solution

$$< \tilde{u}(0,x), \cos(nx) >= A_n\frac{\pi}{2} = 0, < \tilde{u}_t(0,x), \cos(nx) >= 2nB_n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n \neq 3 \\ \dfrac{\pi}{2} & n = 3 \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t,x) = 1 - \cos(t) + \frac{2t^2}{\pi} + \frac{\sin(6t)\cos(3x)}{6}$$

- ✔ Calculer la solution de l'équation initiale comme

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n\geq 1}\tilde{\psi}_n(t)\tilde{\varphi}_n(x) + \theta(t,x) = (1-x)(1-\cos(t)) + \frac{x^2}{2\pi} + \frac{2t^2}{\pi} + \frac{\sin(6t)\cos(3x)}{6}}$$

$$L[u(t,x)] = h(t,x),\ \forall x \in\ J = [a,b], \forall t \geq 0$$
$$\text{C.I. } : u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = v_0(x)$$
$$\text{C.L. } : \alpha u(t,a) + \beta u_x(t,a) = a(t),\ \gamma u(t,b) + \delta u_x(t,b) = b(t)$$

C.L. non homogènes

$a(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0$

$$\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - \theta(t,x)$$
$$\tilde{h}(t,x) = h(t,x) - L[\theta(t,x)]$$
$$\theta(t,x) \text{ obtenu par T77} - \text{T78}$$

$$L[\tilde{u}(t,x)] = \tilde{h}(t,x),\ \forall x \in\ J, \forall t \geq 0$$
$$\text{C.I. :} \quad \tilde{u}(0,x) = \tilde{u}_0(x)$$
$$\tilde{u}_t(0,x) = \tilde{v}_0(x)$$
$$\text{C.L. :} \quad \alpha \tilde{u}(t,a) + \beta \tilde{u}_x(t,a) = 0$$
$$\gamma \tilde{u}(t,b) + \delta \tilde{u}_x(t,b) = 0$$

C.L. homogènes

$a(t) = b(t) = 0$

$$u(t,x) = \varphi(x)\psi(t) \text{ pour } L[u(t,x)] = 0 \text{ et } \div \text{ par } \varphi(x)\psi(t)$$
$$M[\varphi(x)] = a_1(x)\varphi''(x) + a_2(x)\varphi'(x) + a_3(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$$
$$N[\psi(t)] = b_1(t)\psi''(t) + b_2(t)\psi'(t) + b_3(t)\psi(t) = -\lambda\psi(t)$$

Identification du pb. de Sturm-Liouville

- Chercher $p(x) > 0 \in \mathcal{C}(J)$ t.q. $a_1(x)p'(x) - p(x)a_2(x) = 0$
- Calculer $s(x) = \dfrac{p(x)}{a_1(x)}$ et $q(x) = \dfrac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x)$

$$< \varphi_n(x), \varphi_m(x) >_s = \int_J \varphi_m(x)\varphi_n(x)s(x)\mathrm{d}x$$

Résolution du pb. de Sturm-Liouville

Calcul des valeurs et vecteurs propres λ_n et $\varphi_n(x)$

$M[\varphi_n(x)] = \lambda_n\varphi_n(x)$ et C.L. $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$h(t,x) = 0$

Résolution de $N[\psi(t)] = -\lambda_n\psi_n(t)$

$h(t,x) \neq 0$

$u_n(t,x) = \varphi_n(x)\psi_n(t) \qquad < L[u_n(t,x)], \varphi_n(x) > = < h(t,x), \varphi_n(x) >$

Résoudre $N[\psi(t)] + \lambda_n\psi(t) = \dfrac{< h(t,x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >} = h_n(t)$

$$u(t,x) = \sum \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum (c_n\psi_{1n}(t) + d_n\psi_{2n}(t))\varphi_n(x)$$

$$< u(0,x), \varphi_n(x) >: \quad c_n\psi_{1n}(0) + d_n\psi_{2n}(0) = \frac{< u_0(x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >}$$
$$< u_t(0,x), \varphi_n(x) >: \quad c_n\psi'_{1n}(0) + d_n\psi'_{2n}(0) = \frac{< v_0(x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >}$$

$$u(t,x) = \sum \psi_n(t)\varphi_n(x) = \tilde{u}(t,x) + \theta(t,x)$$

Bibliographie

[1] C.L. DeVito. *Harmonic Analysis*. Jones and Bartlett, Sudbury, MA, USA, 2007.

[2] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis - An introduction*. Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2003.

[3] R. Haberman. *Applied partial differential equations : with Fourier series and boundary value problems*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2004.

[4] J. Bass. *Cours de mathématiques, Tome I*. Masson, Paris, France, 1968.

[5] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 2004.

[6] T. Myint-U and L. Debnath. *Linear partial differential Equations for scientists and engineers*. Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2007.