TD 6 du cours Introduction aux E.D.P.

Méthode de séparation des variables

Exercice I :

Partie I.

$$(E_1)\quad \begin{cases} (1+t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x). \end{cases}$$

1. Résoudre le problème (E_1) par séparation des variables.
   On remplace la condition initiale : $u(0,x) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)$ par la condition initiale $u(0,x) = x$.
2. Expliquer quelles étapes changent dans la résolution de (E_1) et recalculer la solution de (E_1) avec la nouvelle condition initiale.

   Partie II.

   On modifie maintenant une condition aux limites, ce qui donne le problème suivant :

$$(E_2)\quad \begin{cases} (1+t)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in [0,1] \\ u(t,0) = t, \quad u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x). \end{cases}$$

   On pose : $v(t,x) = -t + xt + u(t,x)$.
3. Expliquer à quoi sert le changement de fonction proposé et écrire le problème (E_3) vérifié par la fonction v.
4. Expliquer ce qui change par rapport à (E_1) et ce que cela implique pour la résolution.
5. Calculer les solutions du problème (E_3).

Exercice II :

1. Résoudre par la méthode de séparation de variables l'équation de la chaleur, pour $k > 0$ (diffusivité thermique), et avec la donnée initiale u_0 telle que $u_0(x) = U$ sur $[0, \frac{L}{2}[$ et $u_0(x) = 0$ sur $[\frac{L}{2}, L[$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L \text{ et } t \geq 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Exercice III : Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + e^x \sin(\pi x), & t > 0, \quad x \in]0,1[& (1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0 & (2) \\ u(0,x) = e^x f(x), & x \in [0,1]. & (3) \end{cases}$$

où f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, impaire et 2-périodique telle que :

$$\forall x \in]0,1[, f(x) = 1 \quad \text{et } f(0) = f(1) = 0.$$

1. Résoudre le problème par séparation des variables.

Exercice IV :
On s'intéresse à la résolution de l'équation de Laplace (ou de Poisson quand le second membre est non nul) :

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi] \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0 \end{cases}$$

où f est une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[0,\pi]$.

1. Résolution du problème (P) par la méthode de séparation des variables.
   (a) On pose $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Ecrire les équations différentielles à variables séparées vérifiées par φ et ψ pour que u soit solution de (P).
   (b) Montrer que les éléments propres du problème s'écrivent :
   $$\lambda_n = -n^2,\ \varphi_n(x) = \sin(nx),\ n \in \mathbb{N}^*.$$
   (c) Déterminer le produit scalaire qui orthogonalise la famille $(\varphi_n(x))_{n\geq 1}$.
   (d) Résoudre l'équation différentielle en y.
   (e) Déterminer la solution finale du problème (P) en fonction de la fonction f.
   (f) On choisit $f(x) = x^2 - 1$, recalculer la solution finale du problème (P).
2. On change le problème (P) en le même problème avec terme source et changement d'une condition initiale :
   $$(P')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \sin(x), \quad x \in [0,\pi],\ y \in [0,\pi] \\ u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0 \end{cases}$$
   (a) Quelles sont les étapes de la méthode de séparation des variables qui changent ?
   (b) Déterminer la solution finale du problème (P').

Exercice V :
On considère une tige homogène de longueur l, parfaitement isolée thermiquement, y compris en ses extrémités en $x = 0$ et $x = l$. $u(t,x)$ est la température de la tige à l'instant t et en l'abscisse x et est solution de l'équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre :

$$(P)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in [0,l]$$

avec les conditions :

$$u(0,x) = f(x),\ \forall\ x \in [0,l] \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0,\ \forall\ t \geq 0.$$

où f est une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[0,l]$. On souhaite résoudre cette équation par séparation des varaiables.

1. On pose $u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Ecrire les équations différentielles à variables séparées vérifiées par φ et ψ pour que u soit solution de (P).
2. Montrer que les éléments propres du problème s'écrivent :
   $$\lambda_n = -n^2\pi^2/l^2,\ \varphi_n(x) = \cos(n\pi x/l),\ n \in \mathbb{N}.$$
3. Déterminer le produit scalaire qui orthogonalise la famille $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ et le calculer.
4. Résoudre l'équation différentielle en t.
5. Déterminer la solution finale du problème (P) en fonction de la fonction f.
6. On choisit $f(x) = 3\pi x^2 - 2x^3$, calculer la température $u(t,x)$ dans la tige si $l = \pi$, $c = 1$.