TD 5 du cours Introduction aux E.D.P.

Problème de Sturm-Liouville.

Exercice I : Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 3x\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \text{pour } 1 \leq x \leq e \text{ et } t \geq 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{x}\sin(\pi \ln(x)) \quad \text{pour } 1 \leq x \leq e. \\ u(1,t) = u(e,t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0. \end{cases}$$

1. Formuler le problème de Sturm-Liouville que l'on obtient par séparation des variables, puis calculer les solutions du problème.

Exercice II : On s'intéresse à la démonstration de certaines propriétés fondamentales du problème régulier de Sturm-Liouville qui consiste à déterminer les inconnues $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ solutions de

$$(p(x)\varphi'(x))' + (q(x) + \mu s(x))\varphi(x) = 0, \ \forall\ x \in \left]a,b\right[$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_1\varphi(a) + \alpha_2\varphi'(a) &= 0 \\ \beta_1\varphi(b) + \beta_2\varphi'(b) &= 0 \end{aligned}$$

où $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, et p, p', q et $s \in \mathcal{C}([a,b])$ et $p(x) > 0$, $s(x) > 0$, $\forall\ x \in [a,b]$. On note $L_{sl}[\cdot] = \dfrac{d}{dx}(p(x)\dfrac{d}{dx}(\cdot)) + q(x)(\cdot)$ l'opérateur différentiel de Sturm-Liouville et φ_i et φ_j deux fonctions propres correspondant à deux valeurs propres distinctes λ_i et λ_j.

1. Montrer l'identité de Lagrange

$$\varphi_j L_{sl}[\varphi_i] - \varphi_i L_{sl}[\varphi_j] = [p(\varphi_j\varphi_i' - \varphi_i\varphi_j')]'.$$

2. Pour le problème régulier de Sturm-Liouville, montrer que deux fonctions propres φ_i et $\varphi_j \in \mathcal{C}^1([a,b])$ correspondant à deux valeurs propres distinctes λ_i et λ_j sont orthogonales pour le produit scalaire $< \varphi_i, \varphi_j >_s$:

$$< \varphi_i, \varphi_j >_s = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)s(x)\mathrm{d}x = 0$$

3. Montrer que les valeurs propres λ_i d'un problème de Sturm-Liouville régulier sont toutes réelles.
4. Montrer que les valeurs propres λ_i d'un problème de Sturm-Liouville régulier sont toutes simples (une unique fonction propre associée à une constante multiplicative près)

Exercice III : Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire homogène du second ordre

$$x^2\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) + \mu\varphi(x) = 0,$$

avec les conditions aux limites $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(e) = 0$.

1. Montrer que la résolution sur un intervalle $[a,b]$ de cette EDO en φ et μ est équivalente à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville régulier que l'on identifiera.
2. Résoudre ce problème de Sturm-Liouville régulier. On notera que les solutions peuvent être cherchées sous la forme $K_1x^{r_1} + K_2x^{r_2}$ ou $K_1x^r + K_2x^r\ln x$ avec r_1, r_2, r réels ou complexes choisis judicieusement. On notera également que $x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha(\cos(\beta\ln x) + i\sin(\beta\ln x))$.