TD 4 du cours Introduction aux E.D.P.

Transformation de Fourier et EDP.

Soit l'équation unidimensionnelle de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ u(0,x) = \psi(x),\ k > 0,\quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ u : [0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

$u(t,x)$ est le champ de température et k est le coefficient de diffusivité thermique. On souhaite démontrer que la solution de cette équation est donnée par :

$$u(t,x) = \theta_k * \psi(t,x) \text{ avec } \theta_k(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\dfrac{x^2}{4kt}}. \tag{1}$$

1. On va faire une première preuve a *posteriori* en montrant que la fonction (1) est effectivement solution de l'équation de la chaleur avec cette condition initiale.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ et en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_k(t,x)\mathrm{d}x = 1$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \theta_k * \psi(t,x) = \psi(x)$ (la solution souhaitée vérifie la condition initiale).
   (c) Montrer que $\theta_k * \psi$ est solution de l'équation unidimensionnelle de la chaleur (on montrera que $\dfrac{\partial^2 \theta_k * \psi}{\partial x^2}(t,x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial \theta_k * \psi}{\partial t}(t,x)$. On supposera que $\frac{\partial^\alpha f*g}{\partial x_i^\alpha} = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha} * g = f * \frac{\partial^\alpha g}{\partial x_i^\alpha}$.
2. On va faire une deuxième preuve *constructive* en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier. Pour cela, on note $\hat{u}(t,\xi) = (\mathcal{F}u(t,x))(t,\xi)$, la transformée de Fourier de la fonction u par rapport à la variable spatiale.
   (a) Montrer que $(\mathcal{F}k\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x))(t,\xi) = i\xi k(\mathcal{F}u(t,x))(t,\xi) = i\xi k\hat{u}(t,\xi)$ et que $(\mathcal{F}k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x))(t,\xi) = -k\xi^2(\mathcal{F}u(t,x))(t,\xi) = -k\xi^2\hat{u}(t,\xi)$.
   (b) En supposant que $(\mathcal{F}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x))(t,\xi) = \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi)$, écrire l'EDO vérifiée par la fonction $\hat{u}(t,\xi)$.
   (c) Résoudre l'EDO obtenue à la question précédente.
   (d) Calculer $\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(t,\xi)\right)(t,x)$ [1].

1. la transformée de Fourier de e^{-ax^2} est $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$