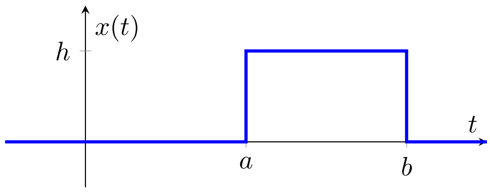
TD 3 du cours Introduction aux E.D.P.

Transformation de Fourier.

Exercice I :

1. Soit le signal temporel suivant :

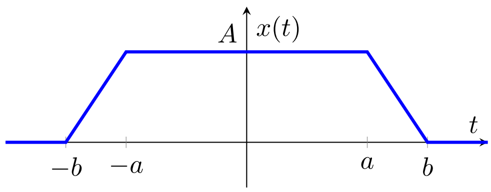
$$x(t) = \begin{cases} h, & \text{si } a < t < b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



   (a) Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ par calcul direct.

   (b) Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ en utilisant les propriétés du cours.

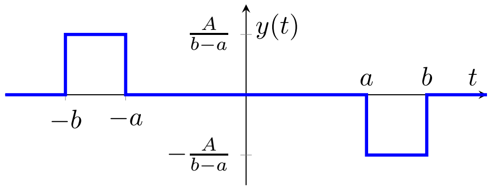
2. Soit le signal $x(t)$ tracé à la figure suivante :



   (a) Quelles sont les propriétés de $\hat{x}(\omega)$?

   (b) Justifier l'existence de la transformée de Fourier de $x(t)$.

   (c) Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ par calcul direct.
   Soit le signal $y(t)$ représenté à la figure suivante :



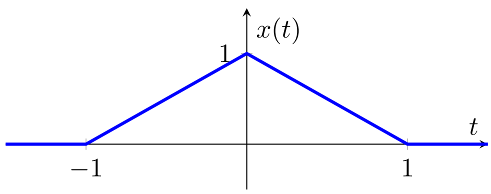
   (d) Montrer que $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$.

   (e) Calculer $\hat{y}(\omega)$.

   (f) En déduire $\hat{x}(\omega)$.

Exercice II : Soit le signal temporel suivant :

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



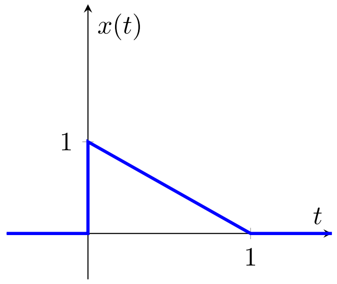
1. Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ par calcul direct.
   Soit le signal x_0 défini par :

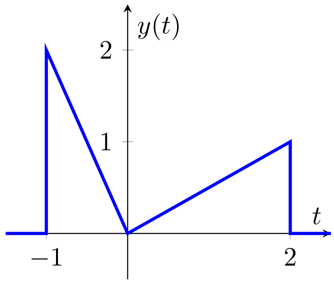
$$x_0(t) = \begin{cases} h, & \text{si } -l < t < l \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

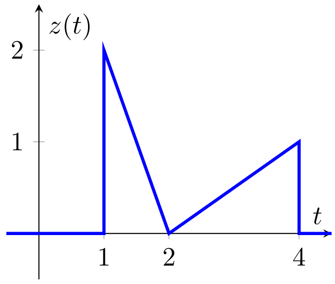
2. Montrer que $x(t) = x_0 * x_0(t)$ pour h et l que l'on calculera.
3. En déduire la transformée de Fourier du signal $x(t)$ en utilisant les propriétés du cours.

Exercice III :

1. Soit $\hat{x}(\omega)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$. Calculer la transformée de Fourier des signaux $y(t)$ et $z(t)$ comme des fonctions de $\hat{x}(\omega)$.







Exercice IV :

1. Calculer le produit de convolution suivant :[1].

$$e^{-\frac{t^2}{3}} * e^{-\frac{t^2}{4}} * e^{-\frac{t^2}{5}}$$

Exercice V :

Soit la fonction $g : x \mapsto 2xe^{-\pi x^2}$.

1. En remarquant que $g(x) = -\frac{1}{\pi}f'(x) = -\frac{1}{\pi}u'(x)e^{u(x)}$ pour des fonctions f et u que l'on identifiera, calculer la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g. On pourra utiliser la table de la planche 55.

Exercice VI :

On s'intéresse au calcul de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 \mathrm{d}x.$$

Pour cela, nous allons utiliser la transformation de Fourier et ses différentes propriétés.

1. On pose $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $g(x) = \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2$. Rappeler sans les calculer les formules explicites des transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{g}$ et les tracer sur un même graphique.
2. En appliquant la formule de Parseval-Plancherel, calculer I.
   On souhaite tout de même démontrer la formule du cours de $\hat{g}(\omega)$.
3. Montrer que $\hat{g}(\omega) = \frac{\pi}{2}\Pi_2 * \Pi_2(\omega)$ ($h_1 * h_2$ est le produit de convolution des fonctions h_1 et h_2).
4. Montrer que $\hat{g}(\omega) = \pi\left(1 - \frac{|\omega|}{2}\right)\Pi_4(\omega)$.

1. la transformée de Fourier de e^{-at^2} est $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$