TD 2 du cours Introduction aux E.D.P.

Séries de Fourier.

Exercice I : Soit f périodique, de période 2π, telle que $f(t) = e^{\alpha t}$ si $t \in]-\pi, \pi[$, $\alpha > 0$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire les valeurs de $S_1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2+\alpha^2}$ et $S_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p^2+\alpha^2}$.

Exercice II : Soit f périodique, de période 2π, telle que $f(t) = t^2$ si $t \in]-\pi, \pi[$.

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire les valeurs de : $S_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$, $S_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}$, $S_3 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, $S_4 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$ et $S_5 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

Exercice III : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 4, impaire, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [1,2[\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f. Calculer $f(7)$, $f(\frac{9}{2})$ et $f(-\frac{11}{2})$.
2. Développer f en série de Fourier.

Exercice IV : Reconstruire les fonctions f représentées par les séries de Fourier suivantes en utilisant les propriétés de parité et périodicité :

1. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(2nt) = \sin(t)$, $t \in [0, \pi]$.
2. $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) = 1$, $t \in]0, 1[$.
3. $\pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \sin(nt) = t$, $t \in]0, 2\pi[$.

Exercice V : Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 2-périodique telle que :

$$\forall x \in [0,2[, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 2-x & \text{si } x \in [1,2[. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur plusieurs périodes et calculer $f(-5/4)$.
2. Montrer que la série de Fourier associée à f s'écrit

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} \cos((2n+1)\pi x).$$

3. En déduire la valeur de $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice VI : Soit a vérifiant $0 < a < \frac{\pi}{2}$ un nombre réel fixé et f_a la fonction paire et périodique de période 2π, définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{2a-t}{2a} \text{ si } 0 \leq t < 2a, \\ 0 \text{ si } 2a \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f_a sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ pour $a = \pi/3$.

2. Déterminer la série de Fourier $Sf_a(t)$ de f_a.
3. Calculer la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^4 na}{n^4}.$$

Exercice VII : Soit la fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 1-périodique définie par :

$$f(t) = e^{-t}, \ t \in [0, 1[.$$

1. Tracer la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Calculer le développement de f en séries de Fourier exponentielles.
3. Etudier la convergence simple de la série de Fourier ainsi définie sur $[0, 1]$.
4. Calculer la somme S_1 de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4n^2\pi^2}$.

Exercice VIII : Soit la fonction réelle paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique définie par :

$$f(x) = (x - \pi)^2, \ x \in [0, 2\pi[.$$

1. Tracer cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.
2. Calculer le développement de f en séries de Fourier trigonométriques. On remarquera que la fonction est paire.
3. Etudier la convergence simple de la série de Fourier ainsi définie.
4. Calculer la somme S_1 de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n^2}$.