# TD2 du cours de Programmation Linéaire

**Exercice I :**

1. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{lcl} x_1 - 2\,x_2 & = & z[min] \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 + 3\,x_2 & \leq & -4 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

**Exercice II :**

1. Écrire le programme linéaire dual pour le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3\,x_1 + 2\,x_2 & = & z & [max] \\ 2\,x_1 + x_2 & \leq & 6 & \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 & \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 & \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. & \end{array}\right.$$

   On sait que le vecteur $(0,\, 1/2,\, 5/2)^T$ est une solution optimale du dual.

2. Utiliser le théorème des écarts complémentaires pour obtenir une solution optimale du primal.
3. Comment vérifier que la solution obtenue est bien optimale ?

**Exercice III : Modélisation d'une fermette**

Des citadins en mal de campagne ont acheté une fermette avec 12 ares de terrain. Ils souhaitent y élever des vaches et y cultiver de la betterave. Il faut exactement deux ares pour faire paître une vache. Les ares qui ne sont pas utilisés par les vaches peuvent être mis en culture. Chacun d'eux permet de produire une tonne de betteraves. Tout le terrain ne doit pas obligatoirement être utilisé. Les betteraves produites doivent suffire à alimenter les vaches. Il en faut une tonne pour nourrir une vache. Les tonnes qui ne sont pas consommées par les vaches sont vendues à 50 euros la tonne. Chaque vache fournit du lait. Les produits laitiers ainsi obtenus rapportent 200 euros par vache. On cherche à maximiser le profit.

1. Modéliser le problème ci–dessus sous la forme d'un programme linéaire en variables réelles. Bien préciser les dimensions des variables et fournir un mot–clef par contrainte.
2. Résoudre le programme linéaire graphiquement. Bien préciser le polygone des solutions réalisables, la solution optimale, l'objectif réalisé à l'optimum. Dessiner au moins deux droites de l'objectif.
3. Résoudre le programme linéaire par l'algorithme du tableau simplicial. Donner à chaque itération, la solution de base et le sommet correspondant du polygone des solutions réalisables.
4. Écrire le programme linéaire dual du programme précédent.
5. Donner, sans faire de calcul, la solution optimale du dual.
6. Donner les valeurs marginales des contraintes du primal et les interpréter.

**Exercice IV :**

Soit le programme linéaire (PL) ci-dessous :

$$\begin{array}{rcrcll} 3\,x_1 & + & 2x_2 & = & z & [\text{min}] \\ 4\,x_1 & + & 2x_2 & \geq & 400 & \\ x_1 & + & 3x_2 & \geq & 450 & \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 200 & \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

1. Mettre le programme ci-dessus sous forme canonique (avec minimisation de l'objectif). On appellera ce programme (PLC).
2. Ecrire le dual (PLD) de (PLC).
3. Résoudre graphiquement au choix (PLC) ou (PLD).
4. Mettre (PLC) et (PLD) sous forme standard. Pour chacun, indiquez la base obtenue, la solution de base associée et si la base est réalisable ou non.

5. Résoudre au choix (PLC) ou (PLD) par l'algorithme du simplexe. Expliquer en une phrase la raison de votre choix. Lors de la résolution, vous indiquerez clairement à chaque étape la variable qui entre en base et celle qui sort de la base. A la fin, vous donnerez clairement l'optimum et la solution optimale trouvée.
6. Déduire de l'optimum et de la solution optimale obtenus à la question précédente, l'optimum et une solution optimale pour le problème (PLC) ou (PLD) qui n'a pas été résolu à la question précédente.

**Exercice V :**

Montrer que le système d'inégalités suivant :

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 3, \\ -x_1 + 3x_2 & \leq & -4, \\ -x_2 & < & 0. \end{array}$$

n'admet pas de solutions en utilisant le lemme de Farkas.