# TD 1 du cours Introduction aux E.D.P.

*Classification des EDP d'ordre 2 et modélisation.*

**Exercice I :** Donner le type des E.D.P. suivantes :

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0\,;$
2. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2\,;$
3. $(x - |x|)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0\,;$
4. Ecrire l'EDP suivante sous forme matricielle et déterminer son type.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$
5. $e^x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + 5y\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x.$
6. Ecrire l'EDP suivante sous forme matricielle et déterminer son type en l'indiquant dans le plan $(x,y)$.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) - (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + 4\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \sin(x)$$
7. Ecrire l'EDP suivante sous forme matricielle et déterminer son type en l'indiquant dans le plan $(x,y)$.
$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$$

**Exercice II :** Equations de l'élastodynamique linéaire

On considère un solide de volume fermé $V$, de frontière $\partial V$ soumis à des forces de volume de densité $\vec{f}$ et à des forces de surface définies par un vecteur contrainte $\vec{T_n}$ (force par unité de surface en un point du solide). La masse volumique du solide est notée $\rho(x)$ et le vecteur déplacement d'un point matériel $x$ du solide est noté $\vec{u}(t,x)$.

1. En supposant la conservation de la masse du solide, écrire le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel fixe dans l'espace et le temps, de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. En exprimant le vecteur $\vec{T_n}$ en fonction du tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}]$ et du vecteur normal à la surface $\vec{n}$ et en appliquant le théorème de la divergence à l'équation du principe fondamental de la dynamique, écrire les équations aux dérivées partielles sur les trois composantes.
3. On suppose que le matériau du solide est linéaire isotrope. La loi de comportement de ce matériau est donc la loi de Hooke liant le tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}]$, le champ de déplacement $\vec{u}(t,x)$ et le tenseur (linéarisé) des déformations $[\epsilon_{ij}]$ avec $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ :
$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda(x)\mathrm{div}(\vec{u})\delta_{ij} + 2\mu(x)\epsilon_{ij}(\vec{u}).$$
$\lambda$ et $\mu$ sont les constantes de Lamé et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ est le symbole de Kronecker. Ecrire la formulation en déplacements de l'équation de la dynamique.
4. En supposant que le matériau est homogène ($\rho(x) = \rho$, $\lambda(x) = \lambda$ et $\mu(x) = \mu$), simplifier l'écriture de l'équation dynamique précédente. On donnera également la forme vectorielle de l'EDP.
5. Transformer l'équation précédente en utilisant la formule $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}) - \vec{\Delta}$.
6. Identifier les solutions de cette équation telles que $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{u}(t,x)) = \vec{0}$ et $\vec{f} = \vec{0}$.
7. Identifier les solutions de cette équation telles que $\mathrm{div}(\vec{u}(t,x)) = 0$ et $\vec{f} = \vec{0}$.
8. Ecrire les conditions aux limites exprimant i) un encastrement sur la frontière du domaine $\partial V$, ii) une surface libre.