

Analyse et revue bibliographique de la littérature pour le calcul  
de manœuvres impulsionsnelles d'évitement de collision en orbite  
basse : rencontres simples et multiples

D. Arzelier, M. Joldeş, J.B. Lasserre

Equipe MAC (Méthodes et Algorithmes en Commande), LAAS-CNRS  
7, avenue du Colonel Roche 31031 Toulouse  
lasserre@laas.fr

Equipe ROC (Recherche Opérationnelle Optimisation Contraintes)  
LAAS-CNRS  
7, avenue du Colonel Roche 31031 Toulouse  
denis.arzelier@laas.fr, mioara.joldes@laas.fr

Automatisation et système bord autonome pour la gestion des risques de collision  
(Lot technique n°1, tâche 2220)

Ref:

R&T: 23SST2018-20-EU-SST WP7

Rapport Technique TR 2

Version 1.0

1<sup>er</sup> décembre 2021

# Table des matières

Notations . . . . .	4
Acronymes . . . . .	6
<b>1 Cadres théoriques pour les rencontres rapides simples et multiples</b>	<b>9</b>
1.1 Modèle général d'une rencontre rapide simple . . . . .	9
1.1.1 Géométrie des objets . . . . .	9
1.1.2 Définition des incertitudes affectant le modèle . . . . .	11
1.1.3 Définition de la collision . . . . .	11
1.1.4 Le cadre théorique des rapprochements rapides et les hypothèses associées . .	12
1.2 Le cadre des rencontres rapides multiples sous hypothèse d'indépendance . . . . .	15
<b>2 Evitement de collision dans le cas d'un risque simple de rencontre rapide</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Méthode heuristique par séparation radiale ou angulaire . . . . .	19
2.2.1 Manœuvre d'évitement pour une séparation radiale . . . . .	19
2.2.2 Manœuvre d'évitement pour une séparation angulaire ou approche par déphasage . . . . .	23
2.3 Méthodes des scénarios . . . . .	25
2.3.1 Introduction . . . . .	25
2.3.2 Formulation du problème . . . . .	25
2.3.3 Résolution à l'aide de l'approche par scénarios . . . . .	28
2.3.4 Principe de l'approche par scénarios . . . . .	28
2.3.5 Un algorithme par scénarios pour le problème d'évitement de collision . . . .	29
2.3.6 Calcul du gradient de la fonction contrainte . . . . .	30
2.3.7 Quelques résultats numériques . . . . .	32
2.3.8 Exemple 1 . . . . .	32
2.3.9 Exemple 2 . . . . .	33
2.3.10 Conclusion . . . . .	34
2.4 Méthode de l'outil OCCAM . . . . .	36
2.4.1 Introduction . . . . .	36
2.4.2 Analyse cinématique et dynamique de la manœuvre d'évitement de collision .	36
2.4.3 Manœuvre de maximisation de la miss distance pour une rencontre directe . .	43
2.4.4 Manœuvre de minimisation de la probabilité de collision pour une rencontre directe . . . . .	44
2.4.5 Manœuvre d'évitement de collision pour une rencontre indirecte pour la maximisation de la miss distance . . . . .	46
2.5 Méthode de Slater . . . . .	50
2.6 Méthode de Denenberg-Gurfil (aka Patera-Peterson) . . . . .	53

2.6.1	Introduction . . . . .	53
2.6.2	Calcul de la manœuvre d'évitement . . . . .	53
2.6.3	Discussion sur le choix de la date de la manœuvre $t_m$ . . . . .	54
2.6.4	Quelques notes sur l'application de cette stratégie dans le cas d'un cluster . . . . .	55
2.7	Méthodes fondées sur l'utilisation de l'algèbre différentielle . . . . .	57
2.7.1	Approche par optimisation multi-objectif . . . . .	57
2.7.2	Approche par formulation convexe . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Evitement de collision dans le cas d'un risque multiple de rencontres rapides</b>	<b>68</b>
3.1	Introduction . . . . .	68
3.2	Méthode de Duncan . . . . .	68
3.2.1	Introduction . . . . .	68
3.2.2	Définition de la fonction objectif par pénalisation des contraintes . . . . .	69
3.2.3	Principe de l'algorithme DFO . . . . .	70
3.3	Méthode de Kim . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Evitement de collision multi-manœuvre dans le cas d'un risque multiple de rencontres rapides avec contraintes opérationnelles</b>	<b>74</b>
4.1	Définition fonctionnelle du problème d'évitement . . . . .	74
4.2	Formulation du problème d'évitement multi-risque comme un problème d'optimisation linéaire sous contraintes quadratiques non convexes . . . . .	75
4.2.1	Formulation basée sur la miss distance . . . . .	75
4.2.2	Formulation basée sur la distance de Mahalanobis à $t_{TCA}$ . . . . .	77
4.2.3	Formulation basée sur l'approximation de la probabilité $\mathcal{P}_c^{2D}$ . . . . .	78
4.2.4	Formulation basée sur la probabilité maximale $\mathcal{P}_{\max}$ . . . . .	79
4.3	Minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes	79
4.3.1	Préliminaires . . . . .	79
4.3.2	Relaxation SDP . . . . .	82
4.3.3	Quelques exemples illustratifs . . . . .	85
4.4	Une hiérarchie de relaxations SDP pour l'optimisation polynomiale . . . . .	90
4.4.1	Equivalence avec un problème de programmation linéaire dans l'espace des mesures positives . . . . .	90
4.4.2	Caractérisation d'une mesure par ses moments . . . . .	92
4.4.3	Le problème des moments . . . . .	93
4.4.4	Une hiérarchie convergente de relaxations SDP . . . . .	97
4.4.5	Liens avec les certificats de positivité des polynômes via la dualité SDP . . . . .	102
4.4.6	Quelques exemples illustratifs . . . . .	105
4.5	Un algorithme par subdivision fondé sur la méthode de l'ellipsoïde . . . . .	109
4.5.1	Introduction . . . . .	109
4.5.2	Méthode de l'ellipsoïde pour la minimisation d'une fonction convexe . . . . .	109
4.5.3	Un algorithme ellipsoïdal . . . . .	114
4.5.4	Quelques exemples illustratifs . . . . .	116
4.6	Notes d'implémentation et conclusions . . . . .	123
<b>A</b>	<b>Les repères de référence</b>	<b>124</b>
A.1	Le repère géocentrique équatorial . . . . .	124
A.2	Le repère pérfocal PQW . . . . .	126
A.3	Repères orbitaux locaux . . . . .	128

A.3.1	Le repère orbital local RSW (RTN) de Gauss . . . . .	128
A.3.2	Le repère orbital local NTW de Frenet . . . . .	132
<b>B</b>	<b>Les orbites képlériennes elliptiques</b>	<b>134</b>
B.1	Problème de Kepler . . . . .	134
B.2	Nature des trajectoires . . . . .	134
B.3	Anomalies angulaires . . . . .	135
B.4	Solution du problème de Kepler . . . . .	136
B.5	Coefficients $f$ et $g$ de Lagrange . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Théorie de la mesure</b>	<b>138</b>
C.1	Définitions, résultats et faits élémentaires de la théorie de la mesure . . . . .	139
C.2	Fonctions mesurables et intégration . . . . .	142

## Notations

### Mathématiques

Les preuves sont terminées par le symbole  $\square$ .

### Ensembles

- $\mathbb{N}$  : ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z}$  : ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes ;
- $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq 1\}$  ;
- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x \geq 0\} = [0, +\infty[$ . La même notation s'applique pour les indices " $> 0$ ", " $\leq 0$ ", et " $< 0$ " ;
- $[a, b]$  : nombres réels entre  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  inclus ;
- $\llbracket a, b \rrbracket$  : entiers entre  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  et  $b$  inclus ;
- $\mathbb{R}^n[x]$  : anneau des polynômes réels en les variables  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ;
- $\mathbb{R}^n[x]_r = \{p \in \mathbb{R}^n[x] \text{ s.t. } \deg(p) \leq r\}$  : anneau des polynômes réels en les variables  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et de degré maximal  $r \in \mathbb{N}$  ;
- $\Sigma[x]_r = \{p \in \mathbb{R}^n[x] \text{ s.t. } \deg(p) \leq r\}$  : cône convexe des polynômes sommes de carrés in the variables  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et de degré maximal  $2r \in \mathbb{N}$  ;
- $\mathbb{M}(S)$  : ensemble de toutes les mesures de Borel finies et signées, définies sur le sous ensemble  $S$  d'un espace mesurable ;
- $\mathbb{M}(S)_+$  : ensemble (cône convexe) de toutes les mesures de Borel et non négatives, définies sur le sous ensemble  $S$  d'un espace mesurable ;
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  : ensemble des matrices avec  $m \in \mathbb{N}$  lignes et  $n \in \mathbb{N}$  colonnes, et dont les éléments sont dans le corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) ;
- $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$  : ensemble des fonctions réelles continues sur l'ensemble compact  $\mathbf{K}$  et espace de Banach en l'équipant de la norme sup ;
- $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})_+$  : cône convexe des fonctions réelles continues non négatives sur l'ensemble compact  $\mathbf{K}$  ;
- ${}^c_A B := A \setminus B = \{x \in A \text{ t.q. } x \notin B\}$  : complément de  $B$  dans  $A$ . L'indice préfixe  $c$  peut être omis si le contexte est suffisamment clair ;
- $\partial A$  : frontière de l'espace topologique  $A$  ;
- $\text{cl}(A) = A \cup \partial A$  : fermeture de l'espace topologique  $A$  ;
- $\text{card}(A)$  : cardinal de l'ensemble dénombrable  $A$  ;
- $\overline{B}(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|x - y\|_2 \leq R\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$ ) ;
- $\text{supp}(f) = \text{cl}(\{x \in A \text{ t.q. } f(x) \neq 0\})$  : support de  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ;
- $\mathbb{N}^n$  : multi-indices of dimension  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\mathbb{N}^n_r = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq r\}$  multi-indices de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et de degré maximal  $r \in \mathbb{N}$ .

### Polynômes

- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  ( $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) ;

- $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x = (x_i)_{i=1, \dots, n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ );
- $\deg(p)$  : degré du polynôme  $p \in \mathbb{R}^n[x]$ ;
- $v_d(x) = x^\alpha = (1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_{n-1} x_n, x_1^d, \dots, x_n^d)^T$  : vecteur de tous les monômes  $x^\alpha$  de degré inférieur ou égal à  $d$  pour un vecteur d'indéterminées de dimension  $n$ ;

## Analyse complexe

- $\operatorname{Re}(z)$  : partie réelle de  $z \in \mathbb{C}$ ;
- $\operatorname{Im}(z)$  : partie imaginaire de  $z \in \mathbb{C}$ ;

## Fonctions

- $id$  : fonction identité c.-à-d.  $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto x$ ;
- $1_B$  : fonction indicatrice de l'ensemble  $B$ ;
- erf : fonction d'erreur de Gauss;
- $|\cdot|$  : valeur absolue;
- $|z|$  : module de  $z \in \mathbb{C}$ ;
- $\|x\|_2 = \left[ x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$  : norme euclidienne;
- $\lfloor x \rfloor$  : floor value (greatest integer less than or equal to  $x \in \mathbb{R}$ );
- $\lceil x \rceil$  : ceiling value (least integer greater than or equal to  $x \in \mathbb{R}$ );

## Calcul Différentiel et Analyse Vectorielle

Soit  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un champ scalaire et  $g : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ vectoriel.

- $\partial_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  : dérivée partielle de  $f$  par rapport à la variable  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ );
- $\dot{g} = \partial_t g = (\partial_t g_1, \partial_t g_2, \dots, \partial_t g_m)$  : dérivée partielle temporelle de  $g$ ;
- $\nabla f = (\partial_t f, \partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots)^T$  : opérateur gradient;
- $H[f]$  : opérateur hessien;
- $J(g) = (\partial_{x_1} g, \partial_{x_2} g, \dots, \partial_{x_n} g)$  : opérateur jacobien;
- $d_t f = \frac{df}{dt} = \partial_t f + (\nabla f) \cdot g$  : dérivée totale de  $f$  suivant le champ de vecteur  $g$ ;

## Algèbre Linéaire

- $I_n$  : matrice carrée identité de dimension  $n$ ;
- Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}))^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). La notation «  $A \succeq 0$  » signifie  $A$  est semidéfinie positive. «  $A \succeq B$  » signifie «  $A - B \succeq 0$  »;
- Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . La notation «  $u \succeq 0$  » signifie que le vecteur  $u$  appartient au cône défini par l'orthant positif ou que le vecteur  $u$  a toutes ses composantes positives ou nulles. «  $u \succeq v$  » signifie «  $u - v \succeq 0$  »;
- $u \cdot v$  : produit scalaire entre les vecteurs  $u$  et  $v$ ;
- $u \times v$  : produit vectoriel entre les vecteurs  $u$  et  $v$ ;
- $A^\dagger$  : matrice pseudo-inverse de la matrice  $A$ ;
- $0_{n,m}$  est une matrice de zéros de dimensions  $n \times m$ ;

- $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  est le vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , composé de 0 sauf pour la  $i$ -ième composante qui est égale à 1 ;

## Dénombrement, Probabilités et Statistiques

- $n!$  : factoriel de  $n \in \mathbb{N}$  ;
- $l(k) = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n!k!}$  : binomial coefficients du binôme pour  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n \geq k$  ;
- $l(n, k) = \binom{n+2k}{2k}$  ;
- $\mathbb{P}\{E\}$  : probabilité de l'évènement  $\{E\}$  ;
- $\mathbb{E}(x) = \mu_x$  : opérateur espérance (vecteur moyenne) appliqué au vecteur aléatoire  $x$  de dimension  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ;
- $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \Sigma_x)$  :  $x$  est un vecteur aléatoire de dimension  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) dont la distribution est une gaussienne multivariée de vecteur moyenne  $\mu_x \in \mathbb{R}^n$  et de matrice de covariance  $\Sigma_x \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  ( $\Sigma_x \succeq 0$ ) ;

## Dynamiques Orbitales

### Notations pour les modèles d'état orbitaux

Ces notations définissent les notations utilisées pour les vecteurs d'état et les dynamiques associées dans ce rapport sauf mention explicite de changement de notation au début d'une section.

- $r_\star = (r_{\star 1}, r_{\star 2}, r_{\star 3})^T$  : vecteur position de l'objet  $\star$  dans un référentiel donné, (primaire :  $\star = p$ , secondaire :  $\star = s$ , relatif :  $\star = r$ ) ;
- $v_\star = (v_{\star 1}, v_{\star 2}, v_{\star 3})^T$  : vecteur vitesse de l'objet  $\star$  ;
- $x_\star = (r_\star^T, v_\star^T)^T$  : vecteur d'état de l'objet  $\star$  ;
- $X_{\star b} = (x_\star^T, x_b^T)^T$  : vecteur d'état de l'objet composé de  $\star$  et  $b$  ;
- $f_\star(\cdot, \cdot)$  : dynamique du système (objet)  $\star$  ;
- $x(\cdot | x^0)$  : trajectoire, solution des équations du mouvement issue de la condition initiale  $x^0$  ;

### Constantes et paramètres orbitaux

- $\mu_\oplus = GM_\oplus = 3.9860047 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$  : paramètre gravitationnel standard pour la terre (modèle de potentiel US GEM-T1) ;
- $a$  : demi-grand axe ;
- $\Omega$  : ascension droite du noeud ascendant ;
- $\omega$  : argument du périhélie ;
- $i$  : inclinaison ;
- $e$  : excentricité ;
- $\theta$  : anomalie vraie ;
- $M$  : anomalie moyenne ;
- $E$  : anomalie excentrique ;
- $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  : mouvement moyen ;
- $T^o$  : période orbitale ;

## Acronymes

- JSpOC : Joint Space Operations Center ;

- CSpOC : Combined Space Operations Center ;
- TCA : Time of Closest Approach ;
- COO : Centre d'Orbitographie Opérationnel ;
- HCW : Hill-Clohessy-Wiltshire ;
- YA : Yamanaka-Ankersen ;
- LEO : Low Earth Orbit (altitude between 160 kilometres and 2 000 kilometres) ;
- DFO : Differential Free Optimization ;
- PDF : Probability Density Function ;
- TM : Modèles de Taylor ;
- DCA : Distance of Closest Approach ;



# Introduction

Ce rapport a pour objectif de proposer une analyse bibliographique raisonnée de la littérature dédiée au problème de l'évitement de collision en orbite. Cette analyse ne prétend pas à l'exhaustivité puisque nous n'avons pu avoir accès à certaines références rencontrées en citations au cours de notre recherche bibliographique. Le rapport est divisé en deux parties très inégales. La première est consacrée au problème d'évitement de collision pour un risque simple alors que la seconde est dédiée aux risques multiples. La pauvreté des références sur ce deuxième sujet explique le déséquilibre entre les deux parties. Que ce soit pour les risques simples ou pour les risques multiples, la procédure classique pour la planification de manœuvres d'évitement peut être construite en trois étapes : l'identification des menaces potentielles, l'évaluation des risques, le calcul de la manœuvre d'évitement. Dans ce rapport, même si nous ferons quelques appels aux méthodes d'évaluation du risque, qui sont détaillées dans d'autres rapports [13] et [15], l'analyse de la littérature portera exclusivement sur la dernière étape.

Nous souhaitons finir sur une remarque importante relative à l'apparent manque d'homogénéité des différentes présentations des travaux de la littérature. Ce manque d'homogénéité de traitement n'est que le reflet de la qualité très inégale des présentations rencontrées avec dans la majorité des cas peu de détails précis et rigoureux fournis par les auteurs sans compter sur les notations le plus souvent imprécises et amenant plus de confusion que de clarification. Cela s'explique sans doute par le fait que les méthodes sont à la base du développement d'outils industriels qui sont eux-mêmes les principaux enjeux de ce domaine.

# Chapitre 1

## Cadres théoriques pour les rencontres rapides simples et multiples

Ce premier chapitre a pour objectif de rappeler les notations, concepts et objets mathématiques qui seront utilisés dans la suite de ce rapport. Il reprend donc en grande partie le matériau déjà utilisé dans les rapports [14] et [15]. Il y a été ajouté une partie nouvelle essayant d'élaborer un cadre général définissant la problématique de l'évitement de collision avec risques multiples sous hypothèse d'indépendance des rencontres qui seront, d'autre part, toutes assimilées à des rencontres rapides (short-term).

### 1.1 Modèle général d'une rencontre rapide simple

Nous nous plaçons dans le cadre de l'étude d'une rencontre entre un objet primaire noté  $p$  et un objet secondaire noté  $s$ .

#### 1.1.1 Géométrie des objets

La nature géométrique des objets en conjonction doit être connue afin de définir l'état de collision entre eux.

**Hypothèse 1** (Géométrie sphérique.).

*Les objets  $p$  et  $s$  sont modélisés par des sphères, de diamètre respectif  $D_p$  et  $D_s$ .*

Cette hypothèse permet d'ignorer tous les aspects liés à l'orientation dans l'espace des deux corps, et notamment les éventuelles contraintes d'attitude de l'objet primaire. Elle permet aussi de modéliser de manière conservatrice l'objet secondaire, dont la géométrie est souvent mal connue.

**Remarque 1.**

*Plusieurs auteurs [84, 4, 33] se sont intéressés à des géométries différentes, comme des polygones ou des assemblages de polygones. De tels modèles permettent de modéliser plus finement des structures complexes comme la Station Spatiale Internationale [33].*

La Figure 1.1 représente la configuration spatiale d'une rencontre entre deux objets modélisés par des sphères.

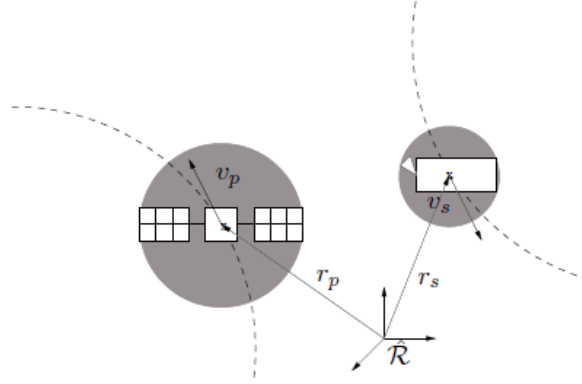


FIGURE 1.1 – Profil sphérique d’une rencontre

### Modèles dynamiques pour la rencontre

L’état de chaque objet en orbite est décrit par les vecteurs de leurs position et vitesse,  $x_p^T = (r_p^T, v_p^T)$  et  $x_s^T = (r_s^T, v_s^T)$ , donnés dans un repère de référence  $\hat{\mathcal{R}}$ . Ce peut être un référentiel inertiel ou bien un repère local. On considère un intervalle de temps  $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$  au cours duquel les deux corps sont soumis à des dynamiques propres définies par les champs de vecteurs  $f_p, f_s : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^3$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathcal{J}$  :

$$\frac{dv_p}{dt}(t) = f_p(t, x_p), \quad x_p(t_0) = x_p^0, \quad (1.1)$$

$$\frac{dv_s}{dt}(t) = f_s(t, x_s), \quad x_s(t_0) = x_s^0. \quad (1.2)$$

$T$  est un nombre réel positif définissant l’intervalle de temps de la rencontre et  $t_0$  est la date initiale (temps à l’époque par exemple). Ces dynamiques, supposées déterministes, tiennent compte de l’attraction gravitationnelle newtonienne. Elles peuvent aussi prendre en compte des perturbations orbitales diverses : non-sphéricité de la Terre, frottement atmosphérique, pression de radiation solaire, attraction de la Lune, etc. Quel que soit le modèle adopté, on suppose que les solutions aux problèmes de Cauchy des systèmes (1.1) et (1.2) sont uniques.

Afin de décrire la dynamique relative des objets, on définit le vecteur  $x_r^T = (r_r^T, v_r^T)$  tel que :

$$r_r = r_s - r_p, \quad (1.3)$$

et

$$v_r = v_s - v_p. \quad (1.4)$$

De la même façon, il est possible de définir un objet composé du primaire et du secondaire dont les états sont concaténés dans un vecteur global d’état  $X_{ps}$  :

$$X_{ps}^T = (r_p^T, v_p^T, r_s^T, v_s^T) \in \mathbb{R}^n,$$

où  $n = 12$ .

Les équations dynamiques de ces deux objets sont alors définies par :

$$\begin{cases} \dot{X}_{ps}(t) = f_{ps}(t, X_{ps}(t)), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ X_{ps}(t_0) = X_{ps}^0. \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $f_{ps}$  est un champ de vecteur réel composé des deux champs de vecteurs  $f_p$  et  $f_s$ .

**Définition 1** (Trajectoire).

Pour une condition initiale donnée  $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$ , une trajectoire issue de  $X_{ps}^0$  est la solution unique de :

$$X_{ps}(t|X_{ps}^0) = X_{ps}^0 + \int_{t_0}^t f(u, X_{ps}(u|X_{ps}^0))du. \quad (1.6)$$

### 1.1.2 Définition des incertitudes affectant le modèle

Grâce à des mesures physiques, les positions et vitesses des deux objets sont connues avec une certaine incertitude à un temps de référence, pris comme origine des temps. Le vecteur des conditions initiales  $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur aléatoire dont la distribution est définie par une mesure de probabilité donnée  $\mu_I$  dont la fonction de densité est  $\rho_I = \frac{d\mu_I}{d\lambda} : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^+$ . En revanche, le modèle dynamique de chaque objet est considéré comme déterministe et non incertain.

**Hypothèse 2** (Dynamiques déterministes.).

Les objets  $p$  et  $s$  suivent des dynamiques déterministes et non incertaines.

### 1.1.3 Définition de la collision

Définissons maintenant la notion de collision. Supposons que pour toute condition initiale  $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire correspondante existe sur l'intervalle de temps  $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + T]$ , alors une collision intervient quand une trajectoire entre dans une *région interdite*  $\mathcal{X}_R$  donnée. Par exemple, en pratique, dans le cadre de la modélisation sphérique (Hypothèse 1), il y a collision sur un intervalle de temps  $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$  si et seulement si on a l'existence de  $t \in \mathcal{I}$  tel que :

$$\|r_r(t)\|_2 \leq R, \quad (1.7)$$

avec :

$$R = \frac{D_p + D_s}{2}. \quad (1.8)$$

Si l'état  $X_{ps}$  est donné par les positions et vitesses des 2 objets, alors la *région interdite* est définie par :

$$\mathcal{X}_R = \{X_{ps}^T = (r_p^T, v_p^T, r_s^T, v_s^T) \in \mathbb{R}^{12} \mid \|r_s - r_p\|^2 - R^2 \leq 0\}. \quad (1.9)$$

En d'autres termes, du point de vue de la position relative, l'ensemble de collision à un instant  $t$  est assimilable à une sphère fictive de rayon  $R$ . On définit ainsi l'objet sphérique combiné, représenté sur la Figure 1.2 comme la région interdite  $\mathcal{X}_R$ .

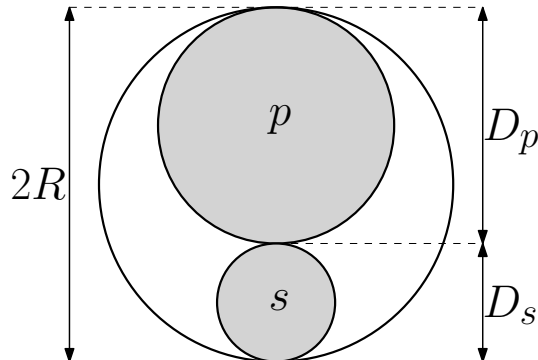


FIGURE 1.2 – Sphère combinée des deux objets

Définissons le complément de la région interdite, appelé *région admissible*, par  ${}^c\mathcal{X}_R := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}_R$ .

**Définition 2** (Collision).

Pour une condition initiale  $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$ , une date de fin de rencontre  $T + t_0 > 0$ , et une région interdite  $\mathcal{X}_R$ , une collision intervient s'il existe  $t \in [t_0, t_0 + T]$  tel que  $X_{ps}(t|X_{ps}^0) \in \mathcal{X}_R$ .

**Définition 3** (Domaine de collision).

Le domaine de collision  $\mathcal{X}_T^0$  sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$  est l'ensemble des conditions initiales conduisant à une collision entre une paire d'objets durant l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$  :

$$\mathcal{X}_T^0 = \{X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [t_0, t_0 + T], X_{ps}(t|X_{ps}^0) \in \mathcal{X}_R\}. \quad (1.10)$$

**Remarque 2.**

Dans l'Equation (1.9) et la Définition 3, les ensembles  $\mathcal{X}_R$  et  $\mathcal{X}_T^0$  ont été définis à partir du vecteur d'état  $X_{ps}$  de l'objet combiné. Des définitions équivalentes pourraient être données à partir de n'importe quel vecteur d'état combiné tel que  $X_{rp}$  par exemple. En fait, si l'on restreint la région interdite à la sphère combinée, seul le vecteur d'état relatif  $x_r$  est impliqué dans la définition de ces ensembles. Dans ce cas, qui est celui qui va être exclusivement étudié dans ce rapport, ces ensembles sont tels que  $\mathcal{X}_R \subset \mathbb{R}^{n/2}$  et  $\mathcal{X}_T^0 \subset \mathbb{R}^{n/2}$ .

#### 1.1.4 Le cadre théorique des rapprochements rapides et les hypothèses associées

Certaines rencontres se caractérisent par une vitesse relative moyenne élevée, de l'ordre du km/s. Cette configuration pousse à faire des hypothèses supplémentaires afin de définir le modèle dit des rencontres rapides (« short-term encounter » dans la littérature anglophone [33, 40]), dont par ailleurs certains auteurs se sont intéressés aux limites de validité [39, 46, 33] comme nous le verrons dans la suite de ce rapport. Cette modélisation de la rencontre repose sur un ensemble d'hypothèses qui vont être rappelées précisément dans la suite, dont, en particulier, l'hypothèse fondamentale d'un mouvement relatif rectiligne, réaliste en raison de la faible courbure de la trajectoire au plus proche de la conjonction. Il existe même chez certains auteurs [84, 2] une dénomination alternative du modèle sous la forme de rencontre linéaire. Dans un tel cadre, la probabilité de collision admet une expression simplifiée, sous la forme d'une intégrale 2-D. Les démonstrations de cette formule varient dans la littérature, où l'on distingue essentiellement deux formulations. D'un côté, il est possible d'obtenir d'abord une expression du taux de collision, puis de l'intégrer selon la variable temporelle [1, 40]. Cette formulation sera analysée dans la deuxième partie de ce rapport quand il sera question de justifier la validité théorique de la formule de Coppola pour le calcul de la probabilité de collision dans le cadre des rencontres long-terme. De l'autre, certains auteurs [7, 33] suivent un raisonnement similaire à ce qui est proposé dans la suite de cette section, dans la continuité du cas général présenté dans la section précédente. Plus précisément, on considère le volume géométrique des coordonnées relatives initiales aboutissant à une collision, sur lequel on intègre ensuite la fonction de densité du vecteur aléatoire de position relative.

L'idée essentielle sur laquelle repose la classe des rencontres rapides est que la durée de la conjonction est suffisamment courte pour permettre à un certain nombre d'hypothèses simplificatrices d'être considérées comme pertinentes et valides. Par exemple, la faible durée de la rencontre incite à négliger les écarts concernant les vitesses des deux objets, limitant ainsi l'incertitude à leurs seules positions.

**Hypothèse 3** (Aucune incertitude sur la vitesse relative.).

A chaque instant  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , le vecteur de vitesse relative  $v_r(t)$  est précisément connu et est un vecteur déterministe.

Les hypothèses suivantes sont également fondamentales et concernent la modélisation des incertitudes affectant les conditions initiales des deux objets.

**Hypothèse 4** (Vecteurs aléatoires gaussiens.).

*On suppose que les conditions initiales  $x_p^0$  et  $x_s^0$  suivent des lois de distribution multinormales conjointement définies c.-à-d.  $x_p^0 \sim \mathcal{N}_3(m_{p0}, P_{p0})$  et  $x_s^0 \sim \mathcal{N}_3(m_{s0}, P_{s0})$ . Cela implique que le vecteur aléatoire  $X_{ps}^0$  est gaussien ( $X_{ps}^0 \sim \mathcal{N}_6(m_{ps0}, P_{ps0})$ ).*

On déduit facilement de cette hypothèse que la mesure initiale  $\mu_I$  est une distribution gaussienne de densité  $\rho_I(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(P_{ps0})}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - m_{ps0})^T P_{ps0}^{-1} (x - m_{ps0}) \right]$ . Associée à cette dernière hypothèse, une hypothèse d'indépendance (équivalente à la décorrélation dans le cas gaussien) est également nécessaire.

**Hypothèse 5** (Indépendance des lois de probabilité.).

*On suppose que les vecteurs aléatoires  $x_p^0$  et  $x_s^0$  sont indépendants.*

La nature géométrique de la trajectoire relative est fondamentale dans la dérivation de la formule 2D de la probabilité de collision pour les rencontres rapides.

**Hypothèse 6** (Mouvement rectiligne uniforme.).

*Le mouvement de chaque objet est considéré comme rectiligne uniforme pendant la rencontre. Ainsi, pour tout  $t \in [t_0, t_0 + T]$  :*

$$r_p(t) = r_p^0 + v_p^0 t, \quad (1.11)$$

$$r_s(t) = r_s^0 + v_s^0 t. \quad (1.12)$$

*Cela signifie que le mouvement relatif entre les deux objets sera un mouvement rectiligne  $r_r(t) = r_r^0 + v_r^0 t$ .*

Les hypothèses de mouvement rectiligne et de vitesses déterministes conduisent naturellement à introduire le plan et le repère de la rencontre. La définition exacte de ce dernier varie dans la littérature [33, 85] mais, dans tous les cas, le repère est centré sur l'un des objets et un des axes est orienté selon la vitesse relative.

**Définition 4.** *Repère et plan de rencontre au temps  $t$ .*

*A une date  $t$ , on définit le repère local de rencontre  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  de la manière suivante :*

- *Origine : position moyenne du centre de gravité de l'objet primaire*
- *Axe  $\tilde{z}$  : orienté selon la vitesse relative  $v_r^0$*

*Les deux autres axes sont perpendiculaires à la vitesse relative. Le plan  $\Pi_t$  contenant l'origine et qui est engendré par ces axes est appelé plan de rencontre.*

- *Axe  $\tilde{x}$  : dirigé vers la projection de la position moyenne du centre de gravité de l'objet secondaire dans le plan de rencontre*
- *Axe  $\tilde{y}$  : complète le repère orthogonal direct*

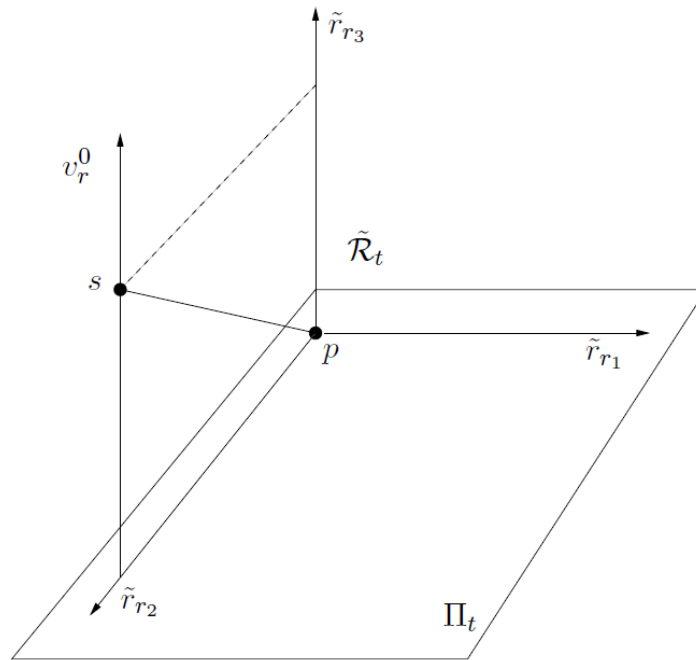


FIGURE 1.3 – Repère et plan de rencontre

## 1.2 Le cadre des rencontres rapides multiples sous hypothèse d'indépendance

L'objectif de cette section est d'étendre la cadre précédent définissant une rencontre entre un objet primaire et un unique objet secondaire à celui de rencontres multiples entre un objet primaire  $p$  et plusieurs secondaires  $s_1, \dots, s_\iota$ . On suppose que chacune de ces rencontres se produit sous les hypothèses d'une rencontre rapide et à des dates de TCA  $t_{\text{TCA}}^i$  suffisamment différentes pour pouvoir supposer que ces évènements sont indépendants les uns des autres. Afin de ne pas compliquer et surcharger inutilement les notations, nous nous intéresserons au cas paradigmatique de la rencontre multiple d'un objet primaire avec deux objets secondaires, c.-à-d.  $\iota = 2$ . L'ensemble des hypothèses faites pour la rencontre simple rapide est repris intégralement avec les généralisations de notations suivantes :

- 1- Chaque objet est assimilé à une sphère de rayon respectif  $R_p, R_1$  et  $R_2$ . On définit ainsi deux rayons de deux objets combinés  $R_{p_1}$  et  $R_{p_2}$ .
- 2- Chaque objet est soumis à une dynamique propre déterministe donnée respectivement par les champs de vecteurs  $f_p, f_{s_1}, f_{s_2}$ .
- 3- L'incertitude affectant la position de chaque objet (et donc la position relative deux à deux) a pour origine la propagation de la distribution normale de la position de chaque objet connue respectivement à une date  $\tau_p, \tau_1$  et  $\tau_2$ , comme  $r_p(\tau_p) \sim \mathcal{N}(\mu_{r_p}(\tau_p), \Sigma_{r_p}(\tau_p))$ ,  $r_1(\tau_1) \sim \mathcal{N}(\mu_{r_1}(\tau_1), \Sigma_{r_1}(\tau_1))$  et  $r_2(\tau_2) \sim \mathcal{N}(\mu_{r_2}(\tau_2), \Sigma_{r_2}(\tau_2))$ .
- 4- Les lois de probabilité de  $r_p(\tau_p), r_1(\tau_1)$  et  $r_2(\tau_2)$  sont indépendantes.
- 5- Chaque mouvement relatif entre l'objet primaire  $p$  et respectivement  $s_1$  et  $s_2$  sera considéré comme rectilinéaire uniforme, au moins localement autour de chaque date de rencontre  $t_{\text{TCA}}^1$  et  $t_{\text{TCA}}^2$ . Il y aura ainsi deux plans de rencontres et deux repères de rencontre associés.

La généralisation des ensembles définis pour caractériser les rencontres simples est directe. On définit ainsi deux régions interdites comme :

$$\mathcal{X}_{R_i} = \{(r_p, r_i) \in \mathbb{R}^6 \mid \|r_i - r_p\|^2 - R_{p_i}^2 \leq 0\}, \quad i = 1, 2. \quad (1.13)$$

**Définition 5** (Collision).

Etant donné un vecteur d'état agrégé de conditions initiales  $(r_{p_0}, v_{p_0}, r_{s_{10}}, v_{s_{10}}, r_{s_{20}}, v_{s_{20}}) = X_{ps_1s_2}^0 \in \mathbb{R}^{18}$  donné à un temps de référence  $t_0$ , une date maximale  $T+t_0 > 0$ , et les régions interdites  $\mathcal{X}_{R_i}$ , une collision intervient s'il existe  $t \in \mathcal{J} = [t_0, t_0 + T]$  tel que  $X_{ps_1s_2}(t|X_{ps_1s_2}^0) \in \mathcal{X}_{R_1} \cup \mathcal{X}_{R_2}$ .

**Définition 6** (Domaine de collision).

Le domaine de collision (aussi appelé swept-volume dans [15])  $\mathcal{X}_T^0$  défini sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$  est l'ensemble des conditions initiales conduisant à une collision entre l'objet primaire  $p$  et l'objet secondaire  $s_1$  ou (inclusif) entre l'objet primaire  $p$  et l'objet secondaire  $s_2$  durant l'intervalle  $\mathcal{J}$  :

$$\mathcal{X}_T^0 = \{X_{ps_1s_2}^0 \in \mathbb{R}^{18} \mid \exists t \in [t_0, t_0 + T], X_{ps_1s_2}(t|X_{ps_1s_2}^0) \in \mathcal{X}_{R_1} \cup \mathcal{X}_{R_2}\}. \quad (1.14)$$

**Remarque 3.**

Le domaine de collision a été défini à partir d'une date unique  $t_0$  de référence alors que les distributions de chaque objet ont été supposées connues à des dates possiblement différentes. Dans le cas où la connaissance de l'incertitude statistique est obtenue à l'aide d'un bulletin construit pour une date unique, on aura évidemment  $t_0 = \tau_p = \tau_{s_1} = \tau_{s_2}$ . Si ce n'est pas le cas, il sera toujours possible de propager les incertitudes jusqu'à la date  $t_0$  pour un ou plusieurs objets.

Le problème d'évaluation du risque de rencontres multiples (ici un primaire avec deux secondaires) est donc généralisé simplement (au moins formellement) à partir de la définition de l'évaluation du risque d'une rencontre simple [15].



**Problème 1.** Pour les dynamiques  $f_p$ ,  $f_{s_1}$  et  $f_{s_2}$ , une date  $t_0 + T > 0$  et deux régions interdites  $\mathcal{X}_{R_i}$ ,  $i = 1, 2$  si les conditions initiales  $X_{ps_1s_2}^0 \in \mathbb{R}^{18}$  sont distribuées suivant une mesure de probabilité  $\mu_I$  de fonction de densité  $\rho_I$ , la probabilité qu'une collision entre le primaire  $p$  et les secondaires  $s_1$  et  $s_2$  intervienne s'écrit comme :

$$\mathcal{P}_c([t_0, t_0 + T]) = \mathcal{P}_c(T, t_0) = \mathbb{P}\{X_{ps_1s_2}^0 \in \mathcal{X}_T^0\} = \mu_I(\mathcal{X}_T^0) = \int_{\mathcal{X}_T^0} d\mu_I. \quad (1.15)$$

Calculer la quantité donnée dans (1.15), est encore plus difficile que dans le cas d'une rencontre simple car outre les difficultés de paramétrisation du domaine d'intégration et du calcul de l'intégrale elle-même, la caractérisation de la mesure  $\mu_I$  n'est pas aussi directe que dans le cas d'une rencontre simple.

Nous avons connaissance de relativement peu d'études sur le problème d'évaluation du risque de rencontres multiples sans hypothèses simplificatrices fortes. Nous pouvons renvoyer le lecteur au rapport [13] qui propose un cadre théorique de modélisation de ce problème très général ainsi qu'une approche de calcul dans l'espace des mesures qui n'est malheureusement pas encore suffisamment mûre pour être effective en pratique. Les approches existantes dans la littérature peuvent être classées en deux grandes familles complémentaires : celles combinant les probabilités de collision déterminées pour de multiples paires d'objets et pour de multiples cycles de contrôle comme dans la référence [88] et des méthodes fondées sur le calcul de probabilités de collision pour des rencontres uniques. Dans le cas qui nous intéresse (rencontres multiples indépendantes et à court terme), nous pouvons utiliser la probabilité de collision agrégée [47, 48] ou la probabilité de collision globale [52]. En effet, si l'on considère les 2 collisions comme 2 événements notés  $A_1, A_2$ . Sous l'hypothèse d'indépendance des événements  $A_i$ , nous avons :

$$\mathcal{P}_c([0, T]) \simeq \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^2 A_i\right\} = 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - \mathcal{P}_{c_i}) \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{P}_{c_i} = \mathbb{P}\{A_i\}$ .

Il est noter également que le Chapitre 12 du livre de K. Chan [33] est consacré à des rapprochements, sur un intervalle de temps donné, entre un objet primaire et plusieurs satellites groupés dans différentes classes. Les objets d'une classe spécifique sont définis par certaines tolérances faibles en altitude et en inclinaison. Tous les objets secondaires d'une classe ont des nœuds ascendants uniformément distribués autour de l'équateur et des angles de phase uniformément distribués dans le plan orbital.

## Chapitre 2

# Evitement de collision dans le cas d'un risque simple de rencontre rapide

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une recension des travaux de la littérature portant sur l'évitement de collision par application d'une manœuvre impulsienne, pour des rencontres rapides dans le cas d'un risque simple (rencontre d'un objet actionné avec un débris) par opposition au cas des risques multiples qui seront abordés dans le chapitre suivant. L'hypothèse de mouvement rectiligne de ce modèle permet de travailler avec un ensemble géométrique de collision ayant la forme d'un cylindre circulaire droit de hauteur infinie. Comme dans la référence [87], les effets de la manœuvre sont calculés en supposant une dynamique képlérienne. En conséquence, la propagation des orbites peut être faite analytiquement, par exemple grâce aux coefficients de Lagrange [17, 41, 67]. On cherche un plan de manœuvres sous la forme d'une unique impulsion, réalisée à une date avant la conjonction fixée par l'opérateur. En pratique, une telle action est généralement suffisante pour réduire le risque de collision à un niveau acceptable [93]. De plus, les effets de la poussée d'évitement sur l'orbite de l'objet primaire sont en général faibles et les corrections inhérentes peuvent être intégrées aux manœuvres nominales de maintien à poste.

Le problème défini dans sa plus grande généralité est d'une grande complexité, en particulier si l'on recherche une manœuvre optimale au sens d'un critère intégrant un calcul probabiliste du risque de collision. La modélisation d'un tel problème repose ainsi sur des choix fondamentaux qui vont non seulement conditionner la nature de la solution obtenue mais également les méthodes de résolution associées. Le premier choix fondamental concerne la définition du critère d'évitement de collision qui va définir la manière dont le risque de collision est quantifié. Par exemple, certains auteurs considèrent un critère géométrique (maximisation de la miss distance par exemple) en lieu et place d'un critère probabiliste (probabilité de collision). D'autre part, il est important également de clairement définir l'ensemble des variables de décision que l'on va utiliser afin de calculer la manœuvre optimale. Dans la littérature, l'ensemble des variables de décision possibles (date de manœuvre, direction et module de la poussée impulsienne) est souvent hiérarchisé afin d'utiliser des méthodes d'optimisation multi-niveau. Par exemple, pour une date d'exécution donnée, Patera et Peterson [87] recherchent d'abord une direction de poussée, avant de se consacrer à la recherche de son amplitude. Dans la référence [93], la date et la direction de la manœuvre sont fixées à l'avance de manière heuristique, l'objectif étant de réaliser une distance de plus proche passage donnée. On citera également l'article [23], où une linéarisation des fonctions par rapport aux composantes de l'incrément de vitesse est effectuée, approximation qui permet de calculer analytiquement une

manœuvre, définie à une anomalie vraie donnée, maximisant la distance de plus proche passage ou bien minimisant la probabilité de collision. Enfin, les contraintes imposées au calcul de la manœuvre sont également très variables et vont définir la nature de la solution optimale en définissant l'espace des manœuvres réalisables. La diversité des approches rencontrées témoignent des degrés de liberté possibles dans le traitement de ce problème.

Dans la suite, nous avons essayé, autant qu'il était possible, d'uniformiser les notations utilisées dans les différents travaux exposés mais nous avons parfois déroger à cette règle quand il nous a semblé nécessaire de préciser des notations particulières afin d'éclaircir des points qui ont été parfois présentés de manière trop concise dans les différents articles rencontrés. Nous l'avons précisé chaque fois au début de la section où ces changements ont été opérés.

## 2.2 Méthode heuristique par séparation radiale ou angulaire

Nous regroupons dans cette catégorie l'ensemble des approches qui consistent à calculer une manœuvre appliquée à une date fixée à un nombre donné de demi-périodes de la date de rencontre (TCA) et qui a pour objectif d'augmenter la séparation radiale ou la séparation angulaire entre les deux objets à la date de la TCA [24], [25], [93]. Il est assez difficile de trouver l'origine exacte de l'idée générale derrière cette approche ainsi que des détails techniques pertinents permettant de reconstruire complètement (ensemble complet d'hypothèses et dérivations rigoureuses des calculs de manœuvre) cette stratégie d'évitement. La présentation faite dans cette section s'appuiera donc essentiellement sur les deux références synthétiques [24], [25] qui se sont matérialisées dans l'outil logiciel QUARTZ de la société ADS et sur une reconstruction des calculs fondée sur les formules usuelles de la mécanique spatiale képlérienne.

### 2.2.1 Manœuvre d'évitement pour une séparation radiale

Nous présentons dans un premier temps la stratégie de calcul d'une manœuvre impulsionnelle purement tangentielle, affectant l'orbite de l'objet primaire et effectuée  $N + 0.5$  orbites avant la date de la TCA. L'objectif est d'augmenter la séparation radiale entre les deux objets à la date de la TCA, par modification du demi-grand axe de l'orbite du primaire (l'effet d'une telle poussée est représenté sur la Figure 2.1). Un certain nombre d'hypothèses plus ou moins clairement spécifiées sont faites dans [25].

**Hypothèse 7.** (*Hypothèses pour la séparation radiale*)

- L'orbite initiale primaire est circulaire.
- L'amplitude de la manœuvre est faible.
- Les erreurs d'efficacité et de direction de la manœuvre sont aléatoires et normalement distribuées.
- La trajectoire relative entre la date de TCA initiale et la date de TCA modifiée (après manœuvre) est supposée circulaire.

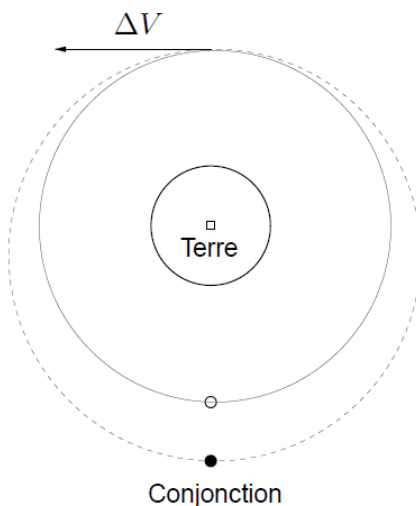


FIGURE 2.1 – Manœuvre tangentielle de séparation radiale.

La manœuvre d'amplitude minimale, calculée par une méthode de dichotomie (afin d'obtenir une probabilité de collision en dessous d'un seuil pré-défini), est appliquée à une date définie par  $N + 0.5$  orbites avant la date de TCA où  $N$  est un entier choisi en fonction de contraintes opérationnelles. Le processus synthétique de calcul de la manœuvre est le suivant :

0- **Calculer la manœuvre tangentielle afin d'obtenir une séparation radiale donnée par  $\Delta a = a_p - r_p$ .**

Le problème du calcul de la manœuvre d'évitement s'appuie sur le calcul classique d'une manœuvre tangentielle permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon  $r_p$  à une orbite elliptique coplanaire de demi-grand axe  $a_p$ . Ainsi, si l'on note la vitesse du primaire avant la manœuvre par  $v_p^-$ , la vitesse du primaire après manœuvre  $v_p^+$  (comme on travaille uniquement dans la direction tangentielle, la norme des vecteurs  $v_p^-$  et  $v_p^+$  sera notée  $\|(\cdot)\| = (\cdot)$ ), il est alors possible d'écrire pour un mouvement képlérien :

$$\begin{aligned} v_p^- &= \sqrt{\frac{\mu_\otimes}{r_p}} \\ v_p^+ &= \sqrt{\frac{2\mu_\otimes}{r_p} - \frac{\mu_\otimes}{a_p}}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

On obtient donc que  $\Delta V_T = v_p^+ - v_p^- = \sqrt{\frac{2\mu_\otimes}{r_p} - \frac{\mu_\otimes}{a_p}} - \sqrt{\frac{\mu_\otimes}{r_p}}$ . On peut montrer que  $\Delta V_T$  vérifie alors l'équation du second degré :

$$\Delta V_T^2 + 2\sqrt{\frac{\mu_\otimes}{r_p}} \Delta V_T + \mu_\otimes \left( \frac{1}{a_p} - \frac{1}{r_p} \right) = 0. \quad (2.2)$$

On obtient ainsi la manœuvre impulsionnelle comme :

$$\Delta V_T = -\sqrt{\frac{\mu_\otimes}{r_p}} + \sqrt{\frac{2\mu_\otimes}{r_p} - \frac{\mu_\otimes}{a_p}}. \quad (2.3)$$

En linéarisant l'expression (2.3) autour de la valeur de référence  $r_p$ ,  $\Delta V(a_p) = \Delta V(r_p) + \partial_1 \Delta V(r_p) \Delta a$ , on obtient la formule classique :

$$\Delta V_T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_\otimes}{r_p^3}} \Delta a. \quad (2.4)$$

Il est à noter que la formule (2.4) peut également être retrouvée en utilisant les équations aux variations de Gauss [18].

**Remarque 4.**

*Une relation très similaire peut également être trouvée dans [33, Section 7.1.1, Chapitre 7].*

1- **Calculer les caractéristiques de l'orbite primaire (position, vitesse) à la date de TCA initiale  $t_{\text{TCA}}^{\text{old}}$  et modifiées après application de la manœuvre.**

Les vecteurs position et vitesse à la TCA initiale sont obtenus par (rétro) propagation à l'aide de l'outil QUARTZ sans précision particulière sur les caractéristiques précises de cette propagation.

2- **Calculer la nouvelle date de TCA  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$  avec le débris et propager le nouvel orbite primaire.**

La modification de la trajectoire du primaire par la manœuvre implique une modification de la trajectoire relative entre les deux objets. Il est supposé que la nouvelle date de TCA est donnée par  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}} = t_{\text{TCA}}^{\text{old}} + dt$  où  $dt$  est petit. On fait également l'hypothèse que les trajectoires

primaires et secondaires durant ce temps  $dt$  sont circulaires. Ainsi, les équations du mouvement relatif sont supposées être les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) linéarisées autour de la trajectoire primaire initiale et qui sont rappelées en (2.5) dans le repère LVLH :

$$\begin{aligned}
r_{r_1}(t) &= r_{r_{10}} + 6(\delta t - s_t)r_{r_{30}} + (4s_t - 3\delta t)v_{r_{10}}/n_p + 2(1 - c_t)v_{r_{30}}/n_p \\
r_{r_2}(t) &= c_t r_{r_{20}} + s_t v_{r_{20}}/n_p \\
r_{r_3}(t) &= (4 - 3c_t)r_{r_{30}} + 2(c_t - 1)v_{r_{10}}/n_p + s_t v_{r_{30}}/n_p \\
v_{r_1}(t) &= 6n_p(1 - c_t)r_{r_{30}} + (4c_t - 3)v_{r_{10}} + 2s_t v_{r_{30}} \\
v_{r_2}(t) &= -n_p s_t r_{r_{20}} + c_t v_{r_{20}} \\
v_{r_3}(t) &= 3n_p s_t r_{r_{30}} - 2s_t v_{r_{10}} + c_t v_{r_{30}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dans ces équations,  $t_0 = t_{\text{TCA}}^{\text{old}}$ ,  $\delta t = n_p(t - t_0)$ ,  $c_t = \cos(n_p(t - t_0))$ ,  $s_t = \sin(n_p(t - t_0))$  et  $n_p = \sqrt{\frac{\mu_{\otimes}}{a_p^3}}$  est le mouvement moyen de l'orbite primaire qui est l'orbite de référence pour effectuer la linéarisation permettant d'obtenir les équations de HCW. L'intervalle de temps  $dt$  est alors calculé comme :

$$dt = -\frac{r_{r_0} \cdot v_{r_0}}{\|v_{r_0}\|^2} = -\frac{r_{r_{10}}v_{r_{10}} + r_{r_{20}}v_{r_{20}} + r_{r_{30}}v_{r_{30}}}{v_{r_{10}}^2 + v_{r_{20}}^2 + v_{r_{30}}^2}. \tag{2.6}$$

Cette expression est obtenue en considérant que la distance relative entre les deux objets est donnée par  $\|r_r(t)\| = \sqrt{r_{r_1}^2(t) + r_{r_2}^2(t) + r_{r_3}^2(t)}$  dont le carré est réécrit de manière linéarisée au premier ordre comme  $\|r_r(t)\|^2 = (r_{r_{10}} + v_{r_{10}}t)^2 + (r_{r_{20}} + v_{r_{20}}t)^2 + (r_{r_{30}} + v_{r_{30}}t)^2$ . En considérant que  $dt$  définit l'intervalle de temps qui minimise la distance relative (ou son carré) entre les deux objets, on obtient en annulant la dérivée de l'expression précédente en  $dt$  la formule (2.6). La nouvelle date de TCA est donc obtenue finalement par  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}} = t_{\text{TCA}}^{\text{old}} + dt$ .

**3- Calculer les caractéristiques de l'orbite secondaire à la nouvelle TCA  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$  en utilisant les équations linéarisées du mouvement relatif de Hill-Clohessy-Wiltshire.**

Les caractéristiques (positions et vitesses) de l'orbite primaire en  $t = t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$  peuvent être calculées à l'aide d'une propagation analytique (képlérienne par exemple). Les équations de HCW (2.5) sont alors utilisées pour déterminer les positions et vitesses du secondaire en  $t = t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$ .

**4- Mettre à jour la matrice de covariance primaire en position à la nouvelle TCA  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$  du fait des erreurs de réalisation de la manœuvre.**

Cette étape a pour objectif de corriger la matrice de covariance en position du primaire à la date  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$  en ajoutant à la matrice de covariance donnée par le bulletin d'alerte à la date  $t_{\text{TCA}}^{\text{old}}$  qui reste inchangée, un terme supplémentaire représentant l'incertitude sur la position du primaire en  $t_{\text{TCA}}^{\text{new}}$  induite par l'incertitude sur la manœuvre réalisée. Cette incertitude de réalisation de manœuvre comprend l'incertitude affectant son amplitude et à sa direction. Le calcul de la contribution (matrice de covariance additionnelle) se fait en plusieurs étapes :

- Calculer la matrice de covariance associée aux erreurs d'exécution de la manœuvre dans le repère NTW à la date de manœuvre  $t_m$ .

En définissant un repère  $\mathcal{R}_{\text{thrust}}^p$  lié à la tuyère du primaire et dont la base est  $\mathcal{B}_{\text{thrust}}^p = (e_1, e_2, e_3)$ , les manœuvres idéale et réelles sont définies comme

$$\Delta V_{\text{ideal}} = \|\Delta V_T\|e_1, \quad \Delta V_{\text{real}} = \|\Delta V_T\|\eta (e_1 \cos(\epsilon) + e_2 \sin(\epsilon) \cos(\nu) + e_3 \sin(\epsilon) \sin(\nu)), \tag{2.7}$$

où  $\eta \sim \mathcal{N}(1, \sigma_\eta)$ ,  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon)$  et  $\nu$  est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . En notant  $\Delta \tilde{V}_T = \Delta V_{\text{real}} - \Delta V_{\text{ideal}}$ , l'erreur entre la manœuvre idéale

et la manœuvre réalisée, on obtient par calcul direct, la matrice de covariance de l'erreur de réalisation de manœuvre dans le repère NTW comme :

$$\Sigma_{\text{NTW}}^{p\text{thrust}}(t_m) = P_{\text{NTW2Thrust}}^T \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2(1 - \sigma_\epsilon^2) & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \sigma_\eta^2)\frac{\sigma_\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \sigma_\eta^2)\frac{\sigma_\epsilon^2}{2} \end{bmatrix} P_{\text{NTW2Thrust}}, \quad (2.8)$$

où  $P_{\text{NTW2Thrust}}$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_{\text{NTW}}^p$  à la base  $\mathcal{B}_{\text{thrust}}^p$ .

- Transformer cette matrice dans le repère NTW de covariance à la date de manœuvre  $t_m$  en matrice de covariance à la date de manœuvre  $t_m$  sur les paramètres orbitaux képlériens  $(a_p, e_p, i_p, \Omega_p, \omega_p, M_p)$  ou sur les paramètres orbitaux adaptés  $(a_p, e_{x_p}, e_{y_p}, i_p, \Omega_p, \alpha_p)$  pour les orbites quasi-circulaires .

$$\Sigma_{\text{Kepler}}^{p\text{thrust}}(t_m) = J_k^p(t_m) \Sigma_{\text{NTW}}^{p\text{thrust}}(t_m) J_k^{p-1}(t_m), \quad (2.9)$$

où la matrice jacobienne  $J_k^p(\cdot)$  est donnée par :

$$J_k^p(\cdot) = \begin{bmatrix} \frac{2}{n_p^2 a_p} & 0 & 0 \\ \frac{2(e_p + \cos(\theta_p))}{V_p} & -\frac{r_p \sin(\theta_p)}{V_p a_p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_p \cos(\omega_p + \theta_p)}{n_p a_p^2 (1 - e_p^2)^{1/2}} \\ 0 & 0 & \frac{r_p \sin(\omega_p + \theta_p)}{n_p a_p^2 (1 - e_p^2)^{1/2} \sin(i_p)} \\ \frac{2 \sin(\theta_p)}{e_p V_p} & \frac{2e_p + \cos(\theta_p) + e_p^2 \cos(\theta_p)}{e_p V_p (1 + e_p \cos(\theta_p))} & -\frac{r_p \cos(i_p) \sin(\omega_p + \theta_p)}{n_p a_p^2 (1 - e_p^2)^{1/2} \sin(i_p)} \\ -\frac{2 \sin(\theta_p) \sqrt{1 - e_p^2}}{e_p V_p} \left(1 + \frac{e_p^2}{1 + e_p \cos(\theta_p)}\right) & -\frac{\cos(\theta_p) (1 - e_p^2)^{3/2}}{e_p V_p (1 + e_p \cos(\theta_p))} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

- Calculer la matrice de covariance sur les paramètres orbitaux à la date courante  $t$ . Cette étape n'est nécessaire que si l'on souhaite prendre en compte la variation des éléments orbitaux du primaire, due à des perturbations orbitales telles que celle du terme  $J_2$  par exemple. On écrit alors

$$\Sigma_{\text{Kepler}}^{p\text{thrust}}(t_m) = \Phi_t \Sigma_{\text{Kepler}}^{p\text{thrust}}(t_m) \Phi_t^T, \quad (2.11)$$

où la matrice  $\Phi_t$  est à déterminer à partir d'un développement au premier ordre des équations des éléments orbitaux osculateurs en la date  $t_m$ .

- Calculer la matrice de covariance des positions du primaire à une date  $t$  dans la base  $\mathcal{B}_{\text{RTN}}^p$ .

$$\Sigma_{\text{RTN}}^{p\text{thrust}}(t) = P_{\text{eci2RTN}}^T J_{c2eo}^p(t) \Sigma_{\text{Kepler}}^{p\text{thrust}}(t) J_{c2eo}^{pT}(t) P_{\text{eci2RTN}}, \quad (2.12)$$

où  $J_{c2eo}^{pT}(t)$  est la matrice jacobienne :

$$J_{c2eo}^{pT}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_p}{\partial a_p}(t) & \frac{\partial r_p}{\partial e_p}(t) & \frac{\partial r_p}{\partial i_p}(t) & \frac{\partial r_p}{\partial \Omega_p}(t) & \frac{\partial r_p}{\partial \omega_p}(t) & \frac{\partial r_p}{\partial M_p}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

qui peut être développée à partir des formules classiques de mécanique spatiale képlérienne :  $r_p(t) = a_p \left[ (\cos(E_p) - e) \vec{P} + \sqrt{1 - e_p^2} \sin(E_p) \vec{Q} \right]$  où les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  sont donnés par :

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} \cos \omega_p \cos \Omega_p - \sin \omega_p \cos i_p \sin \Omega_p \\ \cos \omega_p \sin \Omega_p + \sin \omega_p \cos i_p \cos \Omega_p \\ \sin \omega_p \sin i_p \end{bmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{bmatrix} -\sin \omega_p \cos \Omega_p - \cos \omega_p \cos i_p \sin \Omega_p \\ -\sin \omega_p \sin \Omega_p + \sin \omega_p \cos i_p \cos \Omega_p \\ \cos \omega_p \sin i_p \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

**Remarque 5.**

*Cette mise à jour de la covariance en position du primaire pourrait également être faite en suivant l'approche développée dans la note technique [75].*

- 5- **Calculer la probabilité de collision entre les deux objets à la nouvelle date de TCA  $t_{TCA}^{new}$ .**

Pour cela, il est possible d'utiliser n'importe quelle méthode qui calcule la formule  $\mathcal{P}_c^{2D}$ .

Cette méthode, avec des variantes, semble la plus utilisée effectivement parmi les acteurs mettant en œuvre des procédures d'évitement de collision. Un exemple d'application de cette stratégie portant sur une expérience réelle avec le satellite THEOS de l'agence spatiale Thaïlandaise GISTDA, est donné dans [24] avec peu de détails si ce n'est la valeur de la manœuvre tangentielle d'évitement. Il est toutefois difficile de connaître l'état de l'art exact actualisé de cette approche sachant qu'elle repose essentiellement sur une heuristique complétée par des raffinements ou approximations plus ou moins bien justifiés. Il est ainsi difficile de se prononcer de manière définitive quant à sa possible généralisation dans un cadre de rencontres multiples.

### 2.2.2 Manœuvre d'évitement pour une séparation angulaire ou approche par déphasage

L'idée fondamentale de cette stratégie consiste à transférer à l'aide d'une manœuvre tangentielle appliquée à une date à fixer, l'objet primaire sur une orbite plus lente de telle manière que la différence de période orbitale entre la nouvelle orbite elliptique primaire et l'orbite circulaire primaire initiale implique une séparation angulaire en anomalie vraie préfixée et donnée par  $\Delta\theta$ . Cette séparation angulaire doit être telle que la probabilité de collision calculée à la nouvelle date de TCA est inférieure à un seuil fixé. On note alors  $\theta_m$  l'anomalie vraie du primaire à la date de manœuvre,  $\theta_c^{old}$  l'anomalie vraie du primaire à la date de collision ( $t_{TCA}^{old}$ ) sans manœuvre,  $\theta_c^{new}$  l'anomalie vraie du primaire à la date de plus proche rencontre ( $t_{TCA}^{new}$ ) après manœuvre. On a alors  $\Delta\theta = \theta_c^{old} - \theta_c^{new}$ .

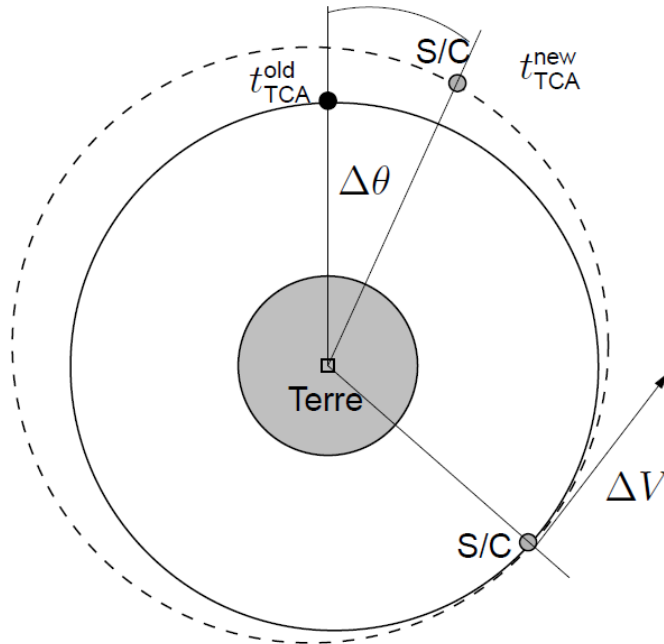


FIGURE 2.2 – Manœuvre tangentielle de séparation angulaire.



La manœuvre est calculée comme :

$$\Delta V = (\sqrt{\kappa} - 1)v_p^-, \quad (2.15)$$

où  $\kappa = \left(\frac{v_p^+}{v_p^-}\right)^2$ . Ce facteur est calculé conjointement avec  $E_p^{\text{old}}$ , l'anomalie excentrique du primaire à la date  $t_{\text{TCA}}^{\text{old}}$ , à travers une formulation adaptée de l'équation de Kepler. Il faut donc résoudre le système non linéaire d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} E_p^{\text{old}} - (\kappa - 1) \sin(E_p^{\text{old}}) &= (2 - \kappa)^{3/2} \theta_c^{\text{old}} \\ \tan\left(\frac{\theta_c^{\text{old}} - \Delta\theta}{2}\right) &= \sqrt{\frac{\kappa}{2 - \kappa}} \tan\left(\frac{E_p^{\text{old}}}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

dont les inconnues sont  $\kappa$  et  $E_p^{\text{old}}$ . Il est donc nécessaire d'avoir recours à une méthode de résolution numérique qui permette d'aborder avec suffisamment de précision et d'efficacité numérique (convergence, stabilité) la résolution d'un système d'équations non linéaires transcendantales.

Comme pour l'approche heuristique par séparation radiale, il est difficile de trouver dans la littérature des détails de résolution, d'implémentation de cette méthode ainsi que des résultats précis et bien documentés.

## 2.3 Méthodes des scenarios

### 2.3.1 Introduction

Dans la référence [96], le problème d'évitement de collision, pour un risque simple, est formulé comme un problème d'optimisation quadratique (minimisation de la norme  $L_2$  du vecteur de manœuvre, c.-à-d. comme un problème de manœuvre en consommation minimale) sous une contrainte probabiliste afin de ramener le risque de collision après manœuvre à un niveau acceptable. Deux méthodes sont alors proposées pour résoudre ce problème d'optimisation sous contrainte probabiliste considéré. Après une reformulation de la condition de non collision exprimée dans le cadre des hypothèses associée à une rencontre rapide, toutes les deux utilisent une propagation des trajectoires aléatoires du primaire à l'aide des fonctions de Lagrange. La première est alors fondée sur une approximation par linéarisation des lois de distribution en position et vitesse du primaire. Des développements de Taylor en fonction du vecteur aléatoire de position du primaire sont effectués pour calculer les effets de la manœuvre sur cette position relative à la date de rencontre, permettant ainsi de conserver la nature gaussienne des incertitudes et de calculer la probabilité de collision à l'aide de la formule classique en rencontre rapide [15]. La seconde méthode se base quant à elle sur l'approche dite des scénarios [29, 31]. Cette technique qui appartient à la famille des méthodes par échantillonnage ou méthodes de Monte Carlo offre une solution pratique et raisonnable aux problèmes d'optimisations probabilistes. De plus, sous des hypothèses de convexité de la fonction objectif et de l'espace réalisable, des garanties théoriques en probabilité sur la réalisabilité de la solution peuvent être données [31]. Ces hypothèses ne sont toutefois pas vérifiées dans le cas de l'évitement de collision. Néanmoins, nous avons privilégié cette approche qui reste un moyen pratique efficace d'obtenir une solution relativement peu coûteuse et dont la méthodologie paraît généralisable au cas des rencontres rapides multi-risque.

### 2.3.2 Formulation du problème

Le contexte est celui d'une conjonction entre deux objets spatiaux de forme sphérique dans le cadre d'un rapprochement rapide [7, 1] dont le cadre théorique et les hypothèses associées ont été rappelés à la Section 1.1. Le risque de collision, calculé comme une probabilité de collision, à partir d'une alerte et selon les méthodes développées dans les références [96], [97] et [15], est supposé être supérieur à un seuil de tolérance donné  $\varepsilon$ , d'où la nécessité d'une stratégie d'évitement. Notre but est de calculer une manœuvre propulsive impulsionnelle optimale en consommation, s'appliquant à l'objet primaire et qui réduise la probabilité de collision à un niveau acceptable.

Les données d'entrées à l'instant de référence  $t = 0$  (temps de la collision) du problème sont contenues dans le bulletin d'alerte de collision. Conformément au modèle de rencontre adopté, les positions respectives des deux objets sont des vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, notés respectivement  $\xi = (\xi_p, \xi_s)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  et caractérisés par leur moyenne et matrice de covariance :

$$\xi_p \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\xi_p}, \Sigma_{\xi_p}), \quad \xi_s \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\xi_s}, \Sigma_{\xi_s}).$$

Les vecteurs de vitesse sont des vecteurs déterministes fixés à leur valeur moyenne, notés respectivement  $\bar{v}_p^0$  et  $\bar{v}_s^0$ . Ils sont notés avec une barre pour ne pas les confondre avec les vecteurs des vitesses à  $t = 0$  lorsqu'une manœuvre a été effectuée, et qui dépendent alors des incertitudes.

Dans cette partie, une unique impulsion  $\Delta V$ , exécutée à une date  $t = \tau$  fixée à l'avance et antérieure à la rencontre ( $\tau < 0$ ) doit réaliser l'évitement de collision. Il est à noter que le choix de  $\tau$  peut être heuristique ou dicté par des contraintes opérationnelles. Il est également possible de faire varier cette date afin de comparer les solutions ainsi obtenues. De plus, une unique tuyère

orientable est utilisée pour produire cette manœuvre d'évitement. Cela signifie que la consommation de la manœuvre est exactement définie par la norme euclidienne du vecteur incrément de vitesse  $\Delta V$  [91]. Pour lever la non-différentiabilité, le critère de minimisation peut être remplacé, sans changer les solutions, par son carré  $\|\Delta V\|_2^2$ .

Dans le cadre d'un mouvement relatif rectiligne (Hypothèse 6), nous avons vu dans les références [96] et [15] que le swept volume peut être assimilé à un cylindre droit infini, appelé tube de collision. Ceci nous permet d'exprimer la condition de non-collision à l'aide d'une unique équation  $c(\Delta V, \xi) \geq 0$ , dont le calcul est détaillé ci-après. La contrainte probabiliste associée s'écrira alors sous la forme :  $\mathbb{P}\{c(\Delta V, \xi) < 0\} \leq \varepsilon$ .

Le problème d'évitement s'écrit finalement :

**Problème 2.** (*CCOP*)

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta V \in \mathbb{V}} \|\Delta V\|_2^2 \\ & \text{sous } \mathbb{P}\{c(\Delta V, \xi) < 0\} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonction quadratique convexe sous une contrainte probabiliste, appelé *chance-constrained optimization problem (CCOP)* suivant la dénomination anglo-saxonne [89], [82]. Ce domaine de l'optimisation stochastique (domaine spécifique lui-même de l'optimisation en contexte incertain) a pour origine les travaux de [34] et [79]. Dans la littérature, la formulation générique de tels problèmes est un peu différente :

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ & \text{sous } \mathbb{P}\{F(x, \xi) \leq 0\} \geq 1 - \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables de décision,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  est un vecteur aléatoire de distribution de probabilité donnée et  $\varepsilon$  est le paramètre de confiance. Toutefois, il est aisé de voir l'équivalence des deux formulations en choisissant  $x = \Delta V$ ,  $c(\Delta V, \xi) = -F(x, \xi)$  et en constatant que  $\mathbb{P}\{c(\Delta V, \xi) < 0\} = 1 - \mathbb{P}\{c(\Delta V, \xi) \geq 0\}$ . Ce type de problèmes ou de modèles constitue une classe de programmes mathématiques complexes à résoudre dans sa généralité. Les sources majeures de difficulté sont principalement liées aux propriétés structurelles de l'ensemble des décisions réalisables définies par les propriétés de la fonction  $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \mathbb{P}\{c(\Delta V, \xi) < 0\}$ . Ainsi, la non-convexité éventuelle de l'ensemble des solutions réalisables induisant une difficulté pour obtenir des résultats forts, de nombreuses contributions de la littérature se sont attachées à donner des conditions garantissant cette convexité [89, chapitre 10], [61]. La nature de la distribution de probabilité joue évidemment un grand rôle également dans le fait d'obtenir des propriétés favorables à la résolution du problème d'optimisation. En particulier, la distribution normale utilisée dans des problèmes linéaires permet d'obtenir des formulations équivalentes déterministes du problème dans de nombreux cas [35]. Enfin, il est important de signaler les liens entre optimisation stochastique et optimisation robuste [71].

**Remarque 6.**

*Pour que l'hypothèse de mouvement rectiligne reste valable quelle que soit l'impulsion, il est nécessaire de limiter l'amplitude de cette dernière. En pratique, on utilisera dans les applications des contraintes de boîtes sur les composantes de  $\Delta V$ .*

Nous examinons maintenant l'expression de la fonction de la contrainte portant sur la probabilité de collision  $c$  puisqu'il est nécessaire de l'exprimer en fonction des variables de décision et des vecteurs aléatoires afin de pouvoir analyser les caractéristiques et propriétés du problème d'optimisation stochastique à résoudre.

### Condition géométrique de collision

On définit  $(r_p^0(\Delta V, \xi_p), v_p^0(\Delta V, \xi_p))$  le vecteur position-vitesse de l'objet primaire à  $t = 0$  lorsqu'une manœuvre  $\Delta V$  a été réalisée à l'instant  $t = \tau$ . Le swept volume (espace défini dans l'espace des conditions initiales), est un cylindre infini de révolution, d'axe orienté selon la vitesse relative et de rayon  $R$  égal à celui de la sphère combinée (voir Figure 2.3).

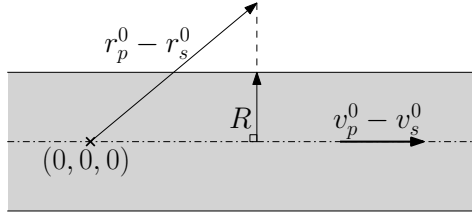


FIGURE 2.3 – Le swept volume comme un tube de collision.

La contrainte s'exprime alors à l'aide d'une unique inégalité, fonction des grandeurs  $r_p^0(\Delta V, \xi_p)$ ,  $v_p^0(\Delta V, \xi_p)$ ,  $\xi_s$  et  $\bar{v}_s^0$ . Elle traduit le fait que la norme de la projection de la position relative sur le plan orthogonal à la vitesse relative doit être inférieure au rayon combiné des objets  $R$ . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\sqrt{\|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|^2 - \left( (r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^T \cdot \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|} \right)^2} < R. \quad (2.19)$$

Cela est équivalent à la condition  $c(\Delta V, \xi) < 0$ , en posant :

$$c(\Delta V, \xi) = \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|^2 - \left( (r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^T \cdot \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|} \right)^2 - R^2 < 0. \quad (2.20)$$

Il reste enfin à calculer l'état propagé  $(r_p^0(\Delta V, \xi_p), v_p^0(\Delta V, \xi_p))$  lorsque une manœuvre a eu lieu. Observons que l'expression précédente est indépendante du modèle de propagation d'orbite.

### Propagation des trajectoires

À l'instar de ce qui a été fait dans de nombreuses références [87], [23], l'effet de la manœuvre  $\Delta V$  sur la position relative du primaire est calculé avec un mouvement képlérien et sans prendre en compte les perturbations orbitales. Ainsi, on peut propager l'état de l'objet primaire à l'aide des coefficients  $f$  et  $g$  de Lagrange (voir Annexe B pour les détails sur ces fonctions). Le principe est le suivant : étant donné l'état initial  $(\xi_p, \bar{v}_p^0)$ ,

- Rétro-propagation dans le passé pour obtenir les vecteurs de position et vitesse  $(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p))$  de l'objet primaire à  $t = \tau$  avant la manœuvre :

$$r_p^\tau(\xi_p) = f(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \xi_p + g(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \bar{v}_p^0, \quad (2.21)$$

$$v_p^\tau(\xi_p) = \dot{f}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \xi_p + \dot{g}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \bar{v}_p^0. \quad (2.22)$$

1. Mise en œuvre de la manœuvre avec l'incrément de vitesse  $\Delta V$ .

2. Propagation dans le futur jusqu'à la date de référence  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} r_p^0(\Delta V, \xi_p) &= f(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) r_p^\tau(\xi_p) \\ &\quad + g(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) (v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} v_p^0(\Delta V, \xi_p) &= \dot{f}(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) r_p^\tau(\xi_p) \\ &\quad + \dot{g}(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) (v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V). \end{aligned} \quad (2.24)$$

**Remarque 7.**

*Nous aurions pu utiliser la notation  $v_p^{\tau-}$  pour la vitesse du primaire avant application de la manœuvre impulsionnelle et  $v_p^{\tau+} = v_p^{\tau-} + \Delta V$  pour la vitesse du primaire après la manœuvre mais nous n'avons pas souhaité alourdir les notations.*

En injectant ces équations dans l'Equation (2.20), on obtient ainsi une expression analytique pour  $c$  ne dépendant que du vecteur de manœuvre et des incertitudes de position. Néanmoins, malgré le caractère quadratique et convexe de la fonction coût, le Problème 2 reste difficile à résoudre du fait de la nature probabiliste de la contrainte qui ne possède pas les propriétés structurelles évoquées précédemment pour obtenir des contre-parties déterministes ou des simplifications de la formulation. En effet, même pour un  $\xi$  donné, la contrainte inégalité  $c(\cdot, \xi) \geq 0$  ne définit pas un domaine convexe.

### 2.3.3 Résolution à l'aide de l'approche par scénarios

La méthode proposée cherche à approcher la solution optimale du problème d'optimisation sous contrainte probabiliste par échantillonnage de la contrainte probabiliste. Cette approche appelée *approche par scénarios* est une méthode pratique de résolution des problèmes d'optimisation stochastique qui a été développée dans le cadre de la théorie de la commande robuste et de l'optimisation robuste pour ensuite être généralisée pour d'autres problèmes dans une série d'articles dont les plus importants sont les références [29], [30], [31], [32]. Nous rappelons quelques éléments essentiels de cette approche.

### 2.3.4 Principe de l'approche par scénarios

Le but est de construire la meilleure solution (une solution approchant au mieux la solution globalement optimale du problème d'optimisation posé) dont on pourra garantir la réalisabilité avec une probabilité fixée. Pour cela une contre-partie échantillonnée, appelée ici problème de scénarios (approximation fondée sur un échantillonnage de la contrainte probabiliste) du Problème 2 est construite et les caractéristiques de sa solution optimale vis-à-vis du problème CCOP initial sont ensuite exploitées [29].

#### Le problème de scénarios

La construction du problème de scénarios se fait par un tirage aléatoire de  $N$  échantillons  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$  suivant la densité de probabilité définie pour le vecteur aléatoire  $\xi$ . Dans le cas, de l'évitement de collision, ce tirage peut s'effectuer dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  ou dans une boîte réaliste position-vitesse et représentant différentes positions pour les objets primaire et secondaire à  $t = 0$ . Le problème par scénarios associé au Problème 2 s'écrit alors :

**Problème 3.** ( $SOP_N$ )

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V \in \mathbb{U}} \quad & \|\Delta V\|_2^2 \\ \text{sous} \quad & c(\Delta V, \xi^{(j)}) \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.25)$$

La fonction coût apparaissant dans le Problème 3 est donc inchangée par rapport au problème d'origine (CCOP) alors que la contrainte probabiliste a été remplacée par un ensemble discret fini de conditions déterministes définies pour chaque échantillon  $\xi^{(j)}$  de la variable aléatoire  $\xi$ . Le problème (SOP<sub>N</sub>) est donc plus simple à résoudre. En général, des solutions optimales, au moins locales, du problème de scénarios (SOP<sub>N</sub>) peuvent être obtenues à l'aide d'outils classiques d'optimisation non linéaire déterministe; cela est d'autant plus vrai si le problème initial (CCOP) possède de bonnes propriétés comme la linéarité ou la convexité [29], [30], [31], [32]. Cela n'est malheureusement pas le cas du problème d'évitement de collision. Toutefois, même dans ce cas, la résolution du Problème (SOP<sub>N</sub>) sera facilitée si le gradient de  $c$  par rapport aux variables d'optimisation peut être calculé analytiquement.

La question naturelle qui suit la définition du Problème (SOP<sub>N</sub>) est de savoir ce qu'il est possible de dire de la réalisabilité de sa solution optimale  $x_{(SOP_N)}^*$  pour le problème initial (CCOP) en supposant que celle-ci est accessible.

### Caractéristiques de la solution du problème de scénarios

L'ensemble réalisable du Problème (SOP<sub>N</sub>) est une approximation extérieure de l'ensemble réalisable du Problème (CCOP). Il est facile d'en déduire que  $x_{(SOP_N)}^* \leq x_{(CCOP)}^*$ . Toutefois, il n'est pas garanti que la solution optimale  $x_{(SOP_N)}^*$  soit réalisable pour le Problème (CCOP) ni que l'optimisme de sa qualité (en termes d'optimalité) ne soit pas très important. Sous des hypothèses relativement fortes (convexité de l'ensemble réalisable  $\mathbb{V}$  et des ensembles paramétrés  $\mathbb{V}_\xi = \{\Delta V : f(\Delta V, \xi) \geq 0\}$ ), on peut trouver des résultats dans la littérature liant quantitativement la solution optimale de l'approximation échantillonnée au Problème (CCOP) en termes de réalisabilité en probabilité et comprenant des indications sur le nombre des échantillons à tirer en fonction de la taille du vecteur des variables de décision et du niveau de confiance choisi [29], [30], [31], [32].

Dans le cas où les ensembles  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{V}_\xi$  ne sont pas convexes pour certains  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , il n'y a plus de garantie probabiliste théorique que la solution du problème de scénarios soit réalisable pour le Problème (CCOP) initial. De plus, en général, la solution obtenue n'est qu'un optimum local du problème de scénarios. Dans le cas présent d'évitement de collision pour des trajectoires relatives rectilinéaires, il s'avère que la propriété de convexité n'est pas vérifiée. En conséquence, même pour des grandes valeurs de  $N$ , il n'y aura pas de garantie sur la réalisabilité de la solution par scénarios pour le problème probabiliste initial (CCOP). Ainsi, la validité d'une solution doit être systématiquement vérifiée *a posteriori* et son optimalité ne peut être évaluée que par comparaison avec d'autres méthodes disponibles.

#### 2.3.5 Un algorithme par scénarios pour le problème d'évitement de collision

Nous rappelons l'algorithme proposé dans la référence [96], basé sur une résolution itérative de problèmes à scénarios, pour obtenir une solution sous-optimale au Problème 2. Il s'agit d'une heuristique sans garantie de convergence, mais qui en pratique donne de bons résultats.

---

Recherche itérative de résolution de problèmes de scénarios.

Commencer avec  $k = 0$  et  $\Delta V^* = 0$ .

1. Incrémenter  $k$  et générer aléatoirement  $n$  scénarios.
  2. Résoudre le problème de scénarios correspondant.
    - (a) S'il n'y a pas de solution, retourner à l'étape 1.
    - (b) Sinon, soit  $\Delta V^k$  la solution obtenue. Aller à l'étape 3.
  3. Comparer le coût  $\|\Delta V^k\|_2$  à la valeur stockée  $\|\Delta V^*\|_2$ .
    - (a) Si  $\|\Delta V^k\|_2 < \|\Delta V^*\|_2$ , aller à l'étape 4.
    - (b) Sinon, retourner à l'étape 1.
  4. Vérifier l'admissibilité de  $\Delta V^k$  pour le problème probabiliste d'origine via une méthode de Monte Carlo.
    - (a) Si  $\mathcal{P}\{c(\Delta V^k, \Xi) < 0\} \leq \varepsilon$ , faire  $\Delta V^* = \Delta V^k$  et retourner à l'étape 1.
    - (b) Sinon, retourner à l'étape 1.
- 

La boucle s'arrête lorsque le nombre maximum d'itérations  $\bar{k}$  est atteint. A noter que le choix de la valeur de  $N$  est laissé à l'utilisateur. Dans l'étude numérique 2.3.7, ces paramètres ont été fixés empiriquement à  $\bar{k} = 100$  et  $N = 1000$ .

### 2.3.6 Calcul du gradient de la fonction contrainte

Le Problème 3 peut être résolu à l'aide d'outils d'optimisation non linéaires dédiés. Pour les utiliser, il est nécessaire de calculer les fonctions contraintes  $c^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) et, si possible, leur gradient  $\nabla c_j(\cdot) = \partial_1 c(\cdot, \xi^{(j)})$ . Dans le modèle considéré, le gradient de  $c$  par rapport à  $\Delta V$  peut être calculé analytiquement, permettant ainsi une résolution plus efficace. Le but de cette sous-section est d'obtenir une expression de  $\partial_1 c$ .

On commence par introduire les matrices jacobiniennes  $\partial_1 r_p^0$  et  $\partial_1 v_p^0$  des vecteurs position et vitesse de l'objet primaire  $r_p^0$  et  $v_p^0$  par rapport à l'impulsion  $\Delta V$ . Ces matrices peuvent être obtenues directement grâce aux Equations (2.23) et (2.24) :

$$\partial_1 r_p^0(\Delta V, \xi_p) = \partial_2 f(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) r_p^\tau + \partial_2 g(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) v_p^\tau + g(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) I, \quad (2.26)$$

$$\partial_1 v_p^0(\Delta V, \xi_p) = \partial_2 \dot{f}(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) r_p^\tau + \partial_2 \dot{g}(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) v_p^\tau + \dot{g}(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) I \quad (2.27)$$

Les dérivées partielles de  $f$  et  $g$  peuvent être obtenues à partir de leurs expressions analytiques. Définissons maintenant :

$$u^0(\Delta V, \xi_p) = \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|_2}, \quad (2.28)$$

et réécrivons la contrainte  $c$  :

$$c(\Delta V, \xi) = c_1(\Delta V, \xi) - c_2(\Delta V, \xi)^2,$$

où les applications  $c_1, c_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} c_1(\Delta V, \xi) &= \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|_2^2 - R^2, \\ c_2(\Delta V, \xi) &= (r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^T u^0(\Delta V, \xi_p). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\partial_1 c(\Delta V, \xi) = \partial_1 c_1(\Delta V, \xi) - 2c_2(\Delta V, \xi) \partial_1 c_2(\Delta V, \xi).$$

La fonction  $c_1$  peut être vue comme une fonction composée, à savoir :

$$c_1 : (\Delta V, \xi) \mapsto r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s \mapsto \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|_2^2,$$

dont le gradient par rapport à  $\Delta V$  est :

$$\partial_1 c_1(\Delta V, \xi) = 2\partial_1 r_p^0(\Delta V)(r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s).$$

Passons maintenant au calcul de  $\partial_1 c_2(\Delta V, \xi)$ . Dans la suite, la dépendance en  $\Delta V$  est omise pour ne pas trop alourdir les équations. La première étape consiste à calculer le gradient de  $c_2$  en fonction de la Jacobienne de  $u^0$ . Un calcul direct donne :

$$\partial_1 c_2 = \partial_1 r_p^{0T} u^0 + \partial_1 u^{0T} (r_p^0 - \xi_s).$$

La deuxième étape est le calcul de  $\partial_1 u^0$  et se révèle plus technique. La fonction  $u^0$  peut également être vue comme une composée de fonctions :

$$\begin{aligned} u^0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 && \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3 \\ (\Delta V, \xi_p) &\mapsto v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0 && \mapsto \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|_2} \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $\psi : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$ , il vient :

$$J_\psi(x) = \frac{1}{\|x\|_2} \left( I_3 - \frac{xx^T}{\|x\|_2^2} \right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_1 u^0 &= J_\psi(v_p^0 - \bar{v}_s^0) \partial_1 v_p^0, \\ &= \left( I_3 - \frac{(v_p^0 - \bar{v}_s^0)(v_p^0 - \bar{v}_s^0)^T}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2^2} \right) \frac{\partial_1 v_p^0}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2}, \\ &= \frac{1}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2} (I_3 - u^0 u^{0T}) \partial_1 v_p^0. \end{aligned}$$

Le gradient de  $c_2$  est donné par :

$$\partial_1 c_2 = \partial_1 r_p^{0T} u^0 + \frac{\partial_1 v_p^{0T}}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2} (I_3 - u^0 u^{0T})^T (r_p^0 - \xi_s).$$

Finalement, le gradient de  $c$  vaut :

$$\partial_1 c = 2 \left( \partial_1 r_p^0 - \frac{(r_p^0 - \xi_s)^T u^0}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2} \partial_1 v_p^0 \right)^T (I_3 - u^0 u^{0T}) (r_p^0 - \xi_s). \quad (2.29)$$



### 2.3.7 Quelques résultats numériques

Nous reprenons ici les résultats numériques présentés dans la thèse [96]. Une étude numérique complémentaire mais relativement succincte a également été faite dans la référence [28].

Dans tous les exemples proposés, la date de poussée  $\tau$  est fixée à une demi-période d'orbite avant le temps de référence. La période de l'objet primaire est calculée à partir de l'orbite moyenne. On peut justifier ce choix d'une durée relativement courte par deux raisons. Premièrement, il permet de valider l'hypothèse de mouvement képlérien entre la manœuvre et la rencontre. Deuxièmement, il laisse néanmoins le temps de réévaluer le risque de collision plusieurs fois à la suite de nouvelles alertes, pour éventuellement reconsidérer le besoin d'un changement de trajectoire. Enfin,, le seuil du risque de collision est fixé à  $\varepsilon = 10^{-4}$  pour les deux exemples.

Les solutions sont exprimées dans le repère orbital local NTW de Frenet (cf. Annexe A.3.2). Il est rattaché à l'état de l'objet primaire rétropropagé jusqu'à  $t = \tau$  à partir de  $(\mu_{\xi_p}, \bar{v}_p^0)$ .

À des fins comparatives, une deuxième méthode de résolution par dichotomie sur le module de la manœuvre purement tangentielle (semblable à l'heuristique de la référence [93]) a été implémentée. La recherche d'optimalité est faite par dichotomie, dans la direction  $T$ . L'algorithme s'arrête dès que le risque est dans l'intervalle  $[0.99\varepsilon, \varepsilon]$ . Le choix de la direction se justifie par le fait que, pour une orbite circulaire, une manœuvre tangentielle maximise l'éloignement radial une demi-orbite plus loin et donc, intuitivement, augmente significativement la distance de plus proche passage [93]. La probabilité de collision  $y$  est calculée selon une méthode de Monte Carlo.

Pour chaque solution  $\Delta V^*$  produite par l'algorithme des scénarios, un histogramme comptabilisant les distances (normalisées) de plus proche passage  $\sqrt{\frac{c(\Delta V^*, \hat{\xi}^{(i)})}{R^2} + 1}$ , est présenté sur une échelle logarithmique en abscisse, pour un tirage aléatoire de  $10^4$  occurrences  $\hat{\xi}^{(i)}$  en ordonnée. Ainsi, les collisions correspondent aux valeurs négatives en abscisse alors que les bâtonnets bleus correspondent aux cas non contrôlés et les rouges à ceux pour lesquels la manœuvre est effectuée. Cela permet de visualiser l'effet de cette dernière sur les trajectoires relatives.

### 2.3.8 Exemple 1

Ce cas test est une alerte réelle, donnée sous la forme d'un Conjunction Summary Message (CSM), envoyé par le Joint Space Operation Center à EADS Astrium (maintenant Airbus Defence and Space). Elle concerne un satellite sur une orbite circulaire à basse altitude. Du fait de la nature des données contenues dans l'alerte, l'instant de référence est le temps de plus proche passage sans manœuvre. La probabilité de collision s'élève à  $1.9 \times 10^{-3}$ .

Les différentes solutions sont données dans le Tableau 2.1. Il est notable que les deux résultats, issus d'approches dissemblables, tendent à indiquer la même direction optimale, confirmant ainsi l'heuristique de la référence [93].

On remarque que le risque associé à la solution par scénarios n'est pas tout à fait saturé, laissant ainsi une petite marge d'amélioration possible. On voit, sur la Figure 2.4, comment la distribution des distances de plus proche passage est éloignée de la zone de collision par la manœuvre (décalage vers la droite).

Méthode	$\Delta V_N$ (mm/s)	$\Delta V_T$ (mm/s)	$\Delta V_W$ (mm/s)	$\ \Delta V\ _2$ (mm/s)	Risque (-)
Scénarios	1.768	-22.363	0.000	22.433	$9.7 \times 10^{-5}$
Dichotomie	0	-22.344	0	22.344	$1.0 \times 10^{-4}$

TABLE 2.1 – Solutions pour l'Exemple 1.

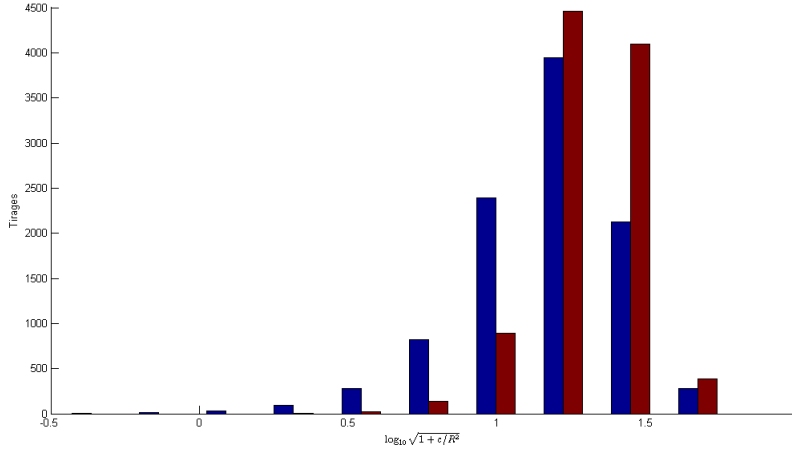


FIGURE 2.4 – Histogramme des distances de plus proche passage sans manœuvre (bleu) et avec la solution par scénarios (rouge) pour l'exemple 1.

### 2.3.9 Exemple 2

Cette rencontre concerne un objet primaire sur une orbite fortement elliptique. Les données sont obtenues en modifiant un exemple de la littérature (cas 9 dans la référence [5]). Plus précisément, le signe d'une des composantes de la vitesse moyenne de l'objet secondaire a été changé, afin que le mouvement relatif soit approximativement une droite. Il est à noter que bien que l'auteur fournisse des valeurs pour les incertitudes concernant les vitesses au temps de référence, celles-ci apparaissent comme pouvant être négligées et seront donc ignorées (cf. l'analyse de ce cas dans le rapport [15]). Les valeurs moyennes sont fournies dans le Tableau 2.2 et les matrices de covariance pour les positions dans les Equations (2.30) (objet primaire) et (2.31) (secondaire) :

$$\begin{pmatrix} 67.01430 & 14.5722 & 31.3632 \\ * & 3.2133 & 6.8234 \\ * & * & 14.7289 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\begin{pmatrix} 67.0146 & 14.5721 & 31.3630 \\ * & 3.2133 & 6.8234 \\ * & * & 14.7288 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Objet	Primaire	Secondaire
Position (km)	[−5532.700 20132.674 40010.549]	[−5532.694 20132.677 40010.554]
Vitesse (km/s)	[−1.450945 − 0.311609 − 0.671302]	[−1.450947 − 0.311608 0.671301]

TABLE 2.2 – État moyen des objets au temps de référence.

La probabilité de collision, sans manœuvre, s'élève à  $3.24 \times 10^{-1}$ . On constate que la solution obtenue par dichotomie est 16.7% plus coûteuse que celle obtenue avec l'algorithme des scénarios. Cela s'explique par le fait que, pour une orbite non circulaire, la manœuvre tangentielle n'est pas nécessairement optimale en consommation. Ceci illustre l'efficacité de l'approche par scénarios qui permet de trouver des solutions peu coûteuses dans des cas où il est difficile de le faire de manière

heuristique. La Figure 2.5 retranscrit visuellement l’effet bénéfique de l’impulsion sur l’éloignement des objets.

Méthode	$\Delta V_N$ (mm/s)	$\Delta V_T$ (mm/s)	$\Delta V_W$ (mm/s)	$\ \Delta V\ _2$ (mm/s)	Risque (-)
Scénarios	0.0094	-0.2430	0.1469	0.2841	$8.04 \times 10^{-5}$
Dichotomie	0	-0.3315	0	0.3315	$1.00 \times 10^{-4}$

TABLE 2.3 – Solutions pour l’exemple 2.

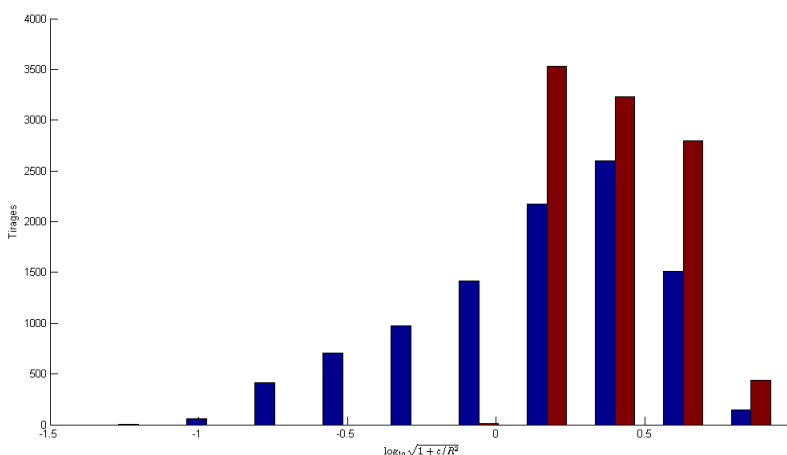


FIGURE 2.5 – Histogramme des distances de plus proche passage sans manœuvre (bleu) et avec la solution par scénarios (rouge) pour l’exemple 2.

### 2.3.10 Conclusion

Cette partie traite du problème de l’évitement de collision lorsque les vitesses sont telles que le mouvement relatif peut être considéré comme rectiligne. Cette hypothèse permet d’exprimer à l’aide d’une unique équation la condition de non-collision en fonction des variables d’optimisation et des paramètres incertains. De plus, les effets de la manœuvre sont calculés sous l’hypothèse que l’évolution dynamique du primaire est képlérienne. Cela permet d’utiliser des formules analytiques pour l’expression de la contrainte de non collision et de son gradient. La méthode utilisée se base sur l’approche par scénarios, une technique aléatoire pouvant produire des solutions admissibles pour des problèmes d’optimisation sous contraintes probabilistes. L’avantage est qu’un problème de scénarios possède une structure déterministe et que sa résolution par des outils classiques d’optimisation peut tirer profit des informations de type gradient du système. L’itération proposée dans l’algorithme des scénarios multiplie les possibilités de trouver des solutions admissibles, augmentant ainsi les chances de s’approcher d’un optimum global plutôt que d’un minimum seulement local.

Il est notable que l’approche par scénarios ne nécessite aucune hypothèse sur la nature des incertitudes, l’important étant de pouvoir effectuer des tirages des variables aléatoires : il n’est donc pas nécessaire de considérer des modélisations gaussiennes des paramètres incertains ou bien de négliger les incertitudes initiales portant sur les vitesses. Enfin, bien que le rapport se concentre sur des objets modélisés par des sphères, la méthode par scénarios développée dans cette partie peut être étendue à d’autres formes géométriques de l’ensemble de collision, comme des polytopes. En

effet, l'essentiel est de pouvoir exprimer analytiquement avec un nombre fini d'équations la condition de collision en fonction des variables d'optimisation et des paramètres incertains.

## 2.4 Méthode de l'outil OCCAM

### 2.4.1 Introduction

Le principe général de la méthode proposée dans la référence [23], qui s'appuie elle-même, entre autres, sur les références [22], [21], [62] consiste à exprimer les coordonnées relatives de l'objet primaire dans un repère du plan de rencontre comme une fonction linéaire du vecteur de manœuvre pour ainsi formuler divers problèmes d'optimisation définis suivant l'objectif visé (maximisation de la miss distance, minimisation de la probabilité de collision) et le cas considéré (rencontre directe ou rencontre indirecte). Ce principe est mentionné comme étant issu des travaux relatifs aux stratégies optimales pour la déflexion d'astéroïdes [38], [65], [77] mais il est également possible de trouver une telle approche dans le contexte de l'évitement de collision avec la référence [100]. C'est ce principe qui a permis de construire l'outil OCCAM mis en avant par l'Université Technique de Madrid. Le cadre d'étude est celui d'une conjonction à court terme (rapide ou linéaire) entre deux objets  $p$  et  $s$  où  $p$  est le primaire (engin effectuant la ou les manœuvres) et  $s$  est le secondaire, supposé passif.

La distinction entre rencontre directe et indirecte est faite en fonction de la valeur de la miss distance : si la miss distance est nulle alors les trajectoires moyennes des deux engins se croisent et les auteurs parlent alors de rencontre directe. Dans les cas où la miss distance est non nulle, les rencontres sont définies comme indirectes et constituent la plupart des rencontres réalistes.

Nous étudions dans un premier temps, la cinématique et la dynamique de la rencontre directe permettant d'exprimer la position relative du primaire à la date de la collision (après application de l'impulsion à la date  $\theta_p^m$ ) donnée dans la base du plan de rencontre comme une fonction linéaire du vecteur impulsion donné dans la base radial-transverse-normal. Nous avons adopté pour la prochaine sous-section seule des notations un peu lourdes où les vecteurs sont distingués d'une flèche et la base dans laquelle ce vecteur s'exprime est indiquée explicitement, du fait des nombreux changements de base implicitement utilisés dans [23] dont la rédaction n'est pas toujours d'une grande clarté ni d'une grande rigueur.

### 2.4.2 Analyse cinématique et dynamique de la manœuvre d'évitement de collision

La définition du plan de rencontre, appelé également B-plane présente des différences avec la définition générique présentée à la Figure 1.3 comme indiquée dans la définition suivante :

**Définition 7** (Repère et plan de rencontre au temps  $t$ ).

*A une date  $t = t_{TCA}$ , on définit le repère local de rencontre  $\tilde{\mathcal{R}}_B$  de la manière suivante :*

- *Origine : position moyenne du centre de gravité de l'objet secondaire ;*
- *Axe  $\vec{u}_{y_B} = \frac{-\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|}$  : orienté selon l'opposé de la vitesse relative  $\vec{v}_r(t) = \vec{v}_s(t) - \vec{v}_p(t)$*

*Les deux autres axes sont perpendiculaires à la vitesse relative. Le plan  $\Pi_B$  contenant l'origine et qui est engendré par ces axes est appelé plan de rencontre.*

- *Axe  $\vec{u}_{x_B} = \frac{\vec{v}_s \times \vec{v}_p}{\|\vec{v}_s \times \vec{v}_p\|}$  ;*
- *Axe  $\vec{u}_{z_B} = \vec{u}_{x_B} \times \vec{u}_{y_B}$ .*

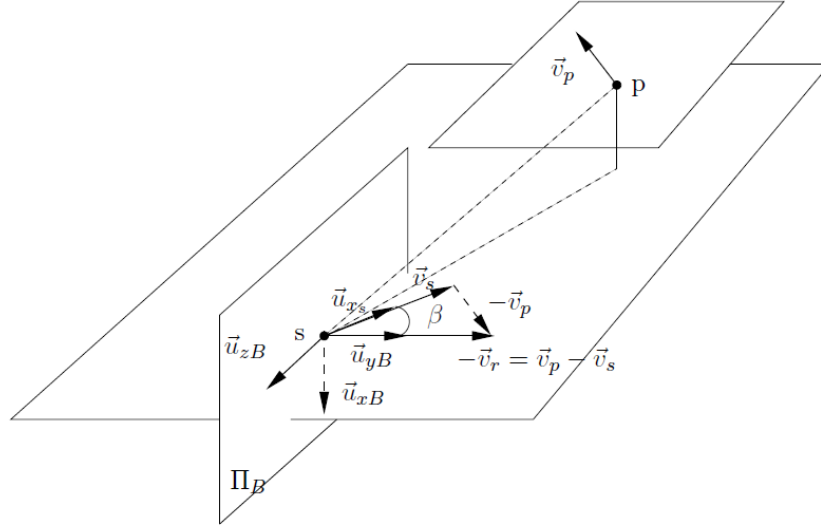


FIGURE 2.6 – Repère  $\tilde{\mathcal{R}}_B$  et plan de rencontre  $\Pi_B$ .

Nous aurons besoin dans la suite d'un certain nombre d'éléments caractérisant l'orbite du primaire à la date de la manœuvre et à la date de la collision avec ou sans manœuvre. Les anomalies vraies du primaire à la date de la manœuvre et à la date de la collision seront notées respectivement  $\theta_p^c$  et  $\theta_p^m$ . L'excentricité de l'orbite de l'objet primaire sera notée  $e_p$ .

La méthode proposée se place dans le cadre strict des rencontres rapides et reprend donc le jeu complet des Hypothèses 1, 2, 3, 4, 5 et 6, tel qu'il est rappelé dans l'introduction de ce document et détaillé dans la référence [15]. Il est à noter que l'hypothèse portant sur la normalité de la loi de distribution relative initiale est implicitement étendue afin de considérer une densité de la position relative gaussienne à la TCA en supposant que ses caractéristiques statistiques (moyenne et covariance) sont connues.

Il s'agit d'exprimer le vecteur des positions relatives dans la base  $\mathcal{B}_B = (\vec{u}_{xB}, \vec{u}_{yB}, \vec{u}_{zB})$  du B-plane après la manœuvre du primaire ayant eu lieu à l'anomalie vraie  $\theta_p^m$  en fonction du vecteur de manœuvre impulsionnelle  $\Delta\vec{v}(\theta_p^m)$  exprimé dans la base locale  $\mathcal{B}_{RTN}^p$  du primaire.

- **Expression de  $\vec{v}_s(\theta_p^c)$  dans la base périfocale du primaire  $(\vec{u}_P^p, \vec{u}_Q^p, \vec{u}_W^p)$ .**

On suppose que le vecteur vitesse du primaire a pour coordonnées dans la base périfocale attachée au primaire  $\mathcal{B}_{PQW}^p = (\vec{u}_P^p, \vec{u}_Q^p, \vec{u}_W^p)$  :

$$\vec{v}_p^{\mathcal{B}_{PQW}^p}(\theta_p^c) = \begin{bmatrix} v_p^1 \\ v_p^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Dans un premier temps, il est nécessaire d'exprimer le vecteur  $\vec{v}_s(\theta_p^c)$  dans la base  $(\vec{v}_p(\theta_p^c) \times \vec{u}_W^p, \vec{v}_p(\theta_p^c), \vec{u}_W^p)$ . Pour cela, nous définissons les angles  $\phi$  et  $\psi$ .  $\psi$  est l'angle de projection du vecteur  $\vec{v}_s(\theta_p^c)$  dans le plan orbital du primaire et  $\phi$  est l'angle entre  $\vec{v}_p(\theta_p^c)$  et cette projection de  $\vec{v}_s(\theta_p^c)$  dans le plan orbital du primaire (cf. Figure 2.7).

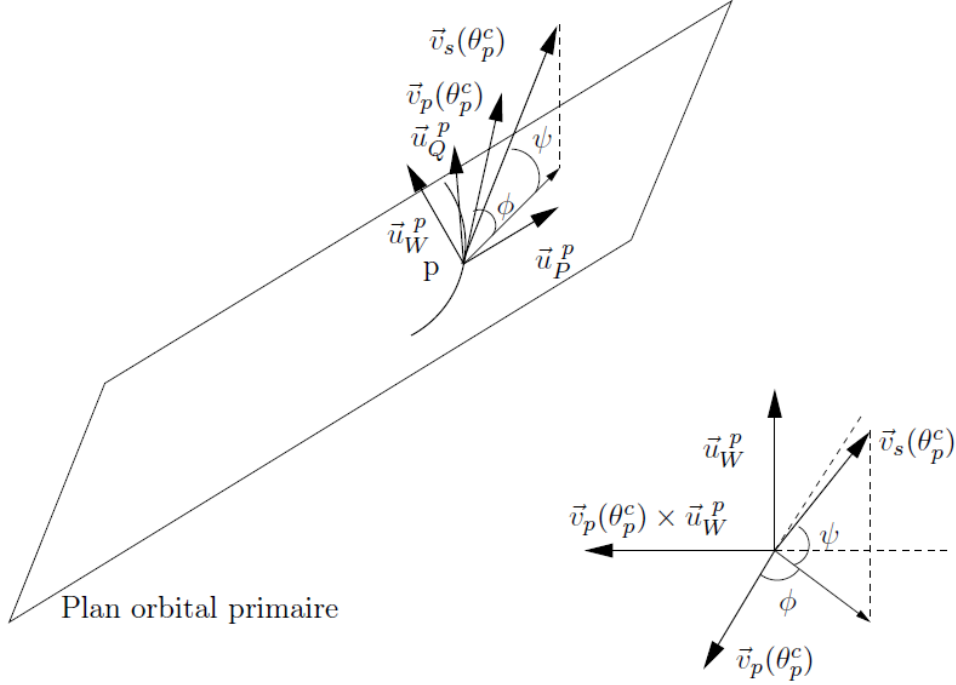


FIGURE 2.7 – Angles  $\phi$  et  $\psi$  et base péfocale primaire  $\mathcal{B}_{PQW}^p$  ramenée au primaire.

On obtient ainsi l'expression :

$$\vec{v}_s(\theta_p^c) = \frac{\|\vec{v}_s(\theta_p^c)\|}{\|\vec{v}_p(\theta_p^c)\|} \left[ \cos \phi \cos \psi \vec{v}_p(\theta_p^c) - \sin \phi \cos \psi (\vec{v}_p(\theta_p^c) \times \vec{u}_W^p) + \|\vec{v}_p(\theta_p^c)\| \sin \psi \vec{u}_W^p \right]. \quad (2.33)$$

A partir de la Formule (2.33) et de (2.32), on obtient :

$$\vec{v}_s(\theta_p^c)^{\mathcal{B}_{PQW}^p} = \frac{\|\vec{v}_s(\theta_p^c)\|}{\|\vec{v}_p(\theta_p^c)\|} \begin{bmatrix} (v_p^1 \cos \phi - v_p^2 \sin \phi) \cos \psi \\ (v_p^1 \sin \phi + v_p^2 \cos \phi) \cos \psi \\ \|\vec{v}_p\| \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

- **Expression du vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_B}(\theta_p^c)$  en fonction du vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_s}(\theta_p^c)$ .**

Un nouveau repère (qualifié d'inertiel de manière surprenante dans [21]) est construit avec son origine sur le secondaire au moment de l'impact et la base  $\mathcal{B}_s = (\vec{u}_{x_s}, \vec{u}_{y_s}, \vec{u}_{z_s}) = \left( \frac{\vec{v}_p(\theta_p^c)}{\|\vec{v}_p(\theta_p^c)\|}, \vec{u}_{x_z} \times \vec{u}_{x_s}, \frac{\vec{v}_p(\theta_p^c) \times \vec{v}_s(\theta_s^c)}{\|\vec{v}_p(\theta_p^c)\| \times \|\vec{v}_s(\theta_s^c)\|} \right)$ . De plus, une hypothèse additionnelle est incorporée à l'ensemble des hypothèses déjà faites et réalisées dans le cadre des rencontres rapides.

**Hypothèse 8.**

*La manœuvre impulsionnelle effectuée à l'anomalie  $\theta_p^m$  sur l'objet primaire ne modifie pas la vitesse qu'aurait eue cet objet sans manœuvre au moment de l'impact à l'anomalie  $\theta_p^c$ .*

**Remarque 8.**

*Cette hypothèse paraît assez contre-intuitive du fait que l'action d'une manœuvre impulsionnelle est précisément de modifier instantanément la vitesse de l'objet auquel s'applique la*

manœuvre. La justification proposée par l'auteur de [21] est de supposer que ce saut de vitesse sera de l'ordre de 1 m/s, considéré comme négligeable devant la vitesse orbitale de l'objet.

Du fait de l'Hypothèse 8, on peut supposer que les vitesses du primaire et du secondaire sont toutes constantes lors de la rencontre et nous supprimons la dépendance temporelle (à travers l'anomalie vraie) dans la suite de cette partie afin d'alléger les notations. La matrice de rotation de la base  $\mathcal{B}_s$  vers la base  $\mathcal{B}_B$  est alors donnée par :

$$R_{s2B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & -\cos \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

où l'angle  $0 < \beta \leq \pi$  est l'angle du vecteur  $\vec{v}_p - \vec{v}_s$  vers le vecteur  $\vec{v}_p$  et qui peut être caractérisé par les relations (cf. la Figure 2.8 pour une illustration de l'angle  $\beta$  et des bases  $\mathcal{B}_s$  et  $\mathcal{B}_B$ ) :

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{(\vec{v}_p - \vec{v}_s) \cdot \vec{v}_p}{\|\vec{v}_p - \vec{v}_s\| \|\vec{v}_p\|}, \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si l'on note le vecteur position du primaire par rapport au secondaire dans le plan de rencontre et ses coordonnées dans les différentes bases par :

$$\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_s}(\theta_p^c) = \begin{bmatrix} \delta r_{p_s}^1 \\ \delta r_{p_s}^2 \\ \delta r_{p_s}^3 \end{bmatrix}, \quad \delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_B}(\theta_p^c) = \begin{bmatrix} \delta r_{p_B}^1 \\ \delta r_{p_B}^2 \\ \delta r_{p_B}^3 \end{bmatrix},$$

on obtient la relation :

$$\begin{bmatrix} \delta r_{p_B}^1 \\ \delta r_{p_B}^2 \\ \delta r_{p_B}^3 \end{bmatrix} = R_{s2B} \begin{bmatrix} \delta r_{p_s}^1 \\ \delta r_{p_s}^2 \\ \delta r_{p_s}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & -\cos \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_{p_s}^1 \\ \delta r_{p_s}^2 \\ \delta r_{p_s}^3 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$



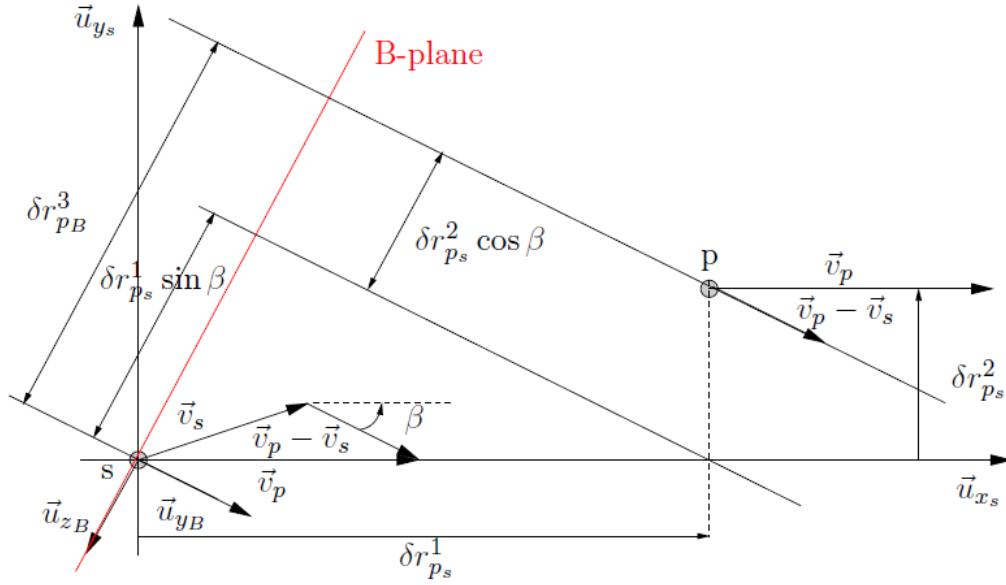


FIGURE 2.8 – Angle  $\beta$  et bases  $\mathcal{B}_B$  et  $\mathcal{B}_s$ .

Il est à noter que

$$\cos \beta = \frac{1 - \chi \cos \phi \cos \psi}{\sqrt{1 - 2\chi \cos \psi \cos \phi + \chi^2}}, \quad (2.38)$$

en posant  $\chi = \frac{\|\vec{v}_s\|}{\|\vec{v}_p\|}$ . En effet, en utilisant l'expression de  $\vec{v}_s$  donnée par (2.33) et en exprimant le produit scalaire  $\vec{v}_s \cdot \vec{v}_p$ , l'expression (2.38) découle naturellement après quelques développements simples.

- **Expression du vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_s}(\theta_p^c)$  en fonction du vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_p}(\theta_p^c)$ .**

Une nouvelle base  $\mathcal{B}_p = (\vec{u}_{x_s}, \vec{u}_{R_p}, \vec{u}_{N_p})$  avec  $\vec{u}_{R_p}^{\mathcal{B}_{pQW}} = [\cos \theta_p^c \quad \sin \theta_p^c \quad 0]^T$  et  $\vec{u}_{N_p}^{\mathcal{B}_{pQW}} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$  est définie de manière plus ou moins explicite dans [21]. On semble pouvoir en

déduire que  $\vec{u}_{x_s} = -\vec{v}_p \sqrt{\frac{\|\vec{r}_p(\theta_p^c)\|}{\mu_{\oplus}}}$ . En effet, si l'on note  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_p} = [\delta r_{pp}^1 \quad \delta r_{pp}^2 \quad \delta r_{pp}^3]^T$ , l'Hypothèse 6 qui implique un mouvement relatif rectilinéaire de vitesse relative constante entre le primaire et le secondaire conduit à écrire que  $\delta r_{pp}^1 = -\|\vec{v}_p\| \sqrt{\frac{\|\vec{r}_p(\theta_p^c)\|}{\mu_{\oplus}}} \delta t$  où  $\delta t$  est le temps

de retard accumulé lors de la rencontre après manœuvre et  $\|\vec{v}_p\| = \sqrt{\frac{1 + 2e_p \cos \theta_p^c + e_p^2}{1 + e_p \cos \theta_p^c}}$ .

La matrice de changement de base s'écrit alors :

$$K_{p2s} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{x_s} \cdot \vec{u}_{x_s} & \vec{u}_{R_p} \cdot \vec{u}_{x_s} & \vec{u}_{N_p} \cdot \vec{u}_{x_s} \\ \vec{u}_{x_s} \cdot \vec{u}_{y_s} & \vec{u}_{R_p} \cdot \vec{u}_{y_s} & \vec{u}_{N_p} \cdot \vec{u}_{y_s} \\ \vec{u}_{x_s} \cdot \vec{u}_{z_s} & \vec{u}_{R_p} \cdot \vec{u}_{z_s} & \vec{u}_{N_p} \cdot \vec{u}_{z_s} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

On vérifie ensuite que l'on obtient :

$$K_{p2s} = \begin{bmatrix} -\|\vec{v}_p\| \sqrt{\frac{\|\vec{r}_p(\theta_p^c)\|}{\mu_\oplus}} & \sin \alpha_p & 0 \\ 0 & -\frac{\cos \alpha_p \sin \phi \cos \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} & \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} \\ 0 & \frac{\cos \alpha_p \sin \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} & \frac{\sin \phi \cos \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

L'angle  $\alpha_p$  est l'angle de trajectoire de vol du primaire (angle entre  $\vec{u}_T^p$  et  $\vec{v}_p$ ), défini par :

$$\sin \alpha_p = \frac{e_p \sin \theta_p^c}{\|\vec{v}_p\| \sqrt{1 + e_p \cos \theta_p^c}}, \quad \cos \alpha_p = \frac{e_p \cos \theta_p^c}{\|\vec{v}_p\| \sqrt{1 + e_p \cos \theta_p^c}}. \quad (2.41)$$

Nous donnons, à titre d'exemple, le calcul de l'élément  $K_{p2s}$  puisque les autres éléments peuvent être déduits de celui-ci à partir de calculs identiques. Dans un premier temps, on calcule  $\vec{u}_{z_s} = \frac{\vec{v}_p \times \vec{v}_s}{\|\vec{v}_p \times \vec{v}_s\|}$  dans la base  $\mathcal{B}_{PQW}$

$$\vec{u}_{z_s}^{\mathcal{B}_{PQW}} = \begin{bmatrix} \frac{v_p^2 \sin \psi}{\|\vec{v}_p\| [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \phi]^{1/2}} \\ -\frac{v_p^1 \sin \psi}{\|\vec{v}_p\| [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \phi]^{1/2}} \\ \frac{\cos \psi \sin \phi}{[\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \phi]^{1/2}} \end{bmatrix}.$$

On en déduit le calcul de  $\vec{u}_{y_s} = \vec{u}_{z_s} \times \vec{u}_{x_s}$  dans la même base :

$$\vec{u}_{y_s}^{\mathcal{B}_{PQW}} = \frac{1}{\|\vec{v}_p\| [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \phi]^{1/2}} \begin{bmatrix} v_p^2 \cos \psi \sin \phi \\ v_p^1 \cos \psi \sin \phi \\ \|\vec{v}_p\| \sin \psi \end{bmatrix}.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{R_p} \cdot \vec{u}_{y_s} &= -\frac{[v_p^2 \cos \theta_p^c - v_p^1 \sin \theta_p^c] \cos \psi \sin \phi}{\|\vec{v}_p\| [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \phi]^{1/2}} \\ &= -\frac{[1 + e_p \cos \theta_p^c] \cos \psi \sin \phi}{[1 + e_p \cos \theta_p^c]^{1/2} \|\vec{v}_p\| [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \phi]^{1/2}} \\ &= -\frac{\cos \alpha_p \cos \psi \sin \phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}}. \end{aligned}$$

A partir de la Formule (2.40), il est possible d'écrire :

$$\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_s} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha_p & 0 \\ 0 & -\frac{\cos \alpha_p \sin \phi \cos \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} & \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} \\ 0 & \frac{\cos \alpha_p \sin \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} & \frac{\sin \phi \cos \psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \phi}} \end{bmatrix} \delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_p}. \quad (2.42)$$

Dans le cas singulier pour lequel  $\cos \psi \cos \phi = \pm 1$ , la matrice  $K_{p2s}$  vaut

$$K_{p2s} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha_p & 0 \\ 0 & -\cos \alpha_p & 1 \\ 0 & \cos \alpha_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

On a donc finalement

$$\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_s}(\theta_p^c) = K_{p2s} \delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_p}(\theta_p^c). \quad (2.44)$$

Les développements présentés dans cette partie ne sont pas toujours clairement exposés dans les références [22], [21], [23], [62] qu'il a fallut croiser pour reconstruire une démarche un peu plus rigoureuse. En particulier, les bases dans lesquelles sont exprimés les vecteurs sont rarement bien précisées.

- **Expression du vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_p}(\theta_p^c)$  en fonction du vecteur de manœuvre impulsionnelle  $\Delta \vec{V}_p^{\mathcal{B}_{\text{RTN}}}(\theta_p^m)$ .**

$$\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_p}(\theta_p^c) = D_{\Delta v 2p} \Delta \vec{V}_p^{\mathcal{B}_{\text{RTN}}}. \quad (2.45)$$

$$D_{\Delta v 2p} = \sqrt{\frac{\|\vec{r}_p(\theta_p^c)\|^3}{\mu_{\oplus}}} \begin{bmatrix} d_{xr} & d_{xt} & 0 \\ d_{rr} & d_{rt} & 0 \\ 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

où :

$$d_{xr} = \frac{1}{q_{30}(q_{30}^2 - q_{10}^2)(q_{30} - q_{10} \cos E_p^m)} \times [e_{r1}(E_p^c - E_p^m) + e_{r2}(\sin E_p^c - \sin E_p^m) + e_{r3}(\sin 2E_p^c - \sin 2E_p^m) + e_{r4}(\cos E_p^c - \cos E_p^m) + e_{r5}(\cos 2E_p^c - \cos 2E_p^m)]$$

$$d_{xt} = \frac{1}{q_{30}(q_{30}^2 - q_{10}^2)^{5/2}(q_{30} - q_{10} \cos E_p^m)} \times [e_{t1}(E_p^c - E_p^m) + e_{t2}(\sin E_p^c - \sin E_p^m) + e_{t3}(\sin 2E_p^c - \sin 2E_p^m) + e_{t4}(\cos E_p^c - \cos E_p^m) + e_{t5}(\cos 2E_p^c - \cos 2E_p^m)]$$

$$d_{rr} = \frac{\sin(\theta_p^c - \theta_p^m)}{q_{30}(q_{30} + q_{10} \cos \theta_p^c)^2}$$

$$d_{rt} = \frac{2q_{30} [1 - \cos(\theta_p^c - \theta_p^m)] - q_{10} \sin(\theta_p^m) \sin(\theta_p^c - \theta_p^m)}{q_{30}(q_{30} + q_{10} \cos \theta_p^m)(q_{30} + q_{10} \cos \theta_p^c)^2}$$

$$d_{nn} = \frac{\sqrt{q_{30}^2 + q_{10}q_{30} \cos \theta_p^c}}{q_{30} + q_{10} \cos \theta_p^c} \sin(\theta_p^c - \theta_p^m).$$

(2.47)

$$\begin{aligned}
e_{t1} &= 3q_{30}(q_{30}^2 - q_{10}^2) \\
e_{t2} &= \frac{1}{2} [3q_{10}^3 - (2q_{30}^2 - q_{10}^2)(4q_{30} \cos E_p^m - q_{10} \cos 2E_p^m)] \\
e_{t3} &= \frac{q_{30}q_{10}}{4} [4q_{30} \cos E_p^m - q_{10}(3 + \cos(2E_p^m))] \\
e_{t4} &= q_{30} [(4q_{30}^2 - 2q_{10}^2) \sin E_p^m - q_{30}q_{10} \sin(2E_p^m)] \\
e_{t5} &= -\frac{q_{10}}{4} [(4q_{30}^2 - 2q_{10}^2) \sin E_p^m - q_{30}q_{10} \sin(2E_p^m)] \\
e_{r1} &= 3q_{10}q_{30} \sin E_p^m \\
e_{r2} &= -2(q_{30}^2 + q_{10}^2) \sin E_p^m \\
e_{r3} &= \frac{q_{10}q_{30}}{2} \sin E_p^m \\
e_{r4} &= -2q_{30}(q_{30} \cos E_p^m - q_{10}) \\
e_{r5} &= \frac{q_{10}}{2}(q_{30} \cos E_p^m - q_{10}).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Dans les Equations (2.47) et (2.48), les éléments orbitaux généralisés sans dimension  $q_{10}$  et  $q_{30}$  sont définis dans la référence [22] comme :

$$q_{10} = \frac{e_p}{\sqrt{1 + e_p \cos \theta_p^c}}, \quad q_{30} = \frac{1}{\sqrt{1 + e_p \cos \theta_p^c}}. \tag{2.49}$$

Globalement, il est ainsi possible de formuler, à l'aide d'une approximation au premier ordre, une relation linéaire entre le vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_B}(\theta_p^c)$  et le vecteur de manœuvre  $\Delta \vec{V}_p^{\mathcal{B}_{RTN}}$  comme :

$$\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_B}(\theta_p^c) = R_{s2B} K_{p2s} D_{\delta v 2p} \Delta \vec{V}_p^{\mathcal{B}_{RTN}} = M \Delta \vec{V}_p^{\mathcal{B}_{RTN}}. \tag{2.50}$$

A partir des prochaines sous-sections, nous revenons à des notations plus simples telles qu'elles ont été utilisées dans la première partie de ce rapport. En particulier, les coordonnées du vecteur  $\delta \vec{r}_p^{\mathcal{B}_B}$  dans le plan de rencontre seront notées de manière générique  $[x \ y]^T$  afin d'être cohérent avec les notations utilisées dans le rapport [15].

### 2.4.3 Manœuvre de maximisation de la miss distance pour une rencontre directe

La première méthode d'évitement de collision proposée dans la référence [23] repose sur un principe d'évitement géométrique qui a pour but de rechercher la manœuvre impulsionnelle optimale au sens de la maximisation du carré de la miss distance sous la contrainte d'une borne maximale  $\Delta v_0$  sur la norme  $L_2$  du vecteur de manœuvre. Etant donnée que la miss distance, notée  $d_M$ , est donnée par  $d_M = \sqrt{x^2 + y^2}$ , son carré peut s'exprimer comme une fonction quadratique du vecteur de manœuvre :

$$d_M^2 = \Delta V_d^T(\theta_p^m) M^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M \Delta V_d(\theta_p^m) = \Delta V_d^T(\theta_p^m) Q_1 \Delta V_d(\theta_p^m). \tag{2.51}$$

Le calcul de la manœuvre impulsionnelle maximisant la miss distance  $d_M$  sous une contrainte d'appartenance à une boule de centre l'origine et de rayon  $\Delta v_0$  revient donc à résoudre le problème d'optimisation quadratique non convexe sous une contrainte quadratique convexe suivant :

**Problème 4** (Maximisation de la miss distance.).

$$\begin{aligned} & \max_{\Delta V_d(\theta_p^m)} \quad \Delta V_d(\theta_p^m)^T Q_1 \Delta V_d(\theta_p^m) \\ & \text{sous} \quad g(\Delta V_d(\theta_p^m)) = \Delta V_d(\theta_p^m)^T \Delta V_d(\theta_p^m) - \Delta v_0^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

où  $Q_1 \succeq 0$  avec  $\text{rang}(Q_1) \leq 2$ . Afin de retrouver de manière rigoureuse les résultats de [23], nous allons utiliser une condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale présentée dans la référence [63, Theorem 3] et qui a son origine dans les travaux en théorie de l'optimisation portant sur les méthodes numériques ou algorithmes à régions de confiance [101]. Le Problème 4 vérifie bien l'ensemble des hypothèses nécessaires à l'application du résultat puisque :

- $Q_1 \neq 0$  est semidéfinie positive.
- La contrainte quadratique peut s'écrire  $g(\Delta V) = \Delta V^T Q_2 \Delta V + c$  avec  $Q_2 = I_3$  définie positive et  $c = -\Delta v_0^2$ . Elle définit donc un ensemble convexe fermé.
- La condition de Slater (condition suffisante de qualification de contrainte dans le cas convexe) est vérifiée puisque  $\Delta V = 0$  est tel que  $g(0) < 0$ .

Sous ces hypothèses, il est possible de montrer l'existence d'un maximiseur global  $\Delta \bar{V}_d(\theta_p^m)$  du problème 4 appartenant à la frontière de l'ensemble réalisable du problème (frontière de la boule de centre 0 et de rayon  $\Delta v_0$ ). De plus, une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est donnée par :

$$\begin{cases} Q_1 \Delta \bar{V}_d(\theta_p^m) & = \bar{\mu} \Delta \bar{V}_d(\theta_p^m) \\ Q_1 - \bar{\mu} I_3 & \preceq 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

où  $\bar{\mu}$  est le paramètre optimal de Karush-Kuhn-Tucker. Cette condition nécessaire indique que la paire optimale  $(\Delta \bar{V}_d(\theta_p^m), \bar{\mu})$  est une paire de vecteur propre/valeur propre de la matrice  $Q_1$ . Cette matrice a au plus deux valeurs propres non nulles. Le ou les valeurs propres nulles ne sont pas la solution du problème de maximisation puisque cela conduit à obtenir un critère nul (la manœuvre impulsionnelle correspondant à cette valeur propre nulle n'a alors aucune action sur le primaire). Il faut donc choisir la valeur propre maximale de  $Q_1$  pour la valeur de  $\bar{\mu}$  et le vecteur propre associé pour le vecteur de poussée optimal  $\Delta \bar{V}_d(\theta_p^m)$ . De plus, on sait également que sa norme sera donnée par  $\|\Delta \bar{V}_d(\theta_p^m)\| = \Delta v_0$ . Enfin, la miss distance maximale ainsi calculée vaut  $\bar{d}_M = \sqrt{\bar{\mu}} \Delta v_0$ .

#### 2.4.4 Manœuvre de minimisation de la probabilité de collision pour une rencontre directe

Une deuxième approche utilisée pour le calcul de la manœuvre d'évitement est proposée dans [23] et repose sur le principe de la minimisation de probabilité de collision calculée dans le cadre d'une rencontre à court terme. Cela signifie que la probabilité de collision est évaluée comme l'intégrale 2D définie dans le plan de rencontre [15]. Ainsi, nous rappelons que le problème générique de calcul de la probabilité de collision dans le cadre des rencontres rapides peut se définir de la manière suivante. Etant données deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes  $x \sim \mathcal{N}(x_m, \sigma_x)$  et  $y \sim \mathcal{N}(y_m, \sigma_y)$  conjointement distribuées (avec le choix sans perte de généralité,  $\sigma_x \geq \sigma_y$  pour la suite de cette section), calculer l'intégrale suivante :

$$\mathcal{P}_c^{2D} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\bar{B}_2(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \frac{(x-x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_m)^2}{\sigma_y^2} \right)\right) dx dy. \quad (2.54)$$

Le rapport [15] a donné un état de l'art relativement complet des approches utilisées pour ce calcul sur lequel nous ne reviendrons pas si ce n'est pour réaffirmer que la méthode semi-analytique issue de [97], fondée sur un développement en série de l'intégrale (2.54), est la plus complète et précise à ce jour puisqu'elle permet de déterminer *a priori* le nombre de termes de la série nécessaires afin d'obtenir une précision donnée. Une alternative pour les cas numériquement mal conditionnés pour lesquels toutes les autres méthodes sont en échec et utilisant la méthode du point col a également été construite dans le rapport [15]. Notons qu'une méthode similaire (développement en série de l'intégrale  $\mathcal{P}_c^{2D}$ ) a été publiée dans [53] et il a été montré dans [16] que ce résultat constitue un cas particulier de la méthode de [97] sans préconditionnement et donc vouée à connaître des problèmes numériques de compensations qui peuvent être non rares. Enfin, ces approches sont à rapprocher de celle de [33], qui a été la première tentative de solution semi-analytique mais qui repose sur une approximation (sauf dans le cas isotrope où  $\sigma_x = \sigma_y$ ) qui consiste à substituer à une surface d'intégration elliptique, l'aire identique d'un disque. Cette dernière fournit donc l'approximation suivante :

$$\mathcal{P}_c^{2D} \simeq e^{-v/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v^m}{2^m m!} \left( 1 - e^{-u/2} \sum_{k=0}^m \frac{u^k}{2^k k!} \right), \quad (2.55)$$

où

$$u = \frac{R^2}{\sigma_{\tilde{x}} \sigma_{\tilde{y}} \sqrt{1 - \rho_{\tilde{x}\tilde{y}}^2}}, \quad v = \frac{1}{1 - \rho_{\tilde{x}\tilde{y}}^2} \left[ \left( \frac{\tilde{x}_m}{\sigma_{\tilde{x}}} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{y}_m}{\sigma_{\tilde{y}}} \right)^2 - 2\rho_{\tilde{x}\tilde{y}} \frac{\tilde{x}_m}{\sigma_{\tilde{x}}} \frac{\tilde{y}_m}{\sigma_{\tilde{y}}} \right], \quad (2.56)$$

pour une matrice réduite de covariance de la position relative du primaire dans le B-plane donnée par  $\Sigma_{\tilde{x}\tilde{y}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{x}}^2 & \rho_{\tilde{x}\tilde{y}} \sigma_{\tilde{x}} \sigma_{\tilde{y}} \\ \rho_{\tilde{x}\tilde{y}} \sigma_{\tilde{x}} \sigma_{\tilde{y}} & \sigma_{\tilde{y}}^2 \end{bmatrix}$ . Il est important de noter que les paramètres  $u$  et  $v$  sont exprimés en fonction des coordonnées  $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$  définis dans le plan de rencontre avant que la matrice de covariance ne soit diagonalisée, alors que la formule (2.54) est donnée en fonction des coordonnées  $(x_m, y_m)$  correspondant à un repère aligné sur les axes principaux de la matrice de covariance. Les différents changements permettant de passer d'un jeu de coordonnées à l'autre sont en partie décrits dans le rapport [15] et détaillés dans la thèse [96]. En particulier, nous avons :

$$u = \frac{R^2}{\sigma_x \sigma_y}, \quad v = \left( \frac{x_m}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{y_m}{\sigma_y} \right)^2. \quad (2.57)$$

Pour la suite, nous utiliserons la Formule (2.56) afin de coller au mieux aux notations de la référence [23].

Dans la Formule (2.55) de la probabilité de collision approximée par la méthode de Chan, une rapide analyse asymptotique montre que si l'on souhaite minimiser cette approximation, il est possible de minimiser le terme prépondérant  $e^{-v/2}$  et donc de maximiser le terme  $v$ . Comme  $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$  peuvent s'écrire linéairement en fonction de  $\Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m)$  et que  $v$  est une fonction quadratique de ces paramètres, le problème de calcul de la manœuvre  $\Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m)$  minimisant la probabilité de collision revient à un problème de programmation quadratique non convexe, de nature identique à celle du problème de maximisation de la miss distance.

**Problème 5** (Minimisation de la probabilité de collision.).

$$\begin{aligned} & \max_{\Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m)} \quad \Delta V_{\text{poc}}^T(\theta_p^m) Q_3 \Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m) \\ & \text{sous} \quad g(\Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m)) = \Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m)^T \Delta V_{\text{poc}}(\theta_p^m) - \Delta v_0^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

où la matrice  $Q_3$  définissant le critère est donnée par :

$$Q_3 = M^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & 0 & -\frac{\rho_{\hat{x}\hat{y}}}{\sigma_x \sigma_y} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_{\hat{x}\hat{y}}}{\sigma_x \sigma_y} & 0 & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix} M. \quad (2.59)$$

Le Problème 5 a donc exactement les mêmes propriétés que le Problème 4 et sa solution optimale  $\Delta \bar{V}_{\text{poc}}(\theta_p^m)$  sera donc obtenue exactement avec les mêmes outils et peut être calculée comme le vecteur propre de la matrice  $Q_3$ , associée à la valeur propre maximale  $\bar{\lambda}$  et telle que :

$$\|\Delta \bar{V}_{\text{poc}}(\theta_p^m)\| = \Delta v_0. \quad (2.60)$$

**Remarque 9.**

*L'analyse asymptotique utilisée pour transformer la minimisation de la probabilité en maximisation du terme  $v$  à partir de la formule de la probabilité de Chan (2.55) peut être transposée stricto sensu à la formule du développement en série, donnée dans [97] puisque le terme  $\alpha_0 = \frac{1}{2\sigma_x \sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$  est en facteur de la récurrence et va jouer le même rôle de terme prépondérant que le terme  $e^{-v/2}$  dans le cas précédent.*

**2.4.5 Manœuvre d'évitement de collision pour une rencontre indirecte pour la maximisation de la miss distance**

Il est rappelé qu'une rencontre indirecte est définie comme une rencontre pour laquelle la miss distance est non nulle au moment de la collision. Dans ce cas, nous aurons que le vecteur des positions relatives dans le B-plane sera donné par la relation :

$$r_r(\theta_p^c) = m_{r_r}(\theta_p^c) + M\Delta V(\theta_p^m), \quad (2.61)$$

où  $m_{r_r}(\theta_p^c)$  est la position relative moyenne du primaire par rapport au secondaire à la date de la collision (soit à la TCA). Dans la suite, comme il ne peut y avoir d'ambiguïté sur la date et l'objet associés à la manœuvre, nous noterons  $\Delta V(\theta_p^m) = \Delta V$  pour simplifier les notations. En reprenant le critère choisi de maximisation du carré de la miss distance dans le B-plane, le critère à optimiser en fonction de la manœuvre  $\Delta V(\theta_p^m)$  est la fonction quadratique :

$$f(\Delta V) = \Delta V^T Q_1 \Delta V + 2m_{r_r}(\theta_p^c)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M\Delta V + m_{r_r}(\theta_p^c)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} m_{r_r}(\theta_p^c)^T. \quad (2.62)$$

Sous une contrainte identique de norme 2 du vecteur de manœuvre, bornée par  $\Delta v_0$ , le problème de calcul de manœuvre optimale au sens de la maximisation de miss distance revient à écrire le problème d'optimisation quadratique non convexe suivant :

**Problème 6** (Maximisation de la miss distance en rencontre indirecte.).

$$\begin{aligned} \max_{\Delta \tilde{V}_{di}} & \Delta \tilde{V}_{di}^T Q_1 \Delta \tilde{V}_{di} + 2b^T \Delta \tilde{V}_{di} + c \\ \text{sous} & g(\Delta \tilde{V}_{di}) = \Delta \tilde{V}_{di}^T \Delta \tilde{V}_{di} - 1 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

où les fonctions critère et contrainte ont été normalisées par  $\Delta v_0^2$ . Ainsi,  $\Delta V_{di} = \Delta v_0 \Delta \tilde{V}_{di}$ ,  $b =$

$$\frac{M^T \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}}{\Delta v_0} \text{ et } c = \frac{x_m^2 + y_m^2}{\Delta v_0^2}.$$

**Remarque 10.**

*Nous avons conservé le terme constant dans la fonction critère quadratique afin de rester le plus général possible et afin de retrouver la valeur optimale du critère initial plus directement, contrairement à ce qui est fait dans la référence [23].*

Le Problème 6 est de nature identique aux problèmes précédemment étudiés : c'est un problème de maximisation d'une forme quadratique convexe (puisque la matrice  $Q_1 = M^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M$  est semidéfinie positive et de rang au plus égal à 2) sous une contrainte quadratique convexe et pour lequel la condition de qualification de contrainte de Slater est vérifiée. Il est donc possible de lui appliquer exactement les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité données dans la référence [63, Theorem 3] et qui deviennent :  $\Delta \bar{V}_{di}$  est une solution optimale globale de 6 si et seulement s'il existe  $\bar{\mu}_{di} \geq 0$  vérifiant :

$$\begin{aligned} Q_1 \Delta \bar{V}_{di} + b &= \bar{\mu}_{di} \Delta \bar{V}_{di} \\ -Q_1 + \bar{\mu}_{di} I_3 &\succeq 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

La matrice  $Q_1$  est une matrice symétrique à coefficients réels et l'application du théorème spectral [64] permet de déduire que toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $Q_1$  sont réelles avec des vecteurs propres réels  $q_i$  distincts et orthogonaux. Il existe ainsi une matrice diagonale formée avec les valeurs propres sur la diagonale dans l'ordre décroissant et une matrice orthogonale  $U$  dont les colonnes sont les vecteurs propres  $q_i$  telles que  $Q = U \text{diag}(\lambda_i) U^T$ . Cette décomposition spectrale peut ainsi s'écrire :

$$Q_1 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i q_i q_i^T. \quad (2.65)$$

De la première condition nécessaire et suffisante d'optimalité (2.63), on obtient :

$$\Delta \bar{V} = (\bar{\mu} I_3 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i q_i q_i^T)^\dagger b = \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{q_i q_i^T}{\bar{\mu} - \lambda_i} \right] b. \quad (2.66)$$

Comme  $\Delta \bar{V}$  est atteint sur la frontière du domaine réalisable, on a donc  $\Delta \bar{V}^T \Delta \bar{V} = 1$  et on peut en déduire une condition sur  $\bar{\mu}$  qui doit vérifier :

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{b^T q_i}{\bar{\mu} - \lambda_i} \right)^2 = 1. \quad (2.67)$$

La deuxième condition de (2.63) implique nécessairement que  $\bar{\mu}$  vérifie  $\bar{\mu} \geq \lambda_1$  où  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  est la plus grande valeur propre de  $Q_1$ . Finalement, nous avons

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{b^T q_i}{\bar{\mu} - \lambda_i} \right)^2 = \left( \frac{b^T q_1}{\bar{\mu} - \lambda_1} \right)^2 + \left( \frac{b^T q_2}{\bar{\mu} - \lambda_2} \right)^2 = 1. \quad (2.68)$$

En effet, si l'on note par  $\lambda_3$  la valeur propre nulle de la matrice  $Q_1$  et  $q_3$  son vecteur propre associé

alors on sait que  $q_3 \in \ker(Q_1)$ . De plus, le vecteur  $b = \frac{M^T \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}}{\Delta v_0}$  avec la matrice  $M$  de rang



plein et  $Q_1 = M^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M$  donc  $b$  est un vecteur de l'espace engendré par la matrice  $Q_1$  ( $b \in \text{Range}(Q_1)$ ) et l'on a donc  $b^T q_3 = 0$ .

Finalement, on retrouve exactement les Conditions (25) de l'article [23] avec une démonstration complètement rigoureuse et justifiée. Il s'agit donc de déterminer  $\bar{\mu}$  solution du système :

$$\left( \frac{b^T q_1}{\bar{\mu} - \lambda_1} \right)^2 + \left( \frac{b^T q_2}{\bar{\mu} - \lambda_2} \right)^2 = 1 \quad (2.69)$$

$$\bar{\mu} \geq \lambda_1,$$

par une méthode numérique (de type Newton par exemple). Une fois  $\bar{\mu}$  déterminé, il est alors possible de calculer la manœuvre optimale comme :

$$\Delta \bar{V} = \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{q_i q_i^T}{\bar{\mu} - \lambda_i} \right] b = \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{q_i q_i^T}{\bar{\mu} - \lambda_i} \right] M^T \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \\ y_m \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

### Remarque 11.

*Il est important de noter que, dans tous les cas de figure étudiés dans ces références, la date (ou la localisation caractérisée par  $\Delta\theta_p = \theta_p^c - \theta_p^m$ ) de la manœuvre d'évitement ne fait pas partie des variables de décision des problèmes d'optimisation posés. Dans [23], une étude numérique sur deux cas particuliers (collision entre Iridium 33 et Cosmos 2251 en 2009 et la rencontre RapidEye4-UoSat2 de mai 2013) donne quelques éléments de comparaison sur la variation des résultats en fonction de la localisation  $\Delta\theta_p$  de la manœuvre.*

Dans les expérimentations numériques présentées dans [23] ou dans [28], les variables de décision définissant l'orientation du vecteur de manœuvre dans la base  $\mathcal{B}_{\text{RTN}}$  liée au primaire sont exprimées à l'aide de deux angles  $\gamma$  et  $\sigma$  de la façon suivante.

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \Delta V_r \\ \Delta V_t \\ \Delta V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\Delta V\| \cos \gamma \sin(\sigma + \alpha_p) \\ \|\Delta V\| \cos \gamma \cos(\sigma + \alpha_p) \\ \|\Delta V\| \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

L'angle  $\gamma$  est l'angle entre le vecteur  $\Delta V$  et sa projection sur le plan orbital et  $\sigma$  est l'angle, défini dans le plan orbital, entre le vecteur  $v_p$  et la projection de  $\Delta V$  dans le plan orbital.

L'étude numérique de la référence [28] propose ainsi une analyse de la validité des hypothèses simplificatrices (date de la TCA fixe et orbite képlérienne pour la propagation après manœuvre). L'optimalité de la direction de poussée calculée avec la méthode de Bombardelli est ensuite analysée en comparant les résultats avec un échantillonnage de directions appartenant à la boule de rayon  $\Delta v_0$  et les résultats obtenus semblent montrer que la méthode ne renvoie pas la direction de poussée optimale dans de très rares cas et avec une différence relative de 1% sur la probabilité de collision ainsi obtenue. Il est du coup difficile de conclure quant à l'origine de cette différence qui peut être liée à la précision de calcul mise en œuvre dans les différentes étapes de construction de la probabilité de collision, une fois la manœuvre choisie. Enfin, une comparaison de la manœuvre de Bombardelli avec des manœuvres tangentielles réalisées à la PSO opposée et une demi orbite avant la collision par le Centre d'Orbitographie Opérationnel (COO) est effectuée sur deux cas pratiques réels (rencontre satellite A - débris Cosmos 1275 en orbite basse et rencontre Metop satellite B - débris Cosmos 1275 (N17620)). Cette comparaison montre que suivant la date à laquelle elle est opérée, la manœuvre optimale (en probabilité de collision) n'est pas nécessairement une manœuvre

purement tangentielle. Cette méthode a donc été implémentée dans une classe JAVA *OptimalManeuverComputerBombardelli*. De nombreux éléments de cette méthodologie se retrouvent également dans l'outil MISS (Manœuvre Intelligence for Space Systems) présenté dans la référence [55] ainsi que dans la référence [49].

## 2.5 Méthode de Slater

Un des problèmes abordés dans l'article [100] (de manière relativement marginale), est celui du calcul d'une manoeuvre d'évitement permettant de créer une miss distance spécifique (attendue comme suffisante pour éviter une collision)  $d_M^{\text{target}}$  entre deux objets. Cela signifie en particulier que le calcul de manoeuvre s'effectue dans un cadre purement déterministe et sans hypothèses statistiques particulières. Le principe de cette approche est très semblable à celui développé dans la Section 2.4 mais il est à noter qu'il a été proposé antérieurement et présenté à un niveau de plus grande généralité quoique la présentation de [100] soit limitée au cas des rencontres directes et sans référence à la problématique de minimisation de la probabilité de collision.

Rédigée dans le cadre d'une orbite circulaire, leur formulation est aussi valide pour des orbites elliptiques képlériennes et pour toute orbite perturbée pour laquelle une représentation linéarisée du mouvement relatif est disponible. En fait, comme nous l'avons vu pour l'approche de l'outil OCCAM, l'approche de Slater repose sur le fait qu'une application linéaire peut être trouvée entre l'état relatif (la position et la vitesse) entre les deux objets à l'instant de la manoeuvre  $t_m$  et l'état relatif à la date de TCA  $t_{\text{TCA}}$ . Cela inclut ainsi les orbites relatives décrites par les matrices de transition obtenues par une linéarisation de la dynamique képlérienne, comme celles de Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) ou de Yamanaka-Ankersen (YA). D'autres applications linéaires obtenues numériquement et qui prennent en compte de termes additionnels dus à des perturbations orbitales par exemple peuvent également être envisagées (cf. [54] pour un exemple de matrice de transition pour un mouvement relatif elliptique et perturbé). Nous utilisons la notation classique pour écrire les équations de mouvement ballistique (sans manoeuvre) relatif linéarisé (HCW ou YA) autour d'une orbite nominale circulaire ou elliptique qui peut être l'orbite képlérienne de l'objet primaire par exemple.

$$x_r(t|x_r^0) = \Phi_r(t, t_0)x_r^0, \quad (2.72)$$

où la matrice de transition  $\Phi_r$  est partitionnée suivant les blocs  $\Phi_r(t, t_0) := \begin{pmatrix} \Phi_{r11}(t, t_0) & \Phi_{r12}(t, t_0) \\ \Phi_{r21}(t, t_0) & \Phi_{r22}(t, t_0) \end{pmatrix}$ .

Si l'on note l'état relatif après manoeuvre comme  $\tilde{x}_r$ , il est possible d'écrire, après une manoeuvre impulsionnelle  $\Delta V$  à l'instant  $t_m$  :

$$\tilde{x}_r(t|t_0) = x_r(t|t_0) + \Phi_r(t, t_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta V \end{pmatrix} = \Phi_r(t, t_0)x_r^0 + \Phi_r(t, t_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta V \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

L'expression (2.73) peut être réécrite afin de faire apparaître les changements en position et en vitesse relatives au temps  $t_{\text{TCA}}$ , induits par la manoeuvre comme :

$$\tilde{r}_r(t_{\text{TCA}}) = r_r(t_{\text{TCA}}) + \Phi_{r12}(t_{\text{TCA}}, t_m)\Delta V, \quad (2.74)$$

$$\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}}) = v_r(t_{\text{TCA}}) + \Phi_{r22}(t_{\text{TCA}}, t_m)\Delta V. \quad (2.75)$$

Comme la référence [100] se place dans le cadre d'une rencontre directe, il est supposé que  $r_r(t_{\text{TCA}}) = 0$ . Le calcul de la nouvelle miss distance de la trajectoire relative dans un intervalle de temps centré en  $t_{\text{TCA}}$  est fait en utilisant les hypothèses d'une rencontre rapide : notamment, on suppose que le mouvement relatif est rectiligne uniforme, de direction donnée par le vecteur unitaire

$$\tilde{e} = \frac{\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}})}{\|\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}})\|}. \quad (2.76)$$

Le plan de rencontre ou B-plane est alors construit comme le plan perpendiculaire au vecteur  $\tilde{e}$  et la nouvelle miss-distance  $d_M^{\text{new}}$  est donnée par la norme de la projection  $\Delta r_{\min}$  du vecteur  $\tilde{r}_r(t_{\text{TCA}})$  sur ce plan. Ceci s'écrit comme :

$$\Delta r_{\min} = (I_3 - \tilde{e}\tilde{e}^T)\tilde{r}_r(t_{\text{TCA}}), \quad (2.77)$$

où la matrice  $I_3 - \tilde{e}\tilde{e}^T$  est la matrice de projection (symétrique et idempotente) sur le plan de rencontre. De plus, le vecteur  $\Delta r_{\min}$  est une fonction des vecteurs  $\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}})$  et  $\tilde{r}_r(t_{\text{TCA}})$ . La norme du vecteur  $\Delta r_{\min}$  est calculée alors simplement comme :

$$d_M^{\text{new}} = \|\Delta r_{\min}\| = (\tilde{r}_r(t_{\text{TCA}})^T(I - \tilde{e}\tilde{e}^T)\tilde{r}_r(t_{\text{TCA}}))^{1/2}. \quad (2.78)$$

En considérant le cas simplifié où la miss-distance avant la manoeuvre était égale à zéro, on obtient :

$$d_{M,d}^{\text{new}^2} = \Delta V^T \Phi_{12}^T(t_{\text{TCA}}, t_m)(I - \tilde{e}\tilde{e}^T)\Phi_{12}(t_{\text{TCA}}, t_m)\Delta V. \quad (2.79)$$

Le problème final permettant le calcul de la manoeuvre, posé dans [100], est presque de même nature que celui de Bombardelli (problème quadratique) mais au lieu de maximiser la miss-distance en imposant une contrainte sur la norme de l'incrément de vitesse (problème de minimisation d'une fonction quadratique non convexe sous une contrainte d'inégalité convexe), il s'agit de calculer l'incrément de vitesse dont le carré de la norme est minimale sous la contrainte que le carré de la miss-distance soit égal à la valeur donnée  $d_M^{\text{target}^2}$  :

$$\begin{array}{l} \min_{\Delta V} \quad \|\Delta V\| \\ \text{sous} \end{array} \quad (2.80)$$

$$d_{M,d}^{\text{new}^2} = \Delta V^T \Phi_{12}^T(t_{\text{TCA}}, t_m)(I - \tilde{e}\tilde{e}^T)\Phi_{12}(t_{\text{TCA}}, t_m)\Delta V = \Delta V^T Q \Delta V = d_M^{\text{target}^2}.$$

Ce problème d'optimisation est un problème de minimisation d'une fonction quadratique convexe sous une contrainte égalité non convexe. Pour le résoudre, il est possible d'appliquer les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre ainsi que les conditions au second ordre d'optimalité obtenues à partir du Lagrangien :

$$L(\Delta V; \mu) = \Delta V^T \Delta V + \mu(\Delta V^T Q \Delta V - d_M^{\text{target}^2}). \quad (2.81)$$

Une condition suffisante de qualification de contrainte est donnée par  $Q\Delta V^* \neq 0$ . Si  $\text{rang}(Q) = 3$ , cette condition suffisante est toujours vérifiée et si  $\text{rang}(Q) < 3$  alors  $\Delta V^* \notin \text{Ker}(Q)$  qui sera toujours vraie si  $\Delta V^*$  est réalisable pour la contrainte. On suppose donc que  $\Delta V^* \notin \text{Ker}(Q)$ . La condition nécessaire d'optimalité au premier ordre s'écrit :

$$\Delta V^* = -\mu^* Q \Delta V^*. \quad (2.82)$$

Cela signifie que  $-1/\mu^*$  est une valeur propre de la matrice  $Q$  et que  $\Delta V^*$  est le vecteur propre associé. En examinant la fonction critère à l'optimum et en utilisant la contrainte, il est facile de voir que l'optimum est atteint pour  $\mu^* = -1/\lambda_{\max}$  et  $\Delta V^*$  est le vecteur propre associé avec  $\|\Delta V^*\|^2 = d_M^{\text{target}^2}/\lambda_{\max}$  où  $\lambda_{\max}$  est la valeur propre maximale de la matrice  $Q = \Phi_{12}^T(t_{\text{TCA}}, t_m)(I_3 - \tilde{e}\tilde{e}^T)\Phi_{12}(t_{\text{TCA}}, t_m)$ . Cette solution est effectivement la solution optimale globale du problème quadratique comme le montre la condition suffisante au second ordre :

$$I_3 - Q/\lambda_{\max} \succ 0. \quad (2.83)$$

La difficulté masquée de cette approche réside dans le calcul de la matrice de projection  $I_3 - \tilde{e}\tilde{e}^T = I_3 - \tilde{e}(\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}}))\tilde{e}^T(\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}}))$  où  $\tilde{v}_r(t_{\text{TCA}})$  n'est pas connue puisque ce vecteur va constituer la manœuvre à calculer. Pour pallier ce problème, il est proposé dans [100] une procédure itérative où la direction du vecteur  $\tilde{e}$  peut être initialement considérée comme identique à celle de  $v_r(t_{\text{TCA}})$  (vitesse relative en  $t_{\text{TCA}}$  sans manoeuvre). Les auteurs mentionnent ainsi que la solution de ce problème simplifié peut être ensuite utilisée comme valeur initiale dans une méthode itérative de point fixe afin de converger vers la vraie solution. Par contre, en pratique, tant que la vitesse d'approche relative n'est pas trop faible (hypothèse de rencontre rapide respectée), l'effet de cette correction de vitesse est presque un déplacement parallèle du vecteur de vitesse relative ; par conséquent, aucune itération sur le calcul de la direction  $e$  n'est réellement requise. Dans les expériences numériques faites par les auteurs, cela reste vrai pour des vitesses d'approche aussi basses que 5 cm/s. Ils mentionnent qu'à des vitesses relatives de 1 cm/s, l'hypothèse d'un mouvement rectiligne n'est généralement pas valide, bien que leur algorithme génère des solutions assez lisses pour le problème d'optimisation.

En conclusion, il est important de rappeler que le calcul de la manœuvre d'évitement dans un environnement incertain (avec un modèle probabiliste associé) est tout simplement fondé sur une approche déterministe utilisant le fait qu'imposer une distance de  $d_M^{\text{target}} = 3\sigma$  du centre de l'ellipse de covariance permet *in fine*, de trouver une manœuvre qui fait diminuer la probabilité de collision. Toutefois, à la différence de l'outil d'OCCAM, cette approche n'est pas exploitée dans le cadre d'une expression analytique de la probabilité de collision. Il est important de noter que la date de manœuvre  $t_m$  n'est pas une variable de décision du problème et qu'aucune discussion à ce sujet n'est abordée dans l'article.

## 2.6 Méthode de Denenberg-Gurfil (aka Patera-Peterson)

### 2.6.1 Introduction

Dans l'article [44], E. Denenberg et P. Gurfil développent des méthodes de calcul d'une manœuvre d'évitement de collision pour un cluster de satellites. En supposant que le cluster est déjà contrôlé par un algorithme de maintien à poste, ils proposent un module supplémentaire de manœuvres pour la fonction d'évitement de collision avec des débris. Une analyse permettant de comparer plusieurs alternatives est proposée dans le cadre de la stratégie de maintien à poste : (1) une manœuvre d'évitement qui n'affecte pas les contraintes sur les distances entre les satellites du cluster ; (2) deux manœuvres successives composées d'une manœuvre d'évitement, suivie d'une manœuvre à la date  $t_{TCA}$  pour le maintien à poste du cluster ; (3) une unique manœuvre utilisée pour l'évitement de collision et le maintien à poste dans le cluster ; (4) une manœuvre globale faite par tous les membres du cluster.

Du fait de l'objectif spécifique de ce rapport, nous avons choisi de concentrer principalement notre présentation sur les aspects liés à la manœuvre d'évitement. Il est important de noter que la méthode de calcul de la manœuvre présentée dans [44] a été complètement reprise de la référence [86]. L'originalité de la référence [44] réside donc principalement dans son application dans le cadre du MAP d'un cluster de satellites. Plusieurs remarques générales de ce papier qui nous semblent importantes à répercuter sont également analysées.

### 2.6.2 Calcul de la manœuvre d'évitement

Comme nous l'avons déjà abondamment vu dans les sections précédentes, le calcul de la manœuvre d'évitement de collision est formulé comme la résolution d'un problème d'optimisation dont les variables de décision sont les composantes du vecteur de manœuvre. Le problème d'optimisation posé se traduit comme la recherche de la manœuvre de consommation minimale (à travers la norme 2 du vecteur de poussée impulsionnelle) sous la contrainte que la probabilité maximale de rencontre (après manœuvre) soit inférieure à un seuil prédéfini. Ainsi, le problème d'optimisation formulé par Denenberg et Gurfil [44] est simplement :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta V} \quad & \|\Delta V\| \\ \text{sous} \quad & \mathcal{P}_{max}(\Delta V) - \mathcal{P}_m^{\text{seuil}} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Il est important de préciser sous quelles hypothèses est posé ce problème d'optimisation afin de définir précisément sa nature, pour ensuite aborder la méthode de résolution. Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

#### Hypothèse 9.

- La manœuvre n'introduit pas de risque additionnel.
- La rencontre pour laquelle la manœuvre d'évitement est calculée, est modélisée comme une rencontre rapide de date de TCA  $t_{TCA}$ .
- La manœuvre n'affecte pas la date  $t_{TCA}$  qui est supposée fixe.

Le fait que la rencontre soit modélisée comme une rencontre rapide permet de simplifier l'expression de la contrainte qui est ici simplifiée à un ordre supérieur en introduisant une contrainte sur la probabilité maximale à l'aide la formule :

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[ \frac{r+1}{2\sqrt{r}} \sqrt{-\ln \left( \frac{1-r}{1+r} \right)} \right] + \operatorname{erf} \left[ \frac{r-1}{2\sqrt{r}} \sqrt{-\ln \left( \frac{1-r}{1+r} \right)} \right] \right\}, \quad (2.85)$$

où le paramètre  $r$  est défini par  $r = \frac{R}{d_M(\Delta V)}$ . La formule (2.85) est une approximation fournie par S. Alfano dans [3] de la formule de la probabilité maximale donnée par Alfriend et ses co-auteurs dans la référence [7]. Cet indicateur mériterait une étude particulière qui pour des raisons évidentes ne peut être réalisée dans ce rapport étant donné l'objet de celui-ci.

**Remarque 12.**

*Concernant le calcul de  $t_{TCA}$ , il est proposé de le faire en propageant la trajectoire des deux objets avec un pas de temps suffisamment petit et en utilisant un algorithme de la littérature tels que ceux donnés dans les références [6] ou [43].*

Le problème d'optimisation (2.84) est un problème de minimisation d'une fonction convexe sous une contrainte inégalité non linéaire et non convexe. En effet, même si l'on utilise une paramétrisation linéaire de la fonction  $d_M(\Delta V)$  comme il a été vu dans les Sections 2.4 et 2.5, la fonction  $\mathcal{P}_{max}(\Delta V)$  donnée par (2.85) est non linéaire et non convexe. Toutefois, en appliquant une approche classique fondée sur l'écriture d'un lagrangien et de la condition nécessaire d'optimalité au premier ordre, il est facile de montrer que l'optimum sera atteint sur la frontière du domaine admissible (la contrainte est saturée en  $\Delta V^*$ ). De plus, nous obtenons la direction optimale de manœuvre comme :

$$\frac{\Delta V^*}{\|\Delta V^*\|} = - \frac{\nabla \mathcal{P}_{max}(\Delta V^*)}{\|\nabla \mathcal{P}_{max}(\Delta V^*)\|} \quad (2.86)$$

où  $\nabla \mathcal{P}_{max}(\Delta V^*) = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{P}_{max}}{\partial \Delta v_x} \\ \frac{\partial \mathcal{P}_{max}}{\partial \Delta v_y} \\ \frac{\partial \mathcal{P}_{max}}{\partial \Delta v_z} \end{array} \right]_{|\Delta V^*}$  est le gradient de la fonction  $\mathcal{P}_{max}(\Delta V)$  évalué en l'optimum

$\Delta V^*$ . Les composantes de  $\Delta V$  sont ici exprimées dans un repère local lié au primaire et dont la base est définie par les vecteurs  $(\vec{u}_N \times \vec{u}_R, -\vec{u}_N, -\vec{u}_R)$ . L'amplitude optimale est alors obtenue par la résolution par une méthode numérique de Newton-Raphson de l'équation :

$$\mathcal{P}_{max}(\Delta V^*) - \mathcal{P}_m^{seuil} = 0. \quad (2.87)$$

Un point majeur de cette résolution, initialement proposée dans [86], est masqué dans l'Equation (2.86). En effet, le calcul de la direction optimale repose sur l'évaluation du gradient de la fonction  $\mathcal{P}_{max}$  en  $\Delta V^*$ . Il est donc nécessaire de donner une valeur de l'amplitude optimale, supposée être pas trop loin de la valeur optimale. Etant donné que la manœuvre est généralement relativement petite (des centimètres par seconde) et que le déplacement nécessaire pour la réduction de  $\mathcal{P}_{max}$  est également relativement faible (des centaines de mètres), les auteurs proposent une valeur approximative de 1 cm/s pour évaluer le gradient. Cela signifie qu'il n'y a aucune assurance que l'algorithme détermine un optimum, même local, du problème d'optimisation initial. Il est à noter également que la dérivée de  $F$  et le gradient  $G$  sont calculés à l'aide d'une méthode aux différences finies, sans donner plus de précisions sur la mise en œuvre d'un schéma aux différences finies particulier.

### 2.6.3 Discussion sur le choix de la date de la manœuvre $t_m$

Les auteurs, E. Denenberg et P. Gurfil, donnent quelques éléments de discussion sur l'importance de ce choix, en remarquant de manière assez directe et banale que ce choix doit concilier deux objectifs contradictoires et va résulter en un compromis bien connu. Le premier choix consiste à effectuer la manœuvre le plus tôt possible car il est connu que la taille de la manœuvre (mesurée en norme 2) augmente avec la proximité plus grande de  $t_m$  et de  $t_{TCA}$ . Le second choix consiste à manœuvrer plus tardivement afin de réduire l'incertitude sur la position relative en obtenant

éventuellement de nouvelles données ou en réduisant le temps de propagation. Finalement, la solution choisie est relativement simpliste et heuristique puisqu'une grille sur les dates  $t_m$  est construite. La stratégie de calcul mentionnée ci-dessus est ensuite appliquée en chaque instant de la grille temporelle. L'amplitude, calculée pour la poussée correspondante, est tracée en fonction des dates  $t_m$  pour confirmer expérimentalement, (sur un cas d'application) une augmentation de l'amplitude de la manoeuvre quand la date de manoeuvre  $t_m$  tend vers la date  $t_{TCA}$  (si les informations sur l'incertitude restent inchangées).

#### 2.6.4 Quelques notes sur l'application de cette stratégie dans le cas d'un cluster

En supposant que les orbites de deux satellites appartenant au même cluster sont proches, le maintien à poste du cluster peut être réalisé en s'assurant que le demi-grand axe différentiel entre les satellites ne varie pas beaucoup, empêchant ainsi leur dérive. Cette logique générique est celle de nombreux algorithmes de maintien à poste de clusters ou de formations [78]. Par conséquent, lors de la planification d'une manoeuvre d'évitement de collision, appliquée à un satellite appartenant à un cluster, on peut supposer que seule la différence moyenne des demi-grands axes doit être contrôlée. Ainsi, il est suggéré de calculer cette quantité pour chaque date  $t_m$  et de choisir uniquement les manoeuvres ne violant pas ces contraintes de distance à l'intérieur du cluster. Dans le cas où cette stratégie n'est pas possible, ils proposent alors trois stratégies alternatives :

- La première consiste à effectuer une deuxième manoeuvre de maintien à poste à la date  $t_{TCA}$ . Cela revient à résoudre un problème d'optimisation similaire au problème (2.84), en notant par  $\Delta a_{ij}(\Delta V(t_{TCA}))$  la différence moyenne des demi-grands axes entre les satellites  $i$  et  $j$  du cluster :

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta V(t_{TCA})} \|\Delta V(t_{TCA})\| \\ & \text{sous} \\ & \Delta a_{ij}(\Delta V(t_{TCA})) - \Delta a_{ij}^* \leq 0, i \neq j. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Une analyse expérimentale relève le fait que le coût d'une telle manoeuvre est d'un ordre de grandeur supérieur à la manoeuvre d'évitement de collision  $\Delta V(t_m)$ .

- La deuxième stratégie consiste simplement à forcer tous les satellites à manoeuvrer en même temps que celui à qui doit être appliqué la manoeuvre d'évitement de collision. Elle présente l'avantage d'un équilibrage de la consommation au sein du cluster, ne nécessitant pas de manoeuvres supplémentaires de maintien à poste du cluster. L'inconvénient de cette méthode est le coût global de cette manoeuvre, qui est proportionnel au nombre de membres du cluster.
- Finalement, une troisième stratégie repose sur la formulation d'un problème d'optimisation qui prend en compte à la fois les contraintes de maintien à poste, la contrainte sur la probabilité maximale ainsi que la minimisation de la consommation :

$$\begin{aligned} & \min w_1 \|\Delta V\| + w_2 \sum_{i \neq j} \lambda_j \left( \frac{\Delta a_{ij}(\Delta V)}{\Delta a_{ij}^*} - 1 \right) \\ & \text{sous} \\ & \mathcal{P}_{max}(\Delta V) - \mathcal{P}_m^{\text{seuil}} \leq 0, \end{aligned} \tag{2.89}$$

où  $w_1$  et  $w_2$  sont des poids fixés par les utilisateurs et permettant de privilégier l'un ou l'autre des objectifs.  $\lambda_j = 1$  si  $\Delta a_{ij} > \Delta a_{ij}^*$  et  $\lambda_j = 0$  sinon. En résolvant ce problème, Gurfil et Denenberg observent pour la plupart des cas, un coût environ cinq fois supérieur à une manoeuvre d'évitement d'un seul satellite. Dans les cas examinés, le coût est comparable à celui de la deuxième alternative. Cependant, pour certains cas, l'amplitude de la manoeuvre de la troisième alternative est plus faible et n'est que légèrement supérieure à celle de la



première alternative. La troisième alternative est considérée comme plus sûre, car la différence moyenne entre les demi-grand axes est prise en compte dès la première manœuvre. Par contre, comme il s'agit d'un problème d'optimisation où la fonction objectif est composée de plusieurs critères pondérés et antagonistes, son efficacité dépend fortement des paramètres fixés par l'utilisateur.

La conclusion générale de cette étude est qu'il est recommandé de considérer et de comparer les trois options lors de la planification d'une manœuvre d'évitement de collision.

## 2.7 Méthodes fondées sur l'utilisation de l'algèbre différentielle

Nous regroupons dans cette section quelques travaux qui ont en commun l'utilisation de l'algèbre de Taylor pour le calcul de manœuvre d'évitement de collision comme les références [80] et [10]. Les différences entre ces travaux résident principalement dans la formulation du problème d'optimisation à résoudre et dans les outils de résolution utilisés. Dans le premier cas, le problème d'évitement de collision est formulé comme un problème multi-objectif sur lequel sont appliquées des techniques de résolution fondées sur les algorithmes génétiques. Dans le second cas, le calcul de la manœuvre est formalisé comme une séquence de problèmes d'optimisation convexe pour la résolution desquels, les algorithmes de point intérieur usuels sont utilisés.

### 2.7.1 Approche par optimisation multi-objectif

En particulier, l'article [80] s'intéresse à la recherche d'une manœuvre optimale au sens de la solution d'un problème d'optimisation multi-objectif  $f(\Delta V) = [f_1(\Delta V, \dots, f_m(\Delta V)]$ . Ce vecteur d'objectifs comprend une fonction de la consommation (mesurée par la norme du vecteur  $\Delta V$ ), une fonction de la probabilité de collision calculée comme  $\mathcal{P}_c^{2D}$ , une fonction de la distance relative entre le satellite et le débris dans une fenêtre de temps donnée après la manœuvre. Ce dernier objectif prend en compte le fait que plusieurs conjonctions avec le même débris peuvent se produire sur un intervalle de temps d'environ une semaine suite à une manœuvre. Cela est particulièrement vrai pour le régime GEO, où une conjonction entre une paire d'objets peut se produire environ toutes les 12 heures pendant quelques jours. Ainsi, une manœuvre peut en principe réduire la probabilité de collision pour un événement, mais l'augmenter considérablement pour d'autres. Finalement, une fonction objectif est ajoutée pour gérer les contraintes de mission.

Pour évaluer ces différentes fonctions constituant la fonction multi-objectif, l'état initial des objets est propagé avec un algorithme spécifique (non disponible en open-source) qui combine la méthode numérique SGP4/SDP4 avec l'algorithmique de l'algèbre de Taylor dans le logiciel COSY. Ensuite, un optimiseur Multi-Objective Particle Swarm Optimizer (MOPSO) est utilisé pour calculer l'ensemble des solutions Pareto-optimales pour la fonction multi-objectif  $f$ .

Nous allons d'abord résumer l'algorithme d'identification des conjonctions sur une fenêtre de temps qui est en lien direct avec l'algèbre de Taylor utilisée.

### L'identification des conjonctions

Cette étape est abordée comme un problème d'optimisation globale, à l'aide du logiciel COSY-GO. Cet optimiseur est basé sur des modèles de Taylor (TM), qui sont des approximations polynomiales rigoureuses, formées par un polynôme et une borne d'erreur. Une algèbre peut être construite pour ce type d'objets mathématiques. Par exemple, l'addition, la multiplication, la composition, ou d'autres opérations portant sur des fonctions mathématiques usuelles peuvent être généralisées pour définir des opérations portant sur des TM, tout en gardant une borne sur l'erreur rigoureuse entre l'approximation polynomiale retournée et l'expression mathématique exacte.

Plus précisément, un couple  $(P, I)$ , formé par un polynôme de degré total  $n$  et un intervalle  $I$  est une approximation polynomiale rigoureuse pour une fonction multi-variée  $f$ , sur un domaine  $D$ , si et seulement si

$$\forall x \in D, f(x) - P(x) \in I. \quad (2.90)$$

Les TMs sont construits à partir des approximations de Taylor, autour d'un point  $x_0 \in D$  et nécessitent que la fonction approchée soit  $(n + 1)$  fois dérivable sur le domaine  $D$ .

En particulier, étant donnée une équation dynamique non-linéaire,  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$  et des conditions initiales  $x(t_0) = x_0$ , on peut approcher à l'aide de cette algèbre de TMs, l'état  $x(t) = (r(t), v(t))$ , à un instant  $t$ , par un vecteur de polynômes  $P_i(x_0, t, t_0)$  et des bornes d'intervalles  $I_i$  (pour  $i$  allant de 1 à 6, par exemple, pour la dynamique d'un objet spatial). Si les conditions initiales sont fixées, les polynômes obtenus sont univariés, dépendant seulement du temps  $t$ . Alors, l'identification de conjonctions potentielles est faite en résolvant le problème d'optimisation globale :

$$t^* = \arg \min_{t \in [t_0, t_f]}, \|r_p(t) - r_s(t)\|_2, \quad (2.91)$$

où  $r_p$  et  $r_s$  dénotent la position moyenne du primaire et respectivement du secondaire.

Ce problème est résolu par COSY-GO en isolant les zéros de la dérivée par rapport au temps. Notons qu'un algorithme spécifique a été implanté pour une propagation des TMs en passant par les éléments orbitaux moyens [12].

## Le calcul de la probabilité de collision

Une fois les instants de conjonction potentielle identifiés, le calcul de la probabilité de collision est fait dans le cadre et sous les hypothèses classiques des rencontres rapides, et uniquement pour la conjonction se produisant à la TCA (en négligeant les autres probabilités).

Il est à noter que la covariance est propagée en éléments képlériens, en utilisant une linéarisation de la dynamique par rapport aux conditions initiales incertaines. La dynamique est d'abord approchée par des TMs, dans ce cadre plus fin/compliqué de l'algèbre différentielle, en passant par le même algorithme intermédiaire de propagation en éléments orbitaux moyens. Ensuite, la jacobienne est extraite à partir des dérivées obtenues à l'aide des TMs. Il semble donc que cette matrice est une linéarisation d'une dynamique plus compliquée que celle de Kepler classique. Par exemple, plusieurs perturbations comme les effets séculaires, les perturbations luni-solaires, etc. semblent prises en compte dans la propagation en éléments orbitaux, avant de revenir aux éléments képlériens. Outre cette propagation fine, il n'y a pas d'autre élément nouveau dans l'évaluation de la probabilité de collision qui est simplement faite à l'aide de la formule d'Alfano [2].

## L'optimisation multi-objectif

Comme nous l'avons indiqué plus haut, le problème d'optimisation utilisé pour le calcul de la manœuvre est un problème d'optimisation multi-critère sur lequel un solveur MOPSO (optimisation multi-objectif par essais particuliers) [68] est mis en œuvre. L'idée est de générer des particules positionnées aléatoirement dans l'espace de recherche du problème et de les faire converger progressivement vers un minimum global avec un algorithme de type méta-heuristique itératif, grâce à des règles de déplacement très simples (dans l'espace des solutions).

En pratique, l'espace de recherche du problème est de dimension 4 : le temps de manœuvre, le module de l'incrément de vitesse  $\Delta V$ , et sa direction, exprimée en fonction de deux angles (le vecteur de manœuvre  $\Delta V$  est défini dans le référentiel RTN). Ces quatre variables de décision sont ensuite utilisées pour définir un objectif numérique correspondant aux critères ci-dessous :

- La minimisation de la consommation de carburant est modélisée par la fonction objectif

$$f_1(\Delta V) = \frac{\Delta V}{\Delta V_{max}},$$

ou  $\Delta V_{max}$  correspond à la quantité maximale de carburant pouvant être allouée à la manœuvre.

- La maximisation de la distance de séparation entre les deux objets par la fonction

$$f_2(\Delta V) = \frac{1}{2} \frac{R - \min d(t)}{R} + \frac{1}{2} \frac{R - \bar{d}}{R},$$

est utilisée, où  $\min(d)$  est la distance d'approche la plus proche après la manœuvre (DCA), et  $\bar{d}$  est la distance moyenne de tous les minima locaux de distance sous le seuil donné par le rayon de l'objet combiné  $R$ .

- La minimisation du risque de collision par la fonction

$$f_3(\Delta V) = \log_{10}(P_c + 1).$$

- Finalement, la gestion de contraintes de mission par une fonction objectif  $f_4$ . Pour éviter une conception *ad-hoc* de cette fonction pour chaque mission, une définition très simplifiée qui ne prend en compte que les temps où ces contraintes sont actives est utilisée :

$$f_4(\Delta V) = \frac{T_{cycle} - t_{in}}{T_{cycle}},$$

où  $T_{cycle}$  est le temps souhaité pour lequel la contrainte de mission n'est pas violée et  $t_{in}$  est le temps réel de violation. De cette manière, l'utilisateur doit vérifier par lui même quand les contraintes de mission sont violées.

Pour résumer, le calcul de ces objectifs implique, pour chaque instance du vecteur de décision de dimension 4 (c.-à-d. le temps de manœuvre, le module de la vitesse  $\Delta V$ , et sa direction), les étapes suivantes :

1. Mettre à jour la position/vitesse moyenne de la cible en utilisant l'état après la mise en œuvre de la manœuvre comme condition initiale dans la propagation avec l'algèbre différentielle des TMs ;
2. Effectuer une identification des conjonctions à partir des positions/vitesses moyennes calculées précédemment, sur une fenêtre de 7 jours suite à la manœuvre, en utilisant l'optimiseur global COSY-GO. Cela permet de trouver le minimum global et de calculer la moyenne de tous les minima inférieurs à  $R$  et ainsi d'évaluer  $f_2$  ;
3. Évaluer  $f_3$  en calculant la probabilité de collision avec la méthode d'Alfano, pour le minimum global, si la DCA est inférieure à  $R^1$  ;
4. Trouver la durée pendant laquelle les contraintes de mission sont violées, en effectuant la propagation de l'orbite. Cela donne des inégalités temporelles spécifiques pour chaque mission.

Le calcul des objectifs (c'est à dire les étapes ci-dessus) est nécessaire pour chaque particule et à chaque itération de l'algorithme MOPSO. En pratique les auteurs ont utilisé 50 particules et 20 itérations, ce qui prend environ 2h de calcul sur une station classique. Comme pour tout solveur de ce type, la convergence n'est pas garantie, et donc l'ajustement des paramètres d'entrée est très important.

## 2.7.2 Approche par formulation convexe

Dans l'article [10], l'algèbre des modèles de Taylor est également utilisée mais avec des méthodes de résolution très différentes de celles utilisées à la section précédente. Il s'agit d'un évitement de collision pour une rencontre rapide entre deux objets (primaire  $p$  et secondaire  $s$ ) qui peut être réalisé à l'aide de plusieurs poussées impulsives ou plages de poussées électriques.

---

1. Ce choix est discutable, car une probabilité de collision peut-être élevée même si la DCA n'est pas inférieure à  $R$ .

## Notations et définitions préliminaires

La cinématique et la dynamique de la rencontre sont exactement définies comme pour l'article [23] et nous rappelons la définition du B-plane telle qu'elle est donnée à la Définition 7 (cf. également la Figure 2.6). Le repère local de rencontre  $\tilde{\mathcal{R}}_B$  est défini de la manière suivante :

- Origine : position moyenne du centre de gravité de l'objet secondaire ;
- Axe  $\vec{u}_{y_B} = \frac{-\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|}$  : orienté selon l'opposé de la vitesse relative  $\vec{v}_r(t) = \vec{v}_s(t) - \vec{v}_p(t)$

Les deux autres axes sont perpendiculaires à la vitesse relative. Le plan  $\Pi_B$  contenant l'origine et qui est engendré par ces axes est appelé plan de rencontre.

- Axe  $\vec{u}_{x_B} = \frac{\vec{v}_s \times \vec{v}_p}{\|\vec{v}_s \times \vec{v}_p\|}$  ;
- Axe  $\vec{u}_{z_B} = \vec{u}_{x_B} \times \vec{u}_{y_B}$ .

La matrice de rotation de la base inertielle vers la base  $\mathcal{B}_B$  et la matrice de projection suivant l'axe  $\vec{u}_{y_B}$  sont alors respectivement données par :

$$R_{3D} = [ \vec{u}_{x_B} \quad \vec{u}_{y_B} \quad \vec{u}_{z_B} ]^T, \quad R_{2D} = [ \vec{u}_{x_B} \quad \vec{u}_{z_B} ]^T. \quad (2.92)$$

En notant  $\Sigma_{r_r}$  la covariance de la position relative (somme de la covariance en position de l'objet primaire et de la covariance en position de l'objet secondaire) exprimée dans le repère inertiel, on obtient sa projection dans le plan de rencontre comme :

$$\Sigma_{2D} = R_{2D} \Sigma_{r_r} R_{2D}^T. \quad (2.93)$$

L'auteur propose alors, outre la miss distance  $d_M$ , différentes métriques possibles pour définir les manœuvres d'évitement.

- La distance de Mahalanobis :

$$d_{\text{Mah}} = \sqrt{r_r(t_{\text{TCA}})^T (\Sigma_{r_r})^{-1} r_r(t_{\text{TCA}})}. \quad (2.94)$$

- Une approximation de la probabilité de collision 2D [7] :

$$\mathcal{P}_c^{2D} \simeq \frac{R^2}{2(\det(\Sigma_{2D}))^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (d_{\text{Mah}})^2 \right]. \quad (2.95)$$

- La probabilité de collision maximale [7] :

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = \frac{R^2}{(d_{\text{Mah}})^2 (\det(\Sigma_{2D}))^{1/2} e}. \quad (2.96)$$

Les formulations (2.94), (2.95) et (2.96) montrent clairement qu'imposer une contrainte sur la valeur du risque minimal revient à travailler avec une contrainte de borne inférieure sur la miss distance.

## Effet des manœuvres sur les développements de Taylor des indicateurs

Une manœuvre effectuée avant la date de plus proche passage  $t_{\text{TCA}}$  va modifier la trajectoire en position et vitesse du primaire ainsi que la date de plus proche passage. Notons  $(\delta t, \delta r_p, \delta v_p)$  les perturbations respectives induites par une ou plusieurs manœuvres sur le vecteur de position, de vitesse du primaire et sur la date  $t_{\text{TCA}}$ . Les effets de ces perturbations sur les trajectoires primaires et

secondaires sont alors exprimés à l'aide de développements de Taylor d'ordre arbitraire en utilisant les outils d'algèbre différentielle tels qu'ils ont été présentés dans la référence [11].

$$\begin{aligned}
r_p &= \mathcal{T}_{r_p}(\delta t, \delta r_p, \delta v_p), \\
v_p &= \mathcal{T}_{v_p}(\delta t, \delta r_p, \delta v_p), \\
r_s &= \mathcal{T}_{r_s}(\delta t), \\
v_s &= \mathcal{T}_{v_s}(\delta t).
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Cela se traduit en développements de Taylor de la trajectoire relative :

$$\begin{aligned}
r_r &= \mathcal{T}_{r_r}(\delta t, \delta r_p, \delta v_p), \\
v_r &= \mathcal{T}_{v_r}(\delta t, \delta r_p, \delta v_p).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

En utilisant la condition de plus proche rencontre  $r_r^T v_r = 0$ , il est possible d'obtenir par inversion le développement de Taylor de la perturbation sur la date  $t_{\text{TCA}}$  :

$$\delta t_{\text{TCA}} = \mathcal{T}_{\Delta t_{\text{TCA}}}(\delta r_p, \delta v_p). \tag{2.99}$$

En introduisant (2.99) dans les Equations (2.97), on obtient :

$$\begin{aligned}
r_p(t_{\text{TCA}}) &= \mathcal{T}_{r_p, \text{TCA}}(\delta r_p, \delta v_p), \\
v_p(t_{\text{TCA}}) &= \mathcal{T}_{v_p, \text{TCA}}(\delta r_p, \delta v_p), \\
r_s(t_{\text{TCA}}) &= \mathcal{T}_{r_s, \text{TCA}}(\delta r_p, \delta v_p), \\
v_s(t_{\text{TCA}}) &= \mathcal{T}_{v_s, \text{TCA}}(\delta r_p, \delta v_p).
\end{aligned} \tag{2.100}$$

La matrice de projection  $R_{2D}$  est également développée suivant :

$$R_{2D} = \mathcal{T}_{R_{2D}}(\delta r_p, \delta v_p), \tag{2.101}$$

permettant d'obtenir les développements de Taylor des différents critères d'évitement en fonction des perturbations  $(\delta r_p, \delta v_p)$  :

$$\begin{aligned}
d_M &= \mathcal{T}_{r_r, \text{TCA}}(\delta r_p, \delta v_p), \\
d_{\text{Mah}}^2(t_{\text{TCA}}) &= \mathcal{T}_{d_{\text{Mah}, \text{TCA}}^2}(\delta r_p, \delta v_p), \\
\mathcal{P}_c^{2D} &= \mathcal{T}_{\mathcal{P}_c}(\delta r_p, \delta v_p) \\
\mathcal{P}_{\text{max}} &= \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\text{max}}}(\delta r_p, \delta v_p).
\end{aligned} \tag{2.102}$$

### Remarque 13.

*La dépendance vis-à-vis des perturbations  $(\delta r_p, \delta v_p)$  des développements de (2.102) a pour origine leur dépendance vis-à-vis de la matrice de covariance  $\Sigma_{2D}$  qui dépend elle-même de la matrice de rotation  $R_{2D}$  qui est donnée par l'Equation (2.101). Par contre, la matrice de covariance extraite du bulletin d'alerte est supposée n'être pas affectée par les manœuvres.*

### Formulation non linéaire non convexe directe

Dans un premier temps, R. Armellin se propose de poser le problème général d'optimisation non linéaire permettant le calcul des manœuvres d'évitement en consommation minimale et exprimé dans le cas général à partir des formulations des développements de Taylor (2.102) des différents indicateurs utilisés pour générer les contraintes du problème. A partir d'un pas de discrétisation fixé comme  $\Delta t$ , une grille de  $N$  dates de poussée est construite,  $t_0, \dots, t_{N-1}$  avec  $r_r(t_N) = r_r(t_{\text{TCA}})$  et  $v_r(t_N) = v_r(t_{\text{TCA}})$ . On note alors  $\delta r_{p_i}^-$  et  $\delta v_{p_i}^-$  les déviations des positions et vitesses du primaire

à la date  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , avant l'application de la manœuvre  $\Delta V_i$  et  $\delta r_{p_i}^+$  et  $\delta v_{p_i}^+$  les positions et vitesses relatives à la date  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, N_1$ , après l'application de la manœuvre  $\Delta V_i$ . On a donc (cf. Figure 2.9) :

$$\delta r_{p_i}^+ = \delta r_{p_i}^-, \quad \delta v_{p_i}^+ = \delta v_{p_i}^- + \Delta V_i. \quad (2.103)$$

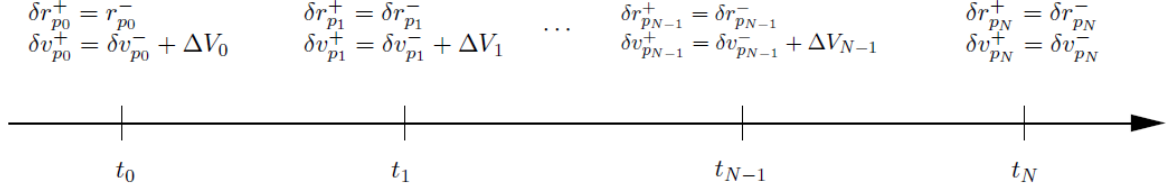


FIGURE 2.9 – Application des manœuvres et propagation de l'état du primaire.

De plus, la propagation des perturbations entre les instants de poussée se calcule à l'aide des développements de Taylor :

$$\begin{aligned} \delta r_{p_i}^- &= \mathcal{T}_{\delta r_{p_i}^-}(\delta r_{p_{i-1}}^+, \delta v_{p_{i-1}}^+), \\ \delta v_{p_i}^- &= \mathcal{T}_{\delta v_{p_i}^-}(\delta r_{p_{i-1}}^+, \delta v_{p_{i-1}}^+). \end{aligned} \quad (2.104)$$

A l'aide des Equations (2.103) et (2.104), il est ainsi possible d'obtenir l'expression des perturbations finales  $\delta r_p$  et  $\delta v_p$  en fonction du vecteur des variables de décision  $x = [ \Delta V_0^T, \dots, \Delta V_{N-1}^T ]^T \in \mathbb{R}^{3N}$  et donc d'en déduire l'expression des critères (2.102) en fonction du vecteur  $x$ . Le problème d'évitement de collision multi-impulsionnel peut donc être formulé comme le problème d'optimisation non linéaire suivant :

**Problème 7** (Problème de PNL).

En définissant la matrice  $\Upsilon_i = [ \mathbf{0}_{3,3(i-1)} \quad I_3 \quad \mathbf{0}_{3,3(N-i)} ]$ , le problème d'évitement de collision multi-manœuvre peut se reformuler comme le problème d'optimisation non linéaire non convexe :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^{3N}} & \sum_{i=0}^{N-1} \|\Upsilon_i x\|_2 \\ \text{sous} & \quad x \preceq \Delta \bar{v} \\ & \mathcal{P}_c^{2D}(x) \leq \bar{\mathcal{P}}_c, \\ & \text{ou} \quad \mathcal{P}_{max}(x) \leq \bar{\mathcal{P}}_{max}, \\ & \text{ou} \quad d_M(x) \geq \underline{d}_M \\ & \text{ou} \quad d_{Mah}(x) \geq \underline{d}_{Mah} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Le Problème 7 est un problème d'optimisation non linéaire et non convexe pour lequel l'auteur applique l'algorithme SQP de la fonction Matlab® `fmincon`. L'algorithme associé reposant sur la résolution du problème d'optimisation 7 est maintenant brièvement décrit

---

**Algorithme 1** FORMULATION PNL
 

---

**Entrée:** Données issues du bulletin CDM : rayon de l'objet combiné  $R$ , positions et vitesses du primaire et du secondaire en  $t_{\text{TCA}}$ ,  $r_p(t_{\text{TCA}})$ ,  $r_s(t_{\text{TCA}})$ ,  $v_p(t_{\text{TCA}})$ ,  $v_s(t_{\text{TCA}})$ , matrices de covariance des positions du primaire et du secondaire à la date  $t_{\text{TCA}}$ ,  $\Sigma_{r_p}(t_{\text{TCA}})$ ,  $\Sigma_{r_s}(t_{\text{TCA}})$ .

**Sortie:** Vecteur optimal  $x^*$  minimiseur du Problème (2.105), valeur optimale de la fonction critère du Problème (2.105).

---

▷ *Initialisation*

1: Choisir une date initiale  $t_0$  et un intervalle de temps  $\Delta t$ ; choisir un point initial  $x_0$ ; choisir des bornes  $\bar{P}_c$  ou  $\bar{P}_{\max}$  ou  $\underline{d}$  ou  $\underline{d}_{\text{Mah}}$ ; choisir le nombre de manœuvres  $N$ ; choisir la borne  $\Delta\bar{v}$ ;

▷ *Etape de rétropropagation des états du primaire et du secondaire*

2: Faire une rétropropagation des trajectoires à partir de  $t_{\text{TCA}}$  jusqu'à la date  $t_0$  et sauvegarder  $r_p(t_0)$ ,  $r_s(t_0)$ ,  $v_p(t_0)$ ,  $v_s(t_0)$ .

3: Définir la grille temporelle de pas  $\Delta t$  sur l'intervalle  $(t_0, t_0 + N\Delta t)$ .

▷ *Propagation en avant par les développements de Taylor et les outils d'algèbre différentielle*

4: Construire les fonctions définies en (2.104).

▷ *Résolution du problème d'optimisation non linéaire*

5: Résoudre le problème d'optimisation non linéaire (2.105).

---

**Formulation convexe du problème d'évitement**

Du fait de la difficulté pour obtenir une solution du problème d'optimisation (2.105) dans un temps raisonnable (et une solution optimale locale tout simplement), l'auteur propose une formulation convexe alternative qui consiste en une relaxation du problème originale s'effectuant en trois étapes : convexification du critère d'optimisation, linéarisation des dynamiques et linéarisation des contraintes d'évitement (seule la distance de Mahalanobis est traitée explicitement).

**Convexification du critère.** Cette dénomination est un peu abusive dans le sens où le critère du Problème (2.105) est naturellement convexe puisqu'il consiste en une somme de normes. Toutefois, la fonction critère n'est pas une fonction différentiable sur tout  $\mathbb{R}^{3N}$  et on peut penser que l'auteur a souhaité contourner ce problème en introduisant les amplitudes des manœuvres comme variables additionnelles dans le problème. En notant  $\Delta v_i$ , ces variables additionnelles, le vecteur des variables de décision est étendu comme  $x = [ \Delta V_0^T, \dots, \Delta V_{N-1}^T, \Delta v_0, \dots, \Delta v_{N-1} ]^T \in \mathbb{R}^{4N}$ . Le critère d'optimisation devient alors :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Delta v_i = [ 0_{1 \times 3N} \quad 1 \quad \dots \quad 1 ] x = c^T x \quad (2.106)$$

et les contraintes suivantes sont ajoutées au problème d'optimisation :

$$\|\Delta V_i\|_2 \leq \Delta v_i \leq \Delta\bar{v}, \quad \forall i = 0, \dots, N-1. \quad (2.107)$$

**Linéarisation des dynamiques.** La deuxième étape de la convexification du problème initial consiste à effectuer une linéarisation de la dynamique par rapport à une solution de référence donnée à une itération précédente. Cette itération, caractérisée par l'indice  $j$ , est appelée *itération majeure*. On se donne donc une solution  $x^{j-1}$  obtenue à l'aide d'une trajectoire de référence (qui est prise comme la trajectoire ballistique à l'itération majeure initiale) qui est utilisée pour calculer une linéarisation autour de la solution  $x^{j-1}$  donnée par :

$$\begin{bmatrix} \delta r_{p_{i+1}}^- \\ \delta v_{p_{i+1}}^- \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} A_{\delta r, i} & A_{\delta v, i} \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} \delta r_{p_i}^+ \\ \delta v_{p_i}^+ \end{bmatrix}^j = A_i^j \begin{bmatrix} \delta r_{p_i}^+(\Delta V_i) \\ \delta v_{p_i}^+(\Delta V_i) \end{bmatrix}^j. \quad (2.108)$$



En reprenant l'Equation (2.103) avec  $\delta r_{p_0}^+ = 0$  et  $\delta v_{p_0}^+ = \Delta V_0$ , le déroulé de la récurrence permet d'obtenir les déviations en position et vitesse du primaire à l'étape  $N$  et pour l'itération  $j$  comme une fonction linéaire des variables de décision :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta r_N^- \\ \delta v_N^- \end{bmatrix}^j &= \begin{bmatrix} A_{N-1}A_{N-2}\cdots A_{\delta v,0}, & A_{N-1}A_{N-2}\cdots A_{\delta v,1}, & \cdots, & A_{\delta v,N-1}, & 0_{6 \times N} \end{bmatrix}^j (x^j - x^{j-1}) \\ &= \mathbb{A}^j (x^j - x^{j-1}). \end{aligned} \quad (2.109)$$

De manière similaire, la nouvelle date de plus proche distance est mise à jour à l'itération  $j$  à l'aide de l'équation :

$$t_{TCA}^j = t_{TCA}^{j-1} + \mathbb{B}^j \mathbb{A}^j (x^j - x^{j-1}) = \mathbb{B}^j \mathbb{A}^j x^j + (t_{TCA}^{j-1} - \mathbb{B}^j \mathbb{A}^j x^{j-1}), \quad (2.110)$$

où  $\mathbb{B}^j$  est la partie linéaire de la relation (2.99). On en déduit la position relative dans le B-plane après manœuvre à la TCA et à l'itération  $j$  comme :

$$r_r^j(t_{TCA}^j) = r_r^{j-1}(t_{TCA}^j) + \mathbb{C}^j \mathbb{A}^j (x^j - x^{j-1}) = \mathbb{C}^j \mathbb{A}^j x^j + (d_M^{j-1} - \mathbb{C}^j \mathbb{A}^j x^{j-1}), \quad (2.111)$$

où  $\mathbb{C}^j$  est la partie linéaire de la relation (2.102) à la  $j$ -ième itération.

**Linéarisation du carré de la distance de Mahalanobis.** Cette linéarisation est traitée de manière itérative par projection et linéarisation, constituant *une itération mineure* interne aux itérations majeures dans lesquelles celle-ci est imbriquée et indicée par  $k$ . Ainsi, si l'on dispose d'une solution  $x^{j,k-1}$  de la  $j$ -ième itération majeure et de la  $(k-1)$ -ième itération mineure, il est possible d'en déduire la miss distance à la TCA dans le plan de rencontre  $d_M^{j,k-1}$  correspondante et le vecteur des positions relatives entre le primaire et le secondaire exprimé dans le plan de rencontre  $r_r^{j,k-1}(t_{TCA}^j)$ .

- Phase de projection sur l'ellipse  $z^T(\Sigma_{2D}^j)^{-1}z = \underline{d}_{Mah}^2$  :

$$\begin{aligned} \min_{z \in \mathbb{R}^2} & \|r_r^{j,k-1}(t_{TCA}^{new}) - z\|_2 \\ \text{sous} & z^T(\Sigma_{2D}^j)^{-1}z \leq \underline{d}_{Mah}^2 \end{aligned} \quad (2.112)$$

Le Problème (2.112) est certes un problème d'optimisation convexe comme l'indique l'auteur dans son article mais outre le fait que la référence indiquée par celui-ci pour les détails de sa résolution n'est pas correcte, l'analyse de la littérature sur le sujet indique clairement que ce problème constitue toujours un sujet de recherche encore très actuel et très actif, en particulier si l'on souhaite utiliser des algorithmes rapides et stables numériquement [70], [42], [36], [66]. Après un contact direct avec l'auteur, celui-ci a confirmé avoir utilisé une routine de MOSEK© fondée sur l'optimisation convexe par commodité et nous a indiqué la référence [58] afin de corriger la référence erronée, relative aux algorithmes de calcul de la distance d'un point à une ellipse.

**Remarque 14.**

Pour l'étape majeure initiale  $j = 1$  et afin d'initialiser l'étape mineure, l'auteur pose  $r_r^{1,0}(t_{TCA}^1) = r_r^0(t_{TCA}) = r_r(t_{TCA})$  qui sera très probablement un point intérieur du domaine ellipsoïdal  $z^T(\Sigma_{2D}^1)^{-1}z \leq \underline{d}_{Mah}^2$  (c'est le cas dans l'exemple traité dans l'article [10]). De fait, la solution du Problème de projection (2.112) est alors  $z^* = 0$ . Il faut donc résoudre le Problème (2.112) avec une contrainte égalité afin de calculer le point le plus proche du point  $r_r(t_{TCA})$  appartenant à l'ellipse  $z^T(\Sigma_{2D}^1)^{-1}z = \underline{d}_{Mah}^2$ .

- Phase d'optimisation convexe sur le problème linéarisé : une fois que le point  $z_k$ , qui est le point projeté de  $r_r^{j,k-1}(t_{\text{TCA}}^j)$  sur l'ellipse  $z^T(\Sigma_{2D}^j)^{-1}z = d_{\text{Mah}}^2$ , est calculé par résolution du Problème (2.112), la contrainte sur la distance de Mahalanobis est linéarisée en imposant que  $r_r^{j,k}(t_{\text{TCA}}^j)$  appartienne au demi plan défini par :

$$\nabla d_{\text{Mah}}^{2j}(z^k) \left( r_r^{j,k}(t_{\text{TCA}}^j) - z^k \right) \geq 0. \quad (2.113)$$

En substituant l'Expression (2.111) dans cette dernière inégalité, il est possible d'écrire le problème d'optimisation constituant la partie principale de l'itération majeure (avec  $r_r^{j,0}(t_{\text{TCA}}^j) = r_r^{j-1}(t_{\text{TCA}}^{j-1})$ ) :

$$\begin{aligned} \min_{x^{j,k} \in \mathbb{R}^{4N}} \quad & c^T x^{j,k} \\ \text{sous} \quad & \left\| \begin{bmatrix} \Upsilon_i & 0_{3 \times N} \end{bmatrix} x \right\|_2 \leq \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3N} & e_{i+1}^T \end{bmatrix} x, \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \\ & 0 \leq \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3N} & e_{i+1}^T \end{bmatrix} x \leq \Delta \bar{v} \\ & -\nabla d_{\text{Mah}}^{2j}(z^k) \mathbb{C}^j \mathbb{A}^j x^{j,k} \leq \nabla d_{\text{Mah}}^{2j}(z^k) (r_r^{j,k-1}(t_{\text{TCA}}^j) - z_k - \mathbb{C}^j \mathbb{A}^j x^{j,k-1}). \end{aligned} \quad (2.114)$$

### Un algorithme par optimisations convexes itératives

L'ensemble de la procédure proposée par l'auteur est alors résumée dans un algorithme global que nous donnons ci-dessous.

---

**Algorithme 2** RELAXATIONS CONVEXES SUCCESSIVES

---

**Entrée:** Données issues du bulletin CDM : rayon de l'objet combiné  $R$ , positions et vitesses du primaire et du secondaire en  $t_{\text{TCA}}$ ,  $r_p(t_{\text{TCA}})$ ,  $r_s(t_{\text{TCA}})$ ,  $v_p(t_{\text{TCA}})$ ,  $v_s(t_{\text{TCA}})$ , matrices de covariance des positions du primaire et du secondaire à la date  $t_{\text{TCA}}$ ,  $\Sigma_{r_p}(t_{\text{TCA}})$ ,  $\Sigma_{r_s}(t_{\text{TCA}})$ .

**Sortie:** Vecteur  $x^*$  des poussées et des amplitudes de poussée.

---

▷ *Initialisation*

- 1: Choisir une date initiale  $t_0$  et un intervalle de temps  $\Delta t$ ; choisir la borne  $\Delta \bar{v}_i$  pour chaque impulsion; choisir le nombre de manœuvres  $N$ ; choisir des bornes  $\bar{\mathcal{P}}_c$  ou  $\bar{\mathcal{P}}_{\max}$  ou  $\underline{d}$  ou  $\underline{d}_{\text{Mah}}$ ; choisir des tolérances  $\text{tol}_M$  et  $\text{tol}_m$  pour respectivement les itérations majeures et mineures;
- 2: **si**  $\bar{\mathcal{P}}_c$  est choisi **alors**
- 3:   Calculer  $\Sigma_{2D}$  et  $\underline{d}_{\text{Mah}}^2$  par (2.95);
- 4: **sinon si**  $\bar{\mathcal{P}}_{\max}$  est choisi **alors**
- 5:   Calculer  $\Sigma_{2D}$  et  $\underline{d}_{\text{Mah}}^2$  par (2.96);
- 6: **sinon**
- 7:   Calculer  $\Sigma_{2D} \leftarrow I_2$  et  $\underline{d}_{\text{Mah}} \leftarrow \underline{d}_M$ ;
- 8: **fin si**
- ▷ *Propagation rétrograde des trajectoires*
- 9: Rétropropager les trajectoires primaires  $r_p$ ,  $v_p$  et secondaires  $r_s$ ,  $v_s$  de la date  $t_{\text{TCA}}$  à la date  $t_0$ ;
- 10: Définir la grille temporelle de pas  $\Delta t$  sur l'intervalle  $(t_0, t_0 + N\Delta t)$ ;
- ▷ *Initialisation des itérations majeures et mineures*
- 11:  $j \leftarrow 0$ ,  $x^0 \leftarrow 0$ ,  $t_{\text{TCA}}^0 \leftarrow t_{\text{TCA}}$ ,  $r_r^{1,0} \leftarrow \pm r_r(t_{\text{TCA}})$ ,  $\Sigma_{2D}^0 = \Sigma_{2D}$ ;
- ▷ *Itération majeure*
- 12: **tant que**  $j = 0$  ou  $\|x^j - x^{j-1}\|_\infty \geq \text{tol}_M$  **faire**
- 13:    $j \leftarrow j + 1$ ;
- ▷ *Propagation linéaire des trajectoires*
- 14: Extraire les manœuvres de  $x^{j-1}$ ;
- 15: Propager de manière linéaire sur l'intervalle  $(t_0, t_0 + N\Delta t)$  les trajectoires primaires et secondaires  $r_p$ ,  $v_p$ ,  $r_s$  et  $v_s$ ;
- 16: **si**  $\bar{\mathcal{P}}_c$  est choisi **alors**
- 17:   Calculer  $\Sigma_{2D}^j$  et  $\underline{d}_{\text{Mah}}^j$  par (2.95);
- 18: **sinon si**  $\bar{\mathcal{P}}_{\max}$  est choisi **alors**
- 19:   Calculer  $\Sigma_{2D}^j$  et  $\underline{d}_{\text{Mah}}^j$  par (2.96);
- 20: **sinon**
- 21:   Calculer  $\Sigma_{2D}^j \leftarrow I_2$  et  $\underline{d}_{\text{Mah}}^j \leftarrow \underline{d}_M$ ;
- 22: **fin si**
- 23: Calculer les matrices  $\mathbb{A}^j$ ,  $\mathbb{B}^j$  et  $\mathbb{C}^j$ ;
- ▷ *Itération mineure*
- 24:  $k \leftarrow 0$  et  $r_r^{j,0} \leftarrow r_r^{j-1}(t_{\text{TCA}}^{j-1})$ ;
- 25: **tant que**  $k = 0$  ou  $\|r_r^{j,k} - r_r^{j,k-1}\|_\infty \geq \text{tol}_m$  **faire**
- 26:    $k \leftarrow k + 1$ ;
- 27:   Résoudre le Problème (2.112) pour calculer  $z^k$ ;
- 28:   Résoudre le Problème (2.114) pour calculer  $x^{j,k}$ ;
- 29:    $t_{\text{TCA}}^{j,k} \leftarrow t_{\text{TCA}}^{j-1} + \mathbb{B}^j \mathbb{A}^j (x^{j,k} - x^{j-1})$ ;
- 30:    $r_r^{j,k} \leftarrow r_r^{j-1}(t_{\text{TCA}}^{j-1}) + \mathbb{C}^j \mathbb{A}^j (x^{j,k} - x^{j-1})$ ;
- 31: **fin tant que**
- 32:  $t_{\text{TCA}}^j \leftarrow t_{\text{TCA}}^{j,k}$ ,  $x^j \leftarrow x^{j,k}$ ,  $r_r^j(t_{\text{TCA}}^j) \leftarrow r_r^{j,k}$ ;
- 33: **fin tant que**

---

**Remarque 15.**

L'actualisation des matrices de covariance des positions, projetées dans le  $B$ -plane et faites aux étapes 17 et 19 de l'algorithme précédent n'est pas explicitement définie dans la référence [10] mais il est raisonnable de supposer que cette propagation est faite de manière linéaire à l'aide des termes

*du premier ordre déduits des développements de Taylor calculés.*

## Chapitre 3

# Evitement de collision dans le cas d'un risque multiple de rencontres rapides

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la planification de manœuvres d'évitement de collision en présence de risques multiples à court terme et indépendants. La notion de risques multiples à court terme et indépendants a été formalisée dans le Chapitre 1. Même dans ce cadre théorique simplifié et restreint, la littérature est très pauvre en résultats complets et clairement présentés. Les deux références de la littérature que nous avons pu identifier ont également une approche qui consiste à définir une fonctionnelle de coût augmentée des contraintes à respecter par pénalisation des termes additionnels. Seule la méthode pour identifier un optimum de cette fonctionnelle diffère. Dans le premier cas, les auteurs font appel à des méthodes d'optimisation sans dérivée alors que dans le second ils se reposent sur des méthodes d'optimisation évolutionnaires. Dans chaque cas, nous avons essayé de clarifier et d'identifier les points importants de la contribution.

### 3.2 Méthode de Duncan

#### 3.2.1 Introduction

La procédure classique d'évitement de risques multiples consiste à construire un plan de manœuvres dont l'objectif premier est de réduire le risque de collision pour l'événement de rencontre qui a été évalué comme ayant la probabilité de collision la plus élevée parmi un ensemble de rencontres identifiées comme potentiellement dangereuses (miss distance en dessous d'un certain seuil) sur un intervalle de temps donné. Le risque résiduel global qui couvre toutes les autres conjonctions répertoriées n'est en général pas pris en compte directement, car les informations sur les trajectoires des débris catalogués ne sont pas facilement disponibles. Par conséquent, un plan de manœuvre donné est validé en filtrant la nouvelle trajectoire proposée pour le primaire à travers tout le processus d'évaluation de conjonctions (qui dépendait du JSpOC quand le papier est paru, maintenant CSpOC), afin que tous les nouveaux événements de conjonction soient identifiés. Cela aboutit à une nouvelle caractérisation des nouvelles conjonctions et à une classification de celles-ci afin que la manœuvre choisie ne génère pas de nouvel événement à haut risque de collision avec le satellite actionné.

Pour éviter cette procédure itérative relativement coûteuse et ces interactions avec un centre d'évaluation de conjonctions, les auteurs des références [47], [48] proposent une métrique qui prend en

compte tous les conjonctions identifiés sur une fenêtre de temps. Cette métrique, appelée probabilité de collision agrégée et présentée dans le premier chapitre est rappelée ici, pour  $N$  évènements de rencontre :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c^A &= 1 - \prod_{i=1}^N (1 - \mathcal{P}_{c_i}^{2D}) \\ &= \sum_{i=1}^N (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} \prod_{1 \leq j \leq k} \mathcal{P}_{c_{i_j}}^{2D},\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $\mathcal{P}_{c_i}^{2D}$  est la probabilité de collision en rencontre rapide pour chaque rencontre individuelle.

### 3.2.2 Définition de la fonction objectif par pénalisation des contraintes

Il est à noter que le fait que la probabilité agrégée soit plus petite qu'un seuil donné,  $\mathcal{P}_c^A \leq P_{\text{seuil}}$  implique directement que  $\mathcal{P}_{c_i}^{2D} \leq P_{\text{seuil}}$  (en utilisant le fait que le produit de  $N$  nombres positifs inférieurs à 1 est inférieur à chacun d'entre eux, par exemple). Imposer cette contrainte globale permet de prendre en compte de manière conservative tous les risques individuels. Comme les auteurs souhaitent utiliser une méthode d'optimisation sans dérivée (dont l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead est un exemple bien connu [81]), la fonction objectif sera formée de la norme du vecteur de poussée comme fonction objectif principale, pénalisée par différentes contraintes pondérées dont celle relative au risque global. La fonction objectif du problème d'optimisation sans contraintes à résoudre est alors donnée par :

$$f(\|\Delta V\|, t_m) = \|\Delta V\| + \alpha_1 (\log_{10} \mathcal{P}_c^A - \log_{10} P_{\text{seuil}}) + \alpha_2 \sum_{j=1}^m (g_j(\Delta V, t_m))_+, \tag{3.2}$$

où  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  sont les poids de pénalisation des solutions violant les contraintes et les fonctions  $g_j$  représentent des fonctions de pénalité statiques définies par :

$$\begin{aligned}g_1(\|\Delta V\|) &= \Delta V_{\min} - \|\Delta V\|, & g_1(\|\Delta V\|) &= \|\Delta V\| - \Delta V_{\max}, \\ g_3(t_m) &= t_{\min} - t_m, & g_4(t_m) &= t_m - t_{\max}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

La notation  $(g_j)_+$  correspond à la définition :

$$(g_j)_+ = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

#### Remarque 16.

*Les variables de décision utilisées dans cet algorithme sont l'amplitude du vecteur de poussée et la date d'application de la manœuvre, qui peut être paramétrée également comme une durée de manœuvre. La direction de poussée n'est donc pas mentionnée mais l'analyse des cas d'applications montre que la poussée est toujours limitée à la direction in-track (produit vectoriel de la direction cross-track et de la direction radiale) dans un repère orbital local lié au satellite actionné.*

Un algorithme d'optimisation sans dérivée (DFO) est alors appliqué à la fonction objectif définie par l'Equation (3.3). Nous décrivons brièvement le principe de cet algorithme dans la section suivante.

### 3.2.3 Principe de l'algorithme DFO

La référence [48] détaille les différentes étapes de l'algorithme d'optimisation sans dérivée utilisé à l'origine des travaux des auteurs. Dans une communication orale présentée dans le workshop SSA Operators ayant eu lieu à Denver en 2016, un historique de l'évolution de l'outil développé par la compagnie SpaceNav indique que cet algorithme a été remplacé par un algorithme du simplexe de Nelder-Mead en 2014 sans plus de précision sur l'implémentation précise de ce dernier. Le premier exemple d'algorithme d'optimisation sans dérivée a été l'algorithme de Nelder-Mead proposé dans [81]. Ces algorithmes ont été ensuite perfectionnés et diversifiés comme il est indiqué dans la référence [90]. Deux classes de méthodes peuvent être identifiées. Les méthodes par recherche directe s'appuient directement sur un nombre fini d'évaluations de la fonction objectif pour déterminer le prochain point à évaluer alors que la seconde classe se fonde sur un modèle de substitution de la fonction  $f$ , moins coûteux à évaluer et plus simple à analyser. Celui-ci est construit à partir de valeurs de la fonction objectif et raffiné itérativement.

Le principe de l'algorithme DFO 3 présenté est, à partir d'un point initial et d'une région de confiance initiale, d'obtenir un nouveau point à chaque itération par minimisation d'un polynôme quadratique sur la région de confiance. Ce point est alors testé pour savoir s'il diminue le critère. La région de confiance est une boule  $\bar{B}(x_k, \Delta_k)$  centrée sur le point courant  $x_k$  et de rayon  $\Delta_k$ . Le modèle de la fonction objectif qui l'approxime localement est un polynôme quadratique obtenu par interpolation de Lagrange à l'aide de points d'évaluation choisis dans la région de confiance. L'algorithme impose de plus que le modèle soit *complètement quadratique*.

**Définition 8.** (*Modèle complètement quadratique*)

Le modèle  $m$  est complètement quadratique s'il vérifie les conditions suivantes par rapport à la fonction coût  $f$  qui est de classe  $\mathcal{C}^2$  :

- 1-  $\|H[f](y) - H[m](y)\| \leq \kappa_{eh}\Delta, \forall y \in \bar{B}(x, \Delta),$
- 2-  $\|\nabla f(y) - \nabla m(y)\| \leq \kappa_{eg}\Delta^2, \forall y \in \bar{B}(x, \Delta),$
- 3-  $\|f(y) - m(y)\| \leq \kappa_{ef}\Delta^3, \forall y \in \bar{B}(x, \Delta),$

où  $\kappa_{eh}, \kappa_{eg}, \kappa_{ef}$  sont des constantes positives. De plus, pour tout  $x \in \bar{B}(x, \Delta)$ , et  $\Delta \in (0, \Delta_{max}]$ , il existe un modèle  $m$  avec une hessienne lipschitzienne continue de constante de Lipschitz bornée par une constante positive.

Une étude de cas pour analyser l'efficacité des manœuvres calculées est menée à partir d'un scénario opérationnel liant 4 objets en orbite LEO. Il s'agit de rencontres entre un primaire et 3 secondaires pouvant intervenir sur une période de 24 H. Seules des informations déterministes (différentes dates  $t_{TCA}$ , miss distances totales et dans les trois directions ( radiale, in track et cross track) sur les rencontres successives sont fournies. En particulier, une analyse de sensibilité sur les paramètres d'initialisation de l'algorithme DFO mais aussi sur le choix des fonctions de pondération de la fonction objectif est également proposée. Les résultats sont évidemment présentés comme étant efficaces et probants. Il est également indiqué dans la présentation orale déjà mentionnée que l'outil logiciel associé a été fourni à la NASA en 2015.

---

**Algorithme 3** DFO

---

**Entrée:** Valeur de la fonction coût  $f(x_k)$ , Rayon initial de la région de confiance, rayon minimal de la région de confiance, centre de la région de confiance initiale, valeurs critiques de  $\rho$ .

**Sortie:**  $x^*$  valeur optimale de la fonction  $f$ .

---

- ▷ *Initialisation*
  - 1: Choisir un point initial  $x_0$ ; choisir une région de confiance initiale; choisir une région de confiance minimale; former le modèle initial;
  - 2:  $k \leftarrow 0$
  - ▷ *Etape critique*
  - 3: Tester si le modèle  $m$  est complètement quadratique
  - 4: **si** le modèle est quadratique **alors**
  - 5:   Garder le modèle courant et continuer
  - 6: **sinon**
  - 7:   Former un nouveau modèle
  - 8: **fin si**
  - ▷ *Calcul du pas*
  - 9: Minimiser le modèle sur la région de confiance pour calculer un point test;
  - 10:  $s_k \leftarrow \text{distance}(x^*, x_k)$ ;
  - ▷ *Acceptation du point test*
  - 11: Calcul de la métrique de performance,  $\rho \leftarrow \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{m(x_k) - m(x_k + s_k)}$ ;
  - 12: **si**  $\rho \geq \eta_1$  ou  $\rho > \eta_0$  et le modèle est complètement quadratique **alors**
  - 13:   Ce point est le nouveau centre et retirer le point le moins géométriquement significatif;
  - 14: **fin si**
  - ▷ *Amélioration du modèle*
  - 15: **si**  $\rho < \eta_1$  et le modèle n'est pas complètement quadratique **alors**
  - 16:   Améliorer le modèle;
  - 17: **fin si**
  - ▷ *Mise à jour du rayon de la région de confiance*
  - 18: **si**  $\rho \geq \eta_1$  **alors**
  - 19:   Multiplier le rayon de la région de confiance par 2
  - 20: **fin si**
  - 21: **si**  $\rho < \eta_1$  et le modèle est complètement quadratique **alors**
  - 22:   Multiplier le rayon de la région de confiance par 0.5
  - 23: **sinon**
  - 24:   Garder le même rayon pour la région de confiance; Retour à l'étape 1
  - 25: **fin si**
-



### 3.3 Méthode de Kim

Les auteurs de [72] proposent une approche fondée sur un algorithme génétique pour trouver une manœuvre optimale d'évitement de plusieurs débris, dans un intervalle de temps relativement court.

L'algorithme génétique utilisé est inspiré par la méta-heuristique de la sélection naturelle et l'applique à une population de solutions potentielles au problème d'optimisation donné. L'évolution commence généralement à partir d'une population d'individus générés aléatoirement et est un processus itératif : à chaque itération, le *fitness* de chaque individu de la population est évalué ; cela correspond généralement à la valeur de la fonction objectif dans le problème d'optimisation en cours de résolution. Les individus les plus aptes sont sélectionnés de manière stochastique dans la population actuelle, et le génome de chaque individu est modifié (recombiné et éventuellement muté au hasard) pour former une nouvelle génération. La nouvelle génération de solutions candidates est ensuite utilisée dans la prochaine itération de l'algorithme. Généralement, l'algorithme se termine lorsqu'un nombre maximal de générations a été produit ou qu'un niveau de *fitness* satisfaisant a été atteint pour la population. La définition de cette fonction de *fitness* est donc essentielle et sera discuté dans la suite. Plusieurs fonctions *fitness* sont utilisées par l'algorithme génétique de [72], en fonction des contraintes imposées :

- Le première fonction est donnée par :

$$F_1 = \sum_{i=1}^m \left( w_1 P_{ci} + w_2 \frac{\|\Delta V\|}{\Delta V_{\max}} + w_3 \frac{\text{SMA}_0}{\text{SMA}} \right),$$

où  $P_{ci}$  représente la probabilité de collision avec le  $i$ -ème objet. Cette probabilité de collision individuelle avec chaque débris est évaluée dans le cadre d'une rencontre rapide, avec la formule d'Alfano. Les rencontres sont supposées être indépendantes. Une autre composante de l'objectif est le ratio de la consommation par rapport au max admissible  $\frac{\|\Delta V\|}{\Delta V_{\max}}$ . Finalement,  $\frac{\text{SMA}_0}{\text{SMA}}$  désigne le rapport entre les demi-grand axe de l'orbite initiale et respectivement celui de l'orbite après manœuvre.

Les coefficients  $w_i$  sont des facteurs de pénalité qui font augmenter la somme  $F_1$  quand les contraintes sont violées. Ils sont choisis en pratique comme par exemple,  $w_1 = 10^2$ ,  $w_2 = 10$ ,  $w_3 = 10^{-2}$ .

- Une fonction qui prend en compte la miss-distance  $d_M$  à la place de la probabilité de collision s'écrit comme :

$$F_2 = \sum_{i=1}^m - \left( d_M + w_2 \frac{\|\Delta V\|}{\Delta V_{\max}} + w_3 \frac{\text{SMA}_0}{\text{SMA}} \right),$$

où les facteurs  $w_2$  et  $w_3$  ont été fixés expérimentalement à  $-2$ .

- Une autre variation peut prendre en compte la valeur de la probabilité de collision par rapport à un seuil donné :

$$F_3 = \sum_{i=1}^m \left( w_1 |\log_{10} P_{ci} - \log_{10} P_{\max}| + w_2 \frac{\|\Delta V\|}{\Delta V_{\max}} \right).$$

- Finalement, dans ce cadre, les poids  $w_i$  peuvent être aussi adaptés, par exemple en prenant  $w_1 = 1$  si la probabilité est plus petite que le seuil, ou  $w_1 = 10$  si cette contrainte n'est pas satisfaite. Ce type de fonction *fitness* dite adaptative semble mieux marcher en pratique et améliorer la convergence de l'algorithme génétique utilisé.

On observe donc que le choix heuristique des paramètres  $w_i$  est assez crucial pour obtenir des résultats satisfaisants par ce type d'algorithme, alors que sa convergence n'est pas garantie. Cela permet quand même d'obtenir quelques résultats expérimentaux intéressants. Notamment, les auteurs observent en testant leur algorithme sur un cas pratique que dans le cadre d'une manoeuvre d'évitement de plusieurs débris, l'approche classique par séparation radiale n'est pas suffisante, et donc pour satisfaire les critères de miss-distance ou probabilité de collision pour chaque conjonction, une manoeuvre tri-directionnelle est nécessaire.

## Chapitre 4

# Evitement de collision multi-manœuvre dans le cas d'un risque multiple de rencontres rapides avec contraintes opérationnelles

### 4.1 Définition fonctionnelle du problème d'évitement

Dans cette introduction, nous définissons le problème d'évitement de collision avec ses contraintes propres, spécifiques aux procédures opérationnelles du CNES, telles qu'elles nous ont été présentées. Ainsi, le problème d'évitement de collision posé comprend un objet primaire noté  $p$  en conjonction avec  $N$  objets secondaires, notés  $s_1, \dots, s_N$ . Les  $N$  conjonctions possibles sont supposées être indépendantes deux à deux et chaque conjonction parmi les  $N$  vérifie l'ensemble des hypothèses (hypothèses 1 à 6) d'une rencontre rapide. Ce cadre permet ainsi de définir  $N$  dates de plus proche rencontre entre le primaire et chaque secondaire, notées  $t_{\text{TCA}}^j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Pour réaliser l'évitement de collision, le primaire est actionné par une ou plusieurs poussées impulsives qui ne sont autorisées que sur des plages de temps  $\Delta_i$  prédéfinies par l'utilisateur avec  $i = 1, \dots, n$ . Dans un premier temps, nous supposons que seule la date centrale  $t^i \in \Delta_i$  est autorisée pour la poussée. Ceci est imposé afin de procéder à l'étalement des poussées impulsives pour retrouver un équivalent en poussées électriques sans avoir à se donner des contraintes individualisées de poussée maximale. D'autre part, on suppose également que sur les plages de poussée ainsi définies, une seule et même direction de poussée dans le sens positif est possible. Cela signifie que si l'on définit le vecteur de poussée à la date  $t^i$  par  $\Delta V_i^T = \Delta v_i \beta_l^T$  où  $\beta_l$  est le vecteur de direction de la poussée, défini comme le  $l$ -ième vecteur de la base canonique, une seule direction  $\beta_l$  pourra être utilisée sur l'ensemble des plages de poussée  $\Delta_i$ , c.-à-d. que l'indice  $l$  est fixé à 1, 2 ou 3 pour tout  $i = 1, \dots, n$  et  $\Delta v_i \geq 0$ . La poussée délivrée à chaque instant sera également contrainte en amplitude par  $\Delta v_i \leq \Delta \bar{v}_i$ .

## 4.2 Formulation du problème d'évitement multi-risque comme un problème d'optimisation linéaire sous contraintes quadratiques non convexes

Pour la formulation des différents problèmes d'évitement que nous allons proposer, nous reprenons les éléments essentiels ainsi que les notations des Sections 2.5 et 2.7.2. Ainsi, le mouvement relatif de chaque objet secondaire sera décrit par une matrice de transition obtenue par une linéarisation de la dynamique képlérienne, comme celles de Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) [37] ou de Yamanaka-Ankersen (YA) [106] autour de l'orbite képlérienne moyenne sans manœuvre de l'objet primaire.

$$x_{r_j}(t|x_{r_j}^0) = \Phi_r^j(t, t_0)x_{r_j}^0, \quad (4.1)$$

où la matrice de transition  $\Phi_r^j$  est partitionnée suivant les blocs

$$\Phi_r^j(t, t_0) := \begin{pmatrix} \Phi_{r_{11}}^j(t, t_0) & \Phi_{r_{12}}^j(t, t_0) \\ \Phi_{r_{21}}^j(t, t_0) & \Phi_{r_{22}}^j(t, t_0) \end{pmatrix}.$$

Si l'on note  $\tilde{x}_{r_j}$  l'état relatif après manœuvre, entre l'objet  $j$  et le primaire, il est possible d'écrire, après  $m$  manœuvres impulsives suivant la direction  $\beta_l$  et d'amplitudes respectives  $\Delta v_i$ , chacune étant appliquée à l'instant  $t^i$  :

$$\tilde{x}_{r_j}(t|t_0) = x_{r_j}(t|t_0) + \sum_{i=1}^n \Phi_r^{lj}(t, t^i)\Delta v_i = \Phi_r^j(t, t_0)x_{r_j}^0 + \sum_{i=1}^n \Phi_r^{lj}(t, t^i)\Delta v_i, \quad (4.2)$$

où  $\Phi_r^{lj}(t, t^i)$  est la colonne  $3 + l$  de la matrice  $\Phi_r^j(t, t^i)$ . L'Expression (4.2) peut être réécrite afin de faire apparaître les changements en position et en vitesse relatives au temps  $t_{\text{TCA}}^j$ , induits par les  $m$  manœuvres comme :

$$\tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) = r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) + \sum_{i=1}^n \Phi_{r_{12}}^{lj}(t_{\text{TCA}}^j, t^i)\Delta v_i, \quad (4.3)$$

$$\tilde{v}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) = v_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) + \sum_{i=1}^n \Phi_{r_{22}}^{lj}(t_{\text{TCA}}^j, t^i)\Delta v_i. \quad (4.4)$$

### 4.2.1 Formulation basée sur la miss distance

Nous rappelons que le calcul de la nouvelle miss distance de la trajectoire relative pour chaque rencontre  $j = 1, \dots, N$  est fait dans un intervalle de temps centré en  $t_{\text{TCA}}^j$  et en utilisant les hypothèses d'une rencontre rapide : notamment, on suppose que le mouvement relatif est rectiligne uniforme, de direction donnée par le vecteur unitaire :

$$\tilde{e}_j = \frac{\tilde{v}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)}{\|\tilde{v}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)\|}. \quad (4.5)$$

Chaque plan de rencontre ou B-plane est alors construit comme le plan perpendiculaire au vecteur  $\tilde{e}_j$  et la nouvelle miss-distance  $d_{M,j}^{\text{new}}$  est donnée par la norme de la projection  $\Delta r_{\text{min}}^j$  du vecteur  $\tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)$  sur ce plan. Ceci s'écrit comme :

$$\Delta r_{\text{min}}^j = (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j), \quad (4.6)$$

où la matrice  $I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T$  est la matrice de projection (symétrique et idempotente) sur le  $j$ -ième plan de rencontre. De plus, le vecteur  $\Delta r_{\min}^j$  est une fonction des vecteurs  $\tilde{v}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)$  et  $\tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)$ . La norme du vecteur  $\Delta r_{\min}^j$  est calculée alors simplement comme :

$$d_{M,j}^{\text{new}} = \|\Delta r_{\min}^j\| = \left( \tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)^T (I - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

On obtient ainsi :

$$d_{M,j}^{\text{new}^2} = r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) + 2r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj} \Delta v + \Delta v^T \Phi_{r_{12}}^{ljT} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj} \Delta v, \quad (4.8)$$

où les  $n$  poussées impulsionnelles ont été concaténées dans le vecteur

$$\Delta v^T = [ \Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n ],$$

et la matrice  $\tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj}$  est donnée comme la concaténation des colonnes  $\Phi_{r_{12}}^l(t_{\text{TCA}}^j, t^i)$  pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$\tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj} = \left[ \Phi_{r_{12}}^{lj}(t_{\text{TCA}}^j, t^1), \Phi_{r_{12}}^{lj}(t_{\text{TCA}}^j, t^2), \dots, \Phi_{r_{12}}^{lj}(t_{\text{TCA}}^j, t^n) \right]. \quad (4.9)$$

La miss distance est donc une forme quadratique convexe des variables de décision qui sont les  $m$  composantes du vecteur  $\Delta v$  :

$$d_{M,j}^{\text{new}^2} = \Delta v^T Q_j \Delta v + 2q_j^T \Delta v + p_j, \quad (4.10)$$

où :

$$\begin{aligned} Q_j &= \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{ljT} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj} \succeq 0, \\ q_j &= r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj}, \\ p_j &= r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Afin de tenir compte des contraintes éventuelles de maintien à poste, il est imposé que la trajectoire relative du primaire par rapport à chaque objet secondaire et après application des manœuvres reste dans une boîte à la date  $t_{\text{TCA}}^j$ , pour  $j = 1, \dots, N$ . Cela peut se traduire par les inégalités :

$$\underline{u}_r^j \preceq \tilde{r}_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) \preceq \bar{u}_r^j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.12)$$

où les bornes  $\underline{u}_r^j$  et  $\bar{u}_r^j$  sont fixées par l'utilisateur. En reprenant l'Equation (2.74), ces inégalités s'écrivent :

$$\underline{u}_r^j - r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j) \preceq \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj} \Delta v \preceq \bar{u}_r^j - r_{r_j}(t_{\text{TCA}}^j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Si l'on impose une miss distance minimale après manœuvres  $\underline{d}_j$  pour chaque rencontre  $j = 1, \dots, N$  et en prenant en compte les différentes contraintes déjà définies, le problème d'évitement de collision multi-risque en consommation minimale peut alors se formuler comme le problème d'optimisation quadratique non convexe suivant :

### Problème 8 (Miss distance).

*Le plan de poussées impulsionnelles de consommation minimale permettant l'évitement de collision de  $N$  conjonctions rapides, évalué en termes de miss distance minimale vis-à-vis de chaque objet est solution du problème d'optimisation défini comme la minimisation dans l'orthant positif d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes et des contraintes linéaires :*

$$\begin{aligned} \min_{\Delta v \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T \Delta v \\ & \Delta v^T Q_j \Delta v + 2q_j^T \Delta v + p_j \geq \underline{d}_j, \quad j = 1, \dots, N, \\ \text{sous} \quad & A \Delta v \preceq b, \\ & \Delta v \succeq 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $c^T = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q_j$ ,  $q_j$  et  $p_j$  sont donnés par (4.11). La matrice  $A$  et le vecteur  $b$  sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} I_n \\ \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{l1} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lN} \\ -\tilde{\Phi}_{r_{12}}^{l1} \\ \vdots \\ -\tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lN} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \Delta \bar{v} \\ \bar{u}_r^1 - r_{r_j}(t_{TCA}^1) \\ \vdots \\ \bar{u}_r^N - r_{r_j}(t_{TCA}^N) \\ -\bar{u}_r^1 + r_{r_j}(t_{TCA}^1) \\ \vdots \\ -\bar{u}_r^N + r_{r_j}(t_{TCA}^N) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

**Remarque 17.**

Dans la définition des matrices et vecteurs  $Q_j$ ,  $q_j$  et  $p_j$ , on retrouve le terme  $(I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T)$  dans lequel le vecteur  $\tilde{e}_j$  dépend des variables de décision du fait de l'expression de  $\tilde{v}_r(t_{TCA}^j)$  donnée par l'Equation (4.4). Afin de simplifier le problème ainsi obtenu et afin de rester dans une classe de problèmes d'optimisation dont la structure est plus simple, nous ferons une simplification identique à celle présentée dans la référence [100] en remplaçant  $\tilde{v}_r(t_{TCA}^j)$  par  $v_r(t_{TCA}^j)$  dans l'expression des vecteurs  $\tilde{e}_j$ .

Le problème d'optimisation (4.14) consiste à minimiser une fonction linéaire (convexe ou concave) sur l'intersection d'un domaine convexe formé par le polyèdre défini par les inégalités linéaires et du domaine non convexe défini par l'extérieur d'une union d'ellipsoïdes (caractérisées par les formes quadratiques). Le domaine réalisable de ce problème d'optimisation est donc non convexe. Nous étudierons plus en détail dans une prochaine section les difficultés particulières liées à la résolution de cette classe de problèmes d'optimisation non convexes.

Il s'avère en fait que le choix de l'indicateur caractérisant la collision (miss distance, distance de Mahalanobis, probabilité 2D, probabilité maximale) n'a pas d'influence directe sur la nature du problème obtenu puisque dans tous les cas nous obtenons *in fine* cette classe de problèmes si l'on conserve l'ensemble des caractéristiques et hypothèses de la rencontre multiple. Pour cela, nous reprenons les Expressions (2.102) présentées dans la Section 2.7.2.

### 4.2.2 Formulation basée sur la distance de Mahalanobis à $t_{TCA}$

Pour construire précisément le problème d'optimisation reposant sur la distance de Mahalanobis comme contrainte d'évitement de collision, il est nécessaire de définir la base  $\mathcal{B}_j = \left( \vec{u}_{x_{B_j}}, \tilde{e}_j, \vec{u}_{z_{B_j}} \right)$  de chaque plan de rencontre  $\Pi_j$ . En notant  $R_{3D_j} = \left[ \vec{u}_{x_{B_j}}, \tilde{e}_j, \vec{u}_{z_{B_j}} \right]^T$ , la matrice de rotation du repère inertiel vers le repère du B-plane,  $R_{2D_j} = \left[ \vec{u}_{x_{B_j}}, \vec{u}_{z_{B_j}} \right]^T$ , la matrice de projection sur le B-plane  $\Pi_j$  suivant le vecteur  $\tilde{e}_j$ ,  $\Sigma_{3D_j} = R_{3D_j} \Sigma_{r_{r_j}} R_{3D_j}^T$ , la matrice de covariance dans le repère attaché au B-plane et  $\Sigma_{2D_j} = R_{2D_j} \Sigma_{r_{r_j}} R_{2D_j}^T$  la projection de la matrice de covariance combinée dans le B-plane  $\Pi_j$ , on a alors :

$$d_{Mah,j}^{new2} = \tilde{r}_{r_j}(t_{TCA}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) (\Sigma_{3D_j})^{-1} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{r}_{r_j}(t_{TCA}^j). \quad (4.16)$$

L'Expression (4.16) est très proche de l'expression de la miss distance et peut être factorisée comme la forme quadratique (4.10) avec les matrices  $Q_j$  et les vecteurs  $q_j$  et  $p_j$  redéfinis comme ci-dessous.

**Problème 9** (Distance de Mahalanobis).

Le plan de poussées impulsives de consommation minimale permettant l'évitement de collision de  $N$  conjonctions rapides, évalué en termes de distance de Mahalanobis minimale vis-à-vis de chaque objet est solution du problème d'optimisation défini comme la minimisation dans l'orthant positif d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes et des contraintes linéaires :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta v \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T \Delta v \\ \text{sous} \quad & \Delta v^T Q_j \Delta v + 2q_j^T \Delta v + p_j \geq \underline{d}_{Mah,j}, \quad j = 1, \dots, N, \\ & A \Delta v \leq b, \\ & \Delta v \succeq 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

où  $c^T = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$ . Les matrices  $Q_j$  et les vecteurs  $q_j$  et  $p_j$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} Q_j &= \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj^T} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \Sigma_{3D_j}^{-1} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj}, \\ q_j &= r_{r_j} (t_{TCA}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \Sigma_{3D_j}^{-1} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \tilde{\Phi}_{r_{12}}^{lj}, \\ p_j &= r_{r_j} (t_{TCA}^j)^T (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) \Sigma_{3D_j}^{-1} (I_3 - \tilde{e}_j \tilde{e}_j^T) r_{r_j} (t_{TCA}^j). \end{aligned} \quad (4.18)$$

La matrice  $A$  et le vecteur  $b$  sont donnés par les équations (4.15).

### 4.2.3 Formulation basée sur l'approximation de la probabilité $\mathcal{P}_c^{2D}$

Nous rappelons l'approximation de la probabilité de collision 2D [7] donnée à l'Equation (2.95) pour chaque rencontre  $j$  :

$$\mathcal{P}_{c_j}^{2D} \simeq \frac{R_j^2}{2(\det(\Sigma_{2D_j}))^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (d_{Mah,j})^2 \right]. \quad (4.19)$$

Si l'on impose un risque minimal  $\varepsilon_j^{2D}$  pour chaque rencontre  $j$ , la  $j$ -ième contrainte d'évitement de collision  $\mathcal{P}_{c_j}^{2D} \leq \varepsilon_j^{2D}$  s'écrit alors :

$$d_{Mah,j}^2 \geq \underline{\varepsilon}_j^{2D}, \quad (4.20)$$

où :

$$\underline{\varepsilon}_j^{2D} = \ln \left[ \frac{R_j^4}{4\varepsilon_j^{2D^2} \det(\Sigma_{2D_j})} \right].$$

On retrouve exactement la contrainte quadratique du problème 9 avec un second membre différent puisque  $\underline{\varepsilon}_j^{2D}$  remplace  $\underline{d}_{Mah,j}$ .

**Problème 10** (Probabilité de collision).

Le plan de poussées impulsives de consommation minimale permettant l'évitement de collision de  $N$  conjonctions rapides, évalué en termes de probabilité 2D maximale vis-à-vis de chaque objet est solution du problème d'optimisation défini comme la minimisation dans l'orthant positif d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes et des contraintes linéaires :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta v \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T \Delta v \\ \text{sous} \quad & \Delta v^T Q_j \Delta v + 2q_j^T \Delta v + p_j \geq \underline{\varepsilon}_j^{2D}, \quad j = 1, \dots, N, \\ & A \Delta v \leq b, \\ & \Delta v \succeq 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $c^T = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q_j$ ,  $q_j$  et  $p_j$  sont donnés par (4.18). La matrice  $A$  et le vecteur  $b$  sont donnés par (4.15).

#### 4.2.4 Formulation basée sur la probabilité maximale $\mathcal{P}_{\max}$

De même que pour la probabilité 2D, nous pouvons réécrire la probabilité maximale associée à la rencontre  $j$  comme :

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{R_j^2}{e(d_{\text{Mah},j})^2(\det(\Sigma_{2D_j}))^{1/2}}. \quad (4.22)$$

On en déduit aisément la contrainte quadratique du Problème 9 avec comme second membre  $\underline{\epsilon}_j^{\max}$  calculé comme :

$$\underline{\epsilon}_j^{\max} = \frac{R_j^2}{e\varepsilon_j^{\max}(\det(\Sigma_{2D_j}))^{1/2}}. \quad (4.23)$$

**Problème 11** (Probabilité maximale).

*Le plan de poussées impulsives de consommation minimale permettant l'évitement de collision de  $N$  conjonctions rapides, évalué en termes de probabilité maximale maximale vis-à-vis de chaque objet est solution du problème d'optimisation défini comme la minimisation dans l'orthant positif d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes et des contraintes linéaires :*

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta v \in \mathbb{R}^n} c^T \Delta v \\ & \text{sous} \quad \Delta v^T Q_j \Delta v + 2q_j^T \Delta v + p_j \geq \underline{\epsilon}_j^{\max}, \quad j = 1, \dots, N, \\ & \quad \quad \quad A \Delta v \preceq b, \\ & \quad \quad \quad \Delta v \succeq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $c^T = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q_j$ ,  $q_j$  et  $p_j$  sont donnés par (4.18). La matrice  $A$  et le vecteur  $b$  sont donnés par (4.15).

### 4.3 Minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes

#### 4.3.1 Préliminaires

Quelle que soit la nature de la spécification d'évitement choisie dans la section précédente, nous aboutissons à la formulation d'un problème d'optimisation générique de minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes et des contraintes linéaires.

$$\begin{aligned} f^* &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \\ & \text{sous} \quad x^T Q_j x + q_j^T x + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ & \quad \quad \quad Ax \preceq b, \\ & \quad \quad \quad x \succeq 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où  $Q_j \succeq 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, N$ . Le Problème (4.25) est un cas particulier des problèmes d'optimisation quadratiques sous contraintes quadratiques (QCQP) pour lesquels peu d'algorithmes existent dans la littérature [51, Section 8] quand le problème comprend plus d'une contrainte quadratique. Pour de tels problèmes, même la recherche d'une solution réalisable est un problème difficile. Dans le cas général où les hypothèses de convexité du domaine réalisable ne sont pas vérifiées, même le cas plus simple pour lequel le critère est une fonction linéaire est un problème dit NP-difficile [105]. Afin de mieux visualiser cette difficulté de résolution, nous donnons un exemple simple en deux dimensions, décliné suivant trois modalités, qui illustrent les différents niveaux de difficulté que l'on peut rencontrer dans ce type de problème d'optimisation globale.



**Exemple 1.**

A partir du problème d'optimisation QCLP suivant

$$\begin{array}{ll}
 \min_{x \in \mathbb{R}^2} & c^T x \\
 & x^T Q_j x + q_j^T x + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\
 \text{sous} & Ax \preceq b, \\
 & x \succeq 0,
 \end{array} \tag{4.26}$$

trois configurations différentes pour lesquelles, seule la contrainte linéaire  $Ax \preceq b$  varie, sont examinées. Les données communes du problème d'optimisation pour les trois configurations sont les suivantes :

- $N = 5$  ;
- $c = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$  ;
- Contraintes quadratiques :

$$\begin{array}{lll}
 Q_1 = \begin{bmatrix} 0.1458 & -0.0601 \\ -0.0601 & 0.2153 \end{bmatrix}, & q_1 = \begin{bmatrix} 0.2225 \\ 1.0511 \end{bmatrix}, & p_1 = 0.7991 \\
 Q_2 = \begin{bmatrix} 0.1458 & 0.0601 \\ 0.0601 & 0.2153 \end{bmatrix}, & q_2 = \begin{bmatrix} 0.7036 \\ 0.6711 \end{bmatrix}, & p_2 = 0.0392 \\
 Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.0625 \end{bmatrix}, & q_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -0.125 \end{bmatrix}, & p_3 = 3.0625 \\
 Q_4 = \begin{bmatrix} 0.0933 & 0.0308 \\ 0.0308 & 0.0578 \end{bmatrix}, & q_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & p_4 = -1 \\
 Q_5 = \begin{bmatrix} 0.1450 & -0.1050 \\ -0.1050 & 0.1450 \end{bmatrix}, & q_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & p_4 = -1.
 \end{array} \tag{4.27}$$

Pour les différences entre les trois configurations, nous avons fait varier le vecteur  $b$  de la contrainte linéaire. Les Figures 4.1, 4.2 et 4.3 montrent le domaine réalisable (domaine en blanc à l'intérieur du rectangle défini par les sommets  $(-5, -6)$ ,  $(-5, 6)$ ,  $(5, -6)$ ,  $(5, 6)$ ) pour chaque problème d'optimisation défini par la configuration.

- $A_1 = I_2$ ,  $b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ . Dans cette configuration, l'optimum est obtenu au point  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 5$  qui est un sommet du polytope des contraintes linéaires. Cette solution aurait pu être obtenue en résolvant le sous problème d'optimisation linéaire extrait du problème QCLP d'origine en retirant les contraintes quadratiques.

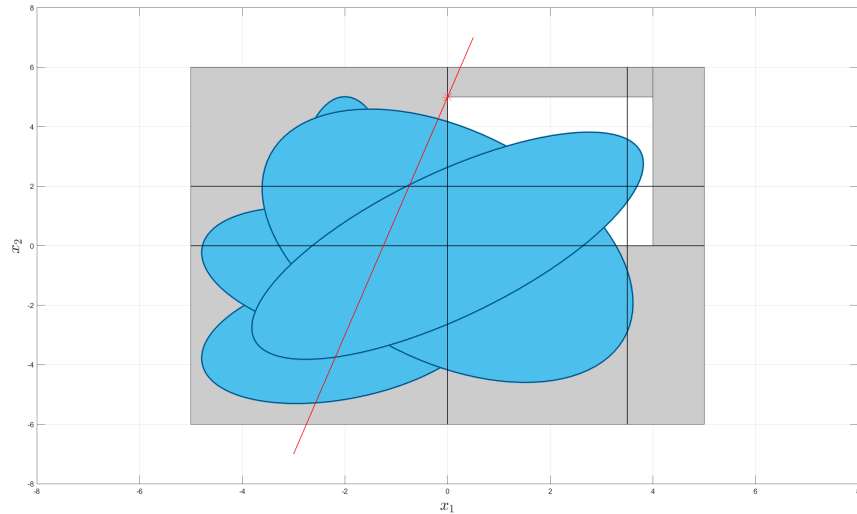


FIGURE 4.1 – Configuration 1 : solution optimale pour la minimisation d’une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes.

- $A_2 = I_2$ ,  $b_2 = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Dans cette configuration, l’optimum est obtenu, de manière approchée, au point  $x_1^* = 3.038$ ,  $x_2^* = 0.618$  qui est un des sommets du domaine réalisable qui est non convexe.

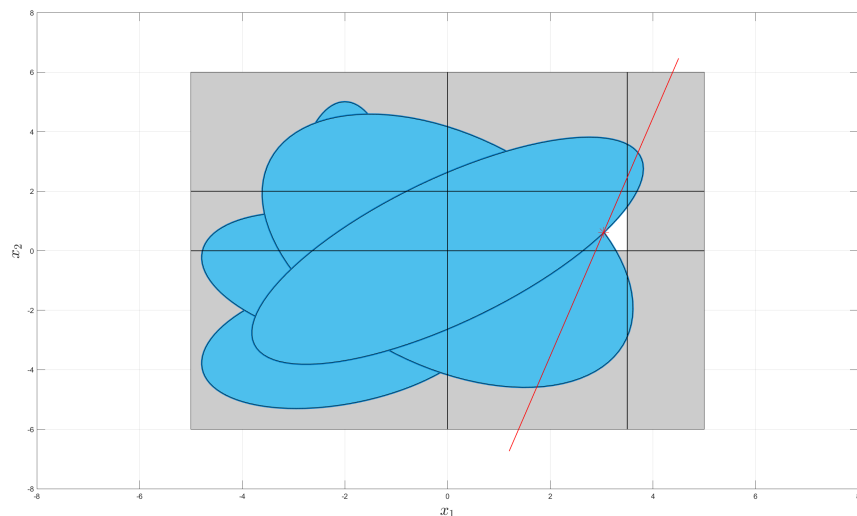


FIGURE 4.2 – Configuration 2 : solution optimale pour la minimisation d’une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes.

- $A_3 = I_2$ ,  $b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3.7 \end{bmatrix}$ . Dans cette configuration, le domaine réalisable est non seulement

non convexe mais également non connexe et l'optimum est obtenu, de manière approchée, au point  $x_1^* = 0.69$ ,  $x_2^* = 3.7$ .

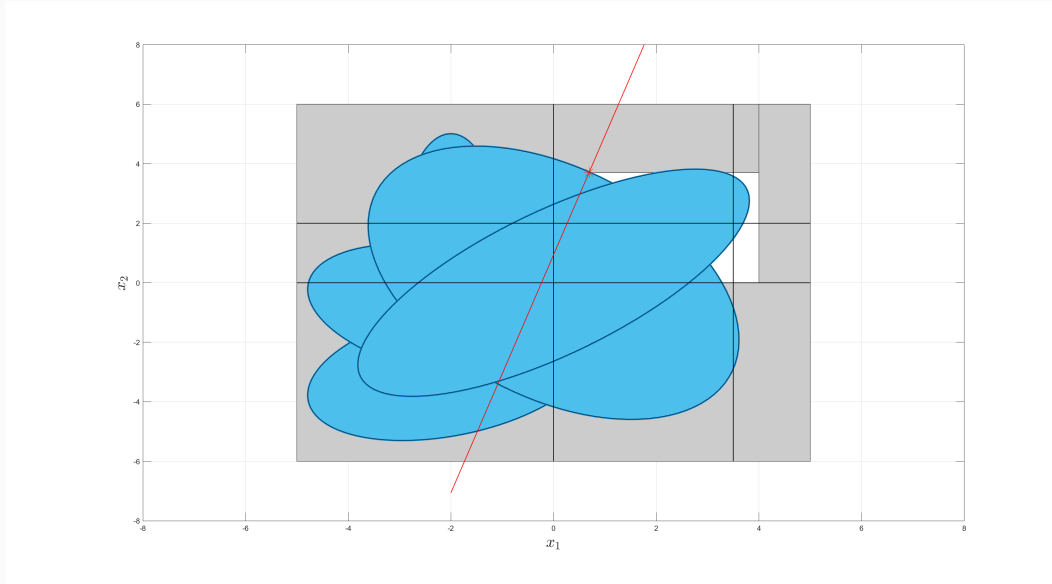


FIGURE 4.3 – Configuration 3 : solution optimale pour la minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes quadratiques non convexes.

[27]

### 4.3.2 Relaxation SDP

#### Principe de la relaxation

La relaxation SDP du Problème d'optimisation non convexe (4.25) repose sur une technique de relèvement de l'espace des variables de décision initial vers un espace des variables de décision de la relaxation qui inclut le premier. Pour cela, on introduit une variable matricielle définie par  $X = xx^T$ . En introduisant cette variable additionnelle, le Problème (4.25) peut se réécrire comme le problème d'optimisation dont les contraintes sont affines à l'exception de la contrainte non convexe liant les variables  $X$  et  $x$  et qui est une contrainte sur le rang de  $X$  :

$$\begin{aligned}
 & \min_{x, X} c^T x \\
 & \quad \text{trace}(Q_j X) + q_j^T x + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\
 & \text{sous} \quad Ax \preceq b, \\
 & \quad x \succeq 0, \\
 & \quad X - xx^T = 0.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

On a bien un relèvement puisque l'espace des variables de décision initial est de dimension  $n$  alors que l'espace des variables de décision de (4.28) est de dimension  $n^2 + n$ . Pour obtenir une relaxation convexe, il s'agit de remplacer la contrainte non convexe par la contrainte moins stricte  $X \succeq xx^T$

pour obtenir :

$$\begin{aligned}
f_{\text{sdp}}^* &= \min_{x, X} c^T x \\
&\quad \text{trace}(Q_j X) + q_j^T x + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\
&\quad Ax \preceq b, \\
\text{sous} \quad &\quad x \preceq 0, \\
&\quad \begin{bmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{bmatrix} \preceq 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

La valeur optimale du Problème (4.29) est une borne inférieure de la valeur optimale du Problème (4.25), c.-à-d.  $f_{\text{sdp}}^* \leq f^*$ . Un certain nombre de résultats concernant les liens entre les solutions de cette relaxation et les solutions du problème initial non convexe peuvent être présentés de manière synthétique dans la remarque suivante.

**Remarque 18.**

- Si le problème initial est convexe alors la relaxation est exacte et  $f_{\text{sdp}}^* = f^*$ .
- Si la paire optimale  $(X^*, x^*)$  de la relaxation SDP vérifie la contrainte  $X^* = x^* x^{*T}$  alors  $x^*$  est la solution optimale du problème initial.
- Si la paire  $(X, x)$  est une paire réalisable de la relaxation SDP alors  $x$  est réalisable pour toute contrainte convexe du problème initial.

Sauf cas particuliers tels que ceux présentés dans les exemples 2D, la paire optimale  $(X^*, x^*)$  solution de la relaxation SDP ne fournit pas une solution réalisable pour le problème initial et l'on a également  $f_{\text{sdp}}^* < f^*$ . Une procédure de post-traitement de la solution  $(X^*, x^*)$  est alors nécessaire afin d'obtenir une solution réalisable (éventuellement approximativement optimale) au problème initial. Cette phase de post-traitement peut consister en une randomisation gaussienne afin de générer une solution sous-optimale [76], en une procédure de réduction de rang (dite aussi purification) [83] ou en certaines techniques spécifiques de décomposition en matrices de rang 1 [102].

La première approche, par exemple, repose sur une interprétation probabiliste du problème initial. En effet, si  $(X^*, x^*)$  est la paire optimale de la relaxation SDP alors il est possible de construire une distribution normale de moyenne  $\mu^* = x^*$  et de matrice de covariance  $\Sigma^* = X^* - x^* x^{*T}$ . En définissant le vecteur aléatoire  $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , il est possible de montrer que la paire  $(\mu^*, \Sigma^*)$  est une solution du problème d'optimisation probabiliste :

$$\begin{aligned}
\min_{\mu, \Sigma} \quad &\mathbb{E}(\xi) = c^T \mu \\
&\mathbb{E}(g_j(\xi)) = \text{trace}(Q_j \Sigma) + \mu^T Q_j \mu + q_j^T \mu + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\
\text{sous} \quad &\mathbb{E}(A\xi) = A\mu \preceq b, \\
&\mathbb{E}(\xi) = \mu \preceq 0, \\
&\Sigma \preceq 0,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

où  $g_j(\xi) = \xi^T Q_j \xi + q_j^T \xi + p_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Cette interprétation montre que toute réalisation  $\xi_r$  du vecteur aléatoire  $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  ainsi distribué peut être un candidat pour être une solution réalisable du problème initial puisque solution de ce problème « en moyenne ». Ainsi, l'obtention de la paire optimale  $(X^*, x^*)$  fournit un moyen alternatif afin de générer des solutions approchées du problème initial. Toutefois, cette procédure de randomisation de la solution de la relaxation SDP doit être adaptée à la structure particulière de chaque problème d'optimisation quadratique traité. Nous présentons une adaptation de cette procédure dans notre cas particulier en utilisant une homogénéisation du problème initial [107], [102], [76].

## Obtention d'une solution sous-optimale réalisable par randomisation

Les éléments discutés dans les sections précédentes sont maintenant résumés et présentés synthétiquement et formellement dans deux algorithmes. Nous notons  $\mathbf{K}$  l'ensemble réalisable du problème d'optimisation (4.25). L'Algorithme (4) présente la procédure de randomisation et de mise à l'échelle qui est une sous routine de l'Algorithme (5) qui est l'algorithme global.

---

### Algorithme 4 RANDOMSCALED( $\bar{x}^*, X^*, Cent$ )

---

**Entrée:** Solutions optimales de la relaxation SDP :  $\bar{x}^*$  et  $X^*$ , vecteurs des centres des ellipsoïdes des contraintes quadratiques  $Cent(j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

**Sortie:** Un ensemble de points  $x(i) \in \mathbf{K}$ .

---

```

1: Tirage d'un nombre  $L$  de points  $\xi(i)$ ,  $i = 1, \dots, L$  dans la gaussienne  $\mathcal{N}(\bar{x}^*, X^* - x^*x^{*T})$  tronquée dans
   le polyèdre  $\{Ax \preceq b, x \succeq 0\}$ ;
  ▷ Filtrage des points réalisables dans le tirage initial par rapport aux contraintes quadratiques
2: pour  $i \leftarrow 1$  à  $L$  faire
3:   si  $\xi(i) \in \mathbf{K}$  pour alors
4:      $x(i) \leftarrow \xi(i)$ ;
5:   sinon
6:     pour  $j \leftarrow 1$  à  $N$  faire
7:       Calculer  $val(j) = \begin{bmatrix} \xi(i)^T & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_j & q_j/2 \\ q_j/2 & p_j + 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \xi(i) \\ 1 \end{bmatrix}$ ;
8:     fin pour
9:      $val_{min} \leftarrow \min_{k=1, \dots, N} val$ ;
10:     $kmin \leftarrow \arg \left[ \min_{k=1, \dots, N} val \right]$ ;
11:    si  $val_{min} > 0$  alors
12:       $\xi_{scaled}(i) = ((\xi(i) - Cent(kmin))/\sqrt{val_{min}}) + Cent(kmin)$ ;
13:    fin si
  ▷ Filtrage des points mis à l'échelle par l'ensemble réalisable  $\mathbf{K}$ 
14:    si  $\xi_{scaled}(i) \in \mathbf{K}$  alors
15:       $x(i) \leftarrow \xi_{scaled}(i)$ ;
16:    fin si
17:  fin si
18: fin pour

```

---

---

**Algorithme 5** SDR( $c, Q_j, q_j, p_j, A, B$ )

---

**Entrée:** Données du Problème d'optimisation (4.25) : vecteur coût  $c$ , matrices  $Q_j, j = 1, \dots, N, A$ , vecteurs  $q_j, j = 1, \dots, N, b$ , points  $p_j, j = 1, \dots, N$ .

**Sortie:** Approximation  $x^*$  de la solution optimale du Problème d'optimisation (4.25).

---

```
1: Résolution de la relaxation SDP (4.29) pour obtenir  $\bar{x}^*$  et  $X^*$  ;  
  ▷ Test de réalisabilité de la solution de la relaxation  
2: pour  $j \leftarrow 1$  à  $N$  faire  
3:    $Cent(j) \leftarrow -0.5 * Q_j * q_j$  ;  
4: fin pour  
5: si  $\bar{x}^* \in \mathbf{K}$  alors  
6:    $x^* \leftarrow \bar{x}^*$  ; Stop ;  
7: sinon  
8:    $x \leftarrow \text{RANDOMSCALED}(\bar{x}^*, X^*, Cent)$  ;  
9:    $x^* \leftarrow \arg \left[ \min_i c^T x(i) \right]$  ;  
10: fin si
```

---

**Remarque 19.**

En l'état actuel de notre travail, l'étape de randomisation et de mise à l'échelle des points tirés ne permet pas d'assurer que ceux-ci soient tous réalisables vis-à-vis des contraintes linéaires mais également des autres contraintes quadratiques. De plus, le cas où  $val_{min}$  est négatif devra être examiné en détails. Toutefois, cette procédure préliminaire est intéressante car elle localise un certain nombre de points tirés sur la frontière du domaine réalisable, permettant ainsi une meilleure approximation de la solution optimale.

### 4.3.3 Quelques exemples illustratifs

Pour l'ensemble des méthodes étudiées, nous avons traité deux types d'exemples numériques. Une première partie s'attache à utiliser les trois exemples en dimension 2 définis par l'Exemple 1 et pour lesquels il est possible de visualiser les domaines de réalisabilité ainsi que les optima dans le plan des variables de décision. On peut ainsi vérifier graphiquement la solution fournie par les différentes méthodes. La phase de randomisation est faite avec un tirage gaussien tronqué de  $10^4$  points pour l'ensemble des exemples présentés.

#### Exemples didactiques en deux dimensions

A l'instar de ce que nous avons déjà présenté à l'Exemple 1, nous partons du problème d'optimisation QCLP suivant

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & c^T x \\ \text{sous} \quad & x^T Q_j x + q_j^T x + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ & Ax \preceq b, \\ & x \succeq 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

pour lequel 4 configurations différentes sont examinées. Les données communes du problème d'optimisation pour les 4 configurations sont les suivantes :

- $N = 5$  ;
- $c = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Les trois premières configurations correspondent aux trois premiers exemples de l'Exemple 1 que nous avons repris. Nous avons ensuite ajouté un quatrième exemple pour lequel nous avons fait varier le vecteur  $b$  de la contrainte linéaire ainsi que les contraintes quadratiques.

### Exemple 2.

1- Pour cet exemple, la solution obtenue après 2.64 s est  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 5$  qui est la solution optimale puisque la résolution de la relaxation SDP fournit les solutions :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} 7.1875 & 1.7101 \\ 1.7101 & 31.0316 \end{bmatrix}.$$

Il est à noter que la phase de randomisation n'a pas été utilisée ici du fait que la solution  $x^*$  fournie par la relaxation SDP est effectivement réalisable et optimale.

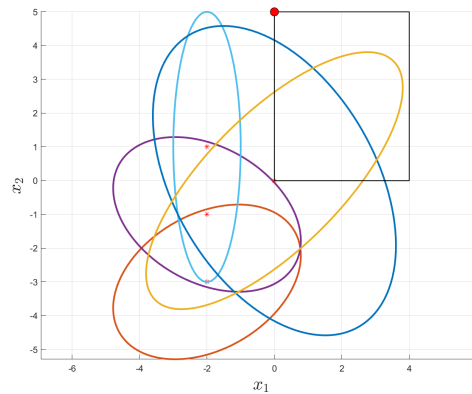


FIGURE 4.4 – Exemple 1 en 2D : domaine réalisable et solution obtenue  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 5$ .

2- Pour cet exemple, la solution sous-optimale obtenue après 5.09 s est  $x_1^* = 3.0395$ ,  $x_2^* = 0.6191$ . La résolution de la relaxation SDP fournit les solutions :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} 6.9823 & 1.8186 \\ 1.8186 & 9.6281 \end{bmatrix}.$$

Cette fois  $x^*$  n'est pas réalisable et  $\text{rang}(X^*) = 2$ . La phase de randomisation est donc nécessaire afin de déterminer une approximation réalisable de la solution optimale.

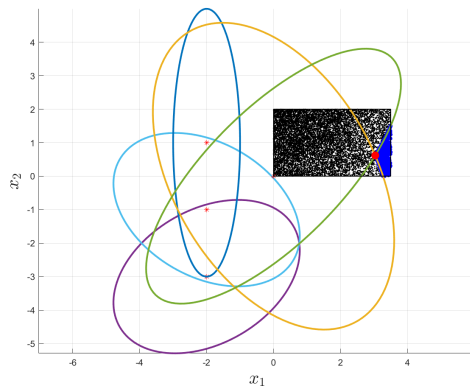


FIGURE 4.5 – Exemple 2 en 2D : domaine réalisable avec la distribution initiale des points tirés dans la gaussienne tronquée (points noirs) et les points mis à l'échelle en bleu ainsi que la solution sous-optimale obtenue  $x_1^* = 3.0625$ ,  $x_2^* = 0.617$ .

3- Pour cet exemple, la solution sous-optimale obtenue après 3.89 s est  $x_1^* = 0.7106$ ,  $x_2^* = 3.7$ . La résolution de la relaxation SDP fournit les solutions :

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.7 \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} 5.9218 & 1.4181 \\ 1.4181 & 19.1894 \end{bmatrix}.$$

Dans ce dernier cas, de nouveau  $x^*$  n'est pas réalisable et  $\text{rang}(X^*) = 2$ . La phase de randomisation est donc nécessaire afin de déterminer une approximation réalisable de la solution optimale.

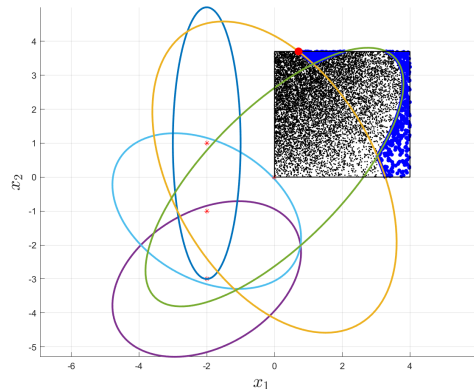


FIGURE 4.6 – Exemple 3 en 2D : domaine réalisable avec la distribution initiale des points tirés dans la gaussienne tronquée (points noirs) et les points mis à l'échelle en bleu ainsi que la solution sous-optimale obtenue  $x_1^* = 0.7106$ ,  $x_2^* = 3.7$ .

4- Les contraintes linéaires sont données par  $A_1 = I_2$ ,  $b_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.55 \end{bmatrix}$  et les contraintes



quadratiques par :

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 14.58 & -6.01 \\ -6.01 & 21.53 \end{bmatrix}, & q_1 &= \begin{bmatrix} -6.524 \\ -14.5637 \end{bmatrix}, & p_1 &= 3.5276 \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, & q_2 &= \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix}, & p_2 &= 2.25 \\
 Q_3 &= \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 6.25 \end{bmatrix}, & q_3 &= \begin{bmatrix} -22.5 \\ -55 \end{bmatrix}, & p_3 &= 5.0625 \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 19.75 & 9.0933 \\ 9.0933 & 9.25 \end{bmatrix}, & q_4 &= \begin{bmatrix} -17.889 \\ -10.059 \end{bmatrix}, & p_4 &= 3.2147 \\
 Q_5 &= \begin{bmatrix} 13.2812 & -11.7187 \\ -11.7187 & 13.2812 \end{bmatrix}, & q_4 &= \begin{bmatrix} 1.7188 \\ -3.2813 \end{bmatrix}, & p_4 &= -0.6797.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dans cette configuration, l'optimum est obtenu directement sans randomisation au point  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0.4$  qui est le sommet en haut et à gauche du polytope des contraintes linéaires.

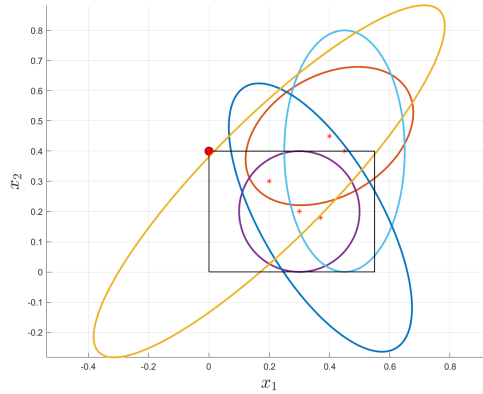


FIGURE 4.7 – Exemple 4 : en 2D : domaine réalisable avec la distribution initiale des points tirés dans la gaussienne tronquée (points noirs) et les points mis à l'échelle en bleu ainsi que la solution sous-optimale obtenue  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0.4$ .

## Exemples aléatoires

Une seconde partie propose des exemples construits aléatoirement en dimension supérieure ou égale à 2 afin de mieux cerner les limites numériques des approches proposées, en termes de nombres de variables, en particulier. Deux types d'exemples aléatoires sont proposés. Dans la première série d'exemples aléatoires, pour un nombre donné d'impulsions (fixant la dimension  $n$  du problème d'optimisation), un nombre  $N$  fixé de contraintes quadratiques construites de manière aléatoire dans cet espace de dimension  $n$  est choisi. Le centre de chaque ellipsoïde est tiré uniformément aléatoirement dans l'intervalle  $[-2, 2]$ . Finalement, un polytope du type  $0 \leq x_i \leq \bar{x}_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  est construit de manière aléatoire ( $\bar{x}_i$  est uniformément distribué entre 1 et 3). Dans la seconde série, une contrainte parmi les  $N$  contraintes quadratiques est choisie comme la boule de centre l'origine de l'espace et de rayon fixé à 0.5, permettant d'éviter la solution 0 qui est une solution « facile » à obtenir numériquement quand le point est réalisable. De plus, le critère linéaire à optimiser correspond au critère de consommation utilisé pour le problème d'évitement de collision

avec  $c^T = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^n$ . Il est toutefois important de remarquer que les résultats proposés dépendent très fortement de la manière dont sont générés aléatoirement les exemples étudiés. Ces exemples ne doivent donc constituer qu'une illustration de quelques caractéristiques des méthodes testées et de leur implémentation numérique qui reste très préliminaire et mériterait des développements numériques plus approfondis.

**Exemple 3.**

Dans le Tableau 4.1 (ainsi que dans le Tableau 4.2), nous donnons le nombre effectivement calculé de variables  $n$  non nulles à l'optimum, le nombre de contraintes quadratiques  $N$ , le temps CPU mesuré approximativement par MATLAB© pour résoudre le problème, la valeur du critère à l'optimum calculé par la méthode des relaxations successives des moments présentée dans la section suivante et certifiée numériquement  $f_d^*$  et finalement la valeur du critère minimal  $f_{SDR}^*$ , obtenu par la méthode SDR.

Case #	Caractéristiques de la solution					
	$n$	$N$	$L$	CPU (s)	$f_d^*$	$f_{SDR}^*$
2D 1	2	10	$10^4$	3.8	0.84	0.8412
2D 2	2	30	$10^4$	5.26	2.17	2.1835
3D	3	17	$10^4$	4.68	1.45	1.47
4D	3	10	$10^5$	22	0.0891	0.1443
5D	5	10	$10^5$	5.95	0.5074	0.655
8D	0	6	$10^5$	2.37	0	0

TABLE 4.1 – Quelques résultats de la méthode SDR pour une série d'exemples aléatoires

Case #	Caractéristiques de la solution					
	$n$	$N$	$L$	CPU (s)	$f_d^*$	$f_{SDR}^*$
2D 1	2	10	$10^4$	4.3	1.3703	1.3717
2D 2	2	30	$10^4$	7.43	0.6527	0.6527
3D	3	17	$10^4$	5.15	0.5402	0.5667
4D	4	10	$10^5$	4.03	0.5	0.5732
5D	5	10	$10^5$	4.8	1.142	1.7956
8D	8	2	$10^6$	11173	3.1623	5.77

TABLE 4.2 – Quelques résultats de la méthode SDR d'exemples aléatoires avec boule d'exclusion autour de 0

L'analyse des Tableaux 4.1 et 4.2 permettent de dégager quelques conclusions intermédiaires.

- Avec un tirage aléatoire limité à 10000 points, la méthode est relativement efficace en temps de calcul et fournit des points réalisables et une approximation correcte de la solution optimale ;
- cette approximation de la solution optimale se dégrade avec la dimension du problème mais peut être améliorée en faisant un plus grand tirage d'échantillons aux dépens du temps de calcul qui en sera logiquement augmenté ;
- La difficulté de résolution des exemples telle qu'elle a été définie dans la deuxième série d'exemples n'a pas d'impact visible sur l'efficacité de la méthode.

## 4.4 Une hiérarchie de relaxations SDP pour l'optimisation polynomiale

Cette section a pour objectif de présenter un algorithme de résolution du Problème (4.25) par relaxations SDP successives convergeant vers l'optimum global du problème d'optimisation non convexe initial. L'idée principale consiste à montrer que tout problème d'optimisation polynomiale sous contrainte et sous des hypothèses de compacité de l'ensemble réalisable peut être reformulé comme un problème de programmation linéaire dans l'espace des mesures positives. Ce dernier est certes un problème de programmation linéaire mais en dimension infinie et portant sur une variable d'optimisation (une mesure inconnue) difficile à manipuler directement. Celle-ci peut toutefois être manipulée à l'aide de ses moments et il est alors possible de formuler une hiérarchie de relaxations SDP portant sur les moments de la mesure inconnue dont les optima successifs vont converger vers l'optimum global du problème initial. Dans un premier temps, nous donnons les éléments théoriques de base indispensables à la bonne compréhension de l'algorithme de calcul final. L'ensemble du matériel a été extrait des deux références classiques sur le sujet [74] et [73].

### 4.4.1 Equivalence avec un problème de programmation linéaire dans l'espace des mesures positives

Nous rappelons que le problème d'optimisation initial dont nous souhaitons calculer la solution globalement optimale est le QCLP donné génériquement par :

$$\begin{aligned}
 f^* &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) &= c^T x \\
 \text{sous} & & g_j(x) &= x^T Q_j x + q_j^T x + p_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\
 & & g_k(x) &= A_k x - b_k \geq 0, \quad k = N + 1, \dots, 7N + n, \\
 & & g_i(x) &= x_i \geq 0, \quad i = 7N + n + 1, \dots, 7N + 2n,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

où les matrices symétriques  $Q_j$  sont semi-définies positives, c.-à-d.  $Q_j \succeq 0$ . Si l'on définit l'ensemble des solutions réalisables de ce problème d'optimisation comme :

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7N + 2n\}, \tag{4.34}$$

on peut montrer, en utilisant [74, Section 5.1] que

$$\begin{aligned}
 f^* &= \inf_{\nu \in \mathbb{M}(\mathbf{K})_+} & \int_{\mathbf{K}} f d\nu \\
 \text{sous} & & \nu(\mathbf{K}) = 1.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Le Problème (4.35) est un problème d'optimisation linéaire en dimension infinie sur l'espace des mesures positives. En effet, une isométrie isomorphe lie le dual topologique  $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})^*$  de l'espace de Banach  $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \sup_K)$  (l'espace des fonctionnelles linéaires  $l$  définies sur  $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ ) à l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{K})$  des mesures de Borel finies, signées et définies sur  $\mathbf{K}$ . De plus, le cône des mesures de Borel  $\mathbb{M}(\mathbf{K})_+ \subset \mathbb{M}(\mathbf{K})$ , positives sur  $\mathbf{K}$  est le cône dual du cône convexe  $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})_+$  ( $\mathbb{M}(\mathbf{K})_+ = \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})_+^*$ ) (cf. Figure 4.8 pour une vue schématique de ce développement et [92] pour un traitement mathématique rigoureux). Le crochet de dualité entre les fonctions continues et les mesures de Borel est alors donné comme :

$$\langle f, \nu \rangle = \int_{\mathbf{K}} f d\nu. \tag{4.36}$$

On obtient donc que  $\mathbb{M}(\mathbf{K})_+ = \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})_+^* = \{\nu \in \mathbb{M}(\mathbf{K}) : \nu \geq 0\}$  et le Problème (4.35) est bien un problème d'optimisation linéaire en dimension infinie sur l'espace des mesures positives que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned} f^* &= \inf_{\nu \in \mathbb{M}(\mathbf{K})} \langle f, \nu \rangle \\ \text{sous} \quad & \langle 1, \nu \rangle = 1 \\ & \nu \geq 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Même si le Problème (4.37) est un problème de PL, le fait qu'il soit posé dans l'espace des mesures positives (donc en dimension infinie) ne permet pas de l'aborder en raisonnant directement sur la variable de décision qui est la mesure inconnue  $\nu$ . Toutefois, il est possible de manipuler la mesure  $\nu$  à travers ses moments. En effet, le Problème (4.37) peut également être formulé comme le problème d'optimisation

$$f^* = \inf_y \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_d^n} f_\alpha y_\alpha : \exists \nu \in \mathbb{M}(\mathbf{K})_+ \text{ t.q. } y_0 = 1; y_\alpha = \int_{\mathbf{K}} x^\alpha d\nu, \forall \alpha \in \mathbb{N}_d^n \right\}.$$

Comme il sera vu dans la section suivante, le vecteur des  $y_i$  est le vecteur des moments d'ordre 1 de la mesure inconnue  $\nu$ . La résolution du Problème (4.37) revient donc à la recherche d'une séquence de moments  $y$  d'une mesure de probabilité de Borel supportée sur l'ensemble semi-algébrique basique  $\mathbf{K}$ .

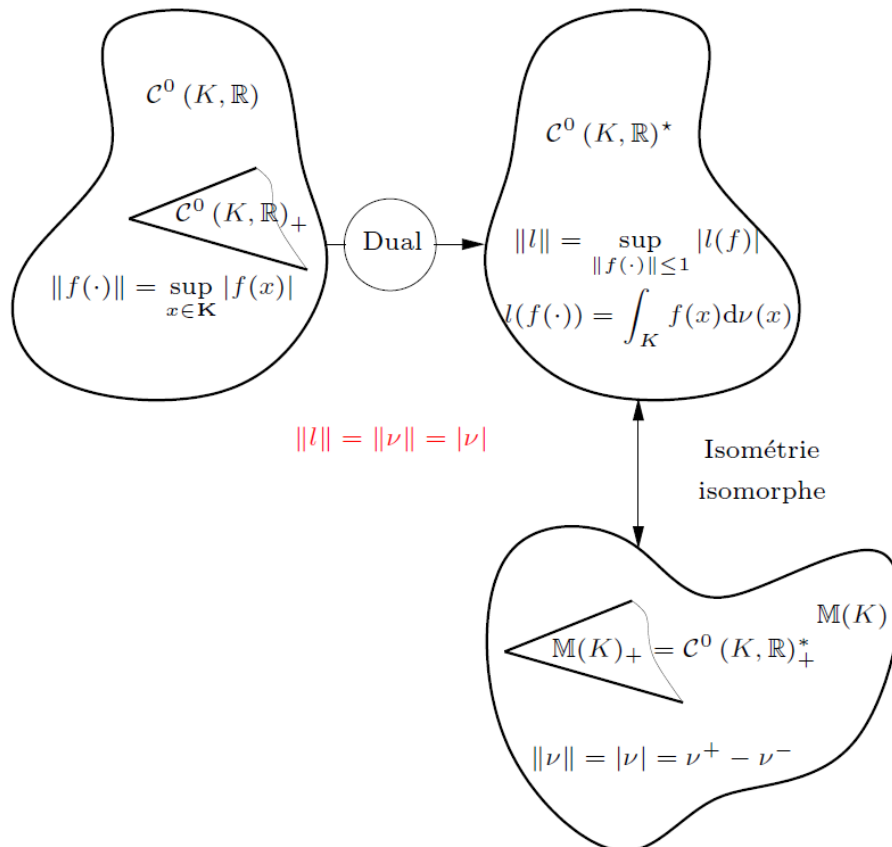


FIGURE 4.8 – Représentation du rapport de dualité entre les espaces  $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$  ( $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})_+$ ) et  $\mathbb{M}(K)$  ( $\mathbb{M}(K)_+$ ).

**Remarque 20.**

Le problème QCLP initial

$$f^* = \inf_{x \in \mathbf{K}} f(x) = c^T x$$

est équivalent au problème :

$$\sup_{\lambda} \lambda \quad (4.38)$$
$$f(x) - \lambda \geq 0, \forall x \in \mathbf{K}$$

qui est un problème linéaire avec une unique variable mais un nombre infini non dénombrable de contraintes. L'intérêt de cette dernière formulation est qu'elle fournit d'une part, une interprétation très riche exprimée à travers la recherche de certificats de positivité du polynôme  $f(x) - \lambda$  sur l'ensemble semi-algébrique basique  $\mathbf{K}$  et qu'elle est d'autre part, le dual lagrangien du Problème (4.35). Nous verrons les implications de cette relation dans la suite de ce chapitre.

**4.4.2 Caractérisation d'une mesure par ses moments**

Les moments d'une mesure positive sont la généralisation directe des moments statistiques usuels (moyenne, asymétrie, kurtosis) d'une mesure de probabilité. Les moments sont les outils permettant de manipuler une mesure en pratique.

**Définition 9** (Moments d'une mesure positive).

Soit l'ensemble  $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ , le moment d'ordre  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  de la mesure positive  $\nu$  définie sur l'ensemble  $\mathbf{K}$  est le nombre réel :

$$y_\alpha = \int_{\mathbf{K}} x^\alpha d\nu.$$

Le moment d'ordre  $\alpha$  n'est rien d'autre que l'intégrale du monôme  $x^\alpha$  par rapport à la mesure  $\nu$ . If  $\nu$  est une mesure finie, alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|y_\alpha| < +\infty$ .

La séquence infinie réelle des moments de la mesure  $\nu$  sera notée  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ .

**Exemple 4.**

Soit  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  ( $n = 1$ ) et soit  $\nu_g$  la mesure gaussienne standard. Alors, ses moments sont définis par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, y_\alpha = \int_{\mathbf{K}} x^\alpha d\mu_g = \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \rho(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^\alpha e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (4.39)$$

Leur forme close est donnée par :

$$y_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ impair,} \\ \frac{\sigma^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) & \text{si } \alpha \text{ pair.} \end{cases} \quad (4.40)$$

La fonction Gamma, notée  $\Gamma$ , est définie par :

$$\Gamma(\cdot) : \mathbb{C}_{\mathbb{R}>0} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$z \mapsto \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx,$$

où  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}_{>0}}$  est l'ensemble des nombres complexes numbers ayant une partie réelle positive. Il est important de remarquer que l'intégrale définissant la fonction est une intégrale impropre convergente.

### 4.4.3 Le problème des moments

Supposons maintenant que la séquence de nombres réels  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  est donnée, résoudre le problème classique des moments sur  $\mathbf{K}$  revient à répondre aux questions suivantes [74] :

- existe-t-il une mesure de Borel finie positive  $\nu$  supportée sur  $\mathbf{K}$  telle que  $y_\alpha = \int_{\mathbf{K}} x^\alpha d\nu$  ? Si une telle mesure  $\nu$  existe, elle est appelée *mesure représentante* de  $y$  sur  $\mathbf{K}$ .
- Cette mesure positive  $\nu$  est-elle uniquement déterminée par la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  ?

Si la mesure représentante  $\nu$  est unique, elle est dite *déterminée* et sinon elle est dite *indéterminée*. Si la séquence donnée  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  est infinie, le problème des moments est dit complet alors que si la séquence est finie, on dira que le problème est tronqué [74]. Comme dans la référence [74], l'ensemble  $\mathbf{K}$  est un ensemble semi-algébrique basique :

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, 7N + 2n = r\}.$$

Quand  $n = 1$  [99], nous retrouvons les définitions classiques des problèmes des moments en dimension 1 tels que les problèmes de :

- Hamburger, pour  $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ,  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}$ ,
- Stieltjes, pour  $\mathbf{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,
- Hausdorff, pour  $\mathbf{K} = [a, b]$ ,  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{R}$ ,

pour lesquels des solutions existent dans la littérature. Quand  $n > 1$ , la solution du problème des moments multi-dimensionnel n'est pas connue pour des ensembles quelconques  $\mathbf{K}$  mais certains résultats peuvent être utilisés quand  $\mathbf{K}$  est un ensemble semi-algébrique basique. En appliquant le théorème de Riesz-Haviland sur les ensembles semi-algébriques compacts, des conditions d'existence de mesures représentantes peuvent être développées.

**Théorème 1** (Riesz-Haviland). [74, Theorem 2.34]

Soit la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  et l'ensemble fermé  $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Il existe une mesure de Borel positive, finie et représentante  $\nu$  sur  $\mathbf{K}$  si et seulement si  $L_y(f) \geq 0$  pour tous les polynômes  $f \in \mathbb{R}[x]$  non négatifs sur  $\mathbf{K}$ .  $L_y(f)$  est la fonctionnelle linéaire de Riesz associée à la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  et définie par :

$$L_y : \begin{aligned} \mathbb{R}^n[x] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha &\mapsto L_y(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha y_\alpha. \end{aligned} \quad (4.41)$$

#### Exemple 5.

Pour le polynôme  $p$

$$p : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto p(x) = 1 + 3x_1 + 2x_1^2 - x_1x_2,$$

avec le vecteur des coefficients

$$p \in \mathbb{R}^6, p = (p_{00} \ p_{10} \ p_{01} \ p_{20} \ p_{11} \ p_{02}) = (1 \ 3 \ 0 \ 2 \ -1 \ 0),$$

on obtient :

$$L_y(p) = y_{00} + 3y_{10} + 2y_{20} - y_{11}.$$

Dans toute sa généralité, le Théorème 1 n'est pas très utile en pratique. Heureusement, les résultats sur la représentation des polynômes non négatifs sur des ensembles semi-algébriques basiques [74, Section 2.4], permettent d'obtenir des conditions de représentativité en termes de problèmes SDP. Associée à la fonctionnelle linéaire de Riesz, on définit la matrice des moments et la matrice de localisation.

### Matrices des moments et de localisation

**Définition 10** (Matrice des moments). [74, Section 2.7]

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Pour une suite donnée  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ , la matrice des moments d'ordre  $k$   $M_k(y)$  est une matrice symétrique réelle carrée de dimension  $\binom{n+k}{n}$  dont les lignes et les colonnes sont indicées par  $\alpha \in \mathbb{N}_k^n$  et définie par :

$$M_k(y)_{\alpha,\beta} = L_y(x^\alpha x^\beta) = y_{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_k^n.$$

La matrice des moments  $M_k(y)$  définit la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$  sur  $\mathbb{R}^n[x]_k$  ([74, Section 2.7]) :

$$\langle p, q \rangle_y = L_y(pq) = \langle p, M_k(y)q \rangle_y = p^T M_k(y)q, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^{\binom{n+k}{n}},$$

où les polynômes  $p, q \in \mathbb{R}^n[x]_k$  et leurs vecteurs de coefficients respectifs  $p, q \in \mathbb{R}^{\binom{n+k}{n}}$  ont été identifiés.

#### Exemple 6.

Soient  $n = 2$  et  $k = 2$ , alors la matrice des moments  $M_2(y)$  est exprimée comme :

$$M_2(y) = \begin{pmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} & y_{20} & y_{11} & y_{02} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} & y_{30} & y_{21} & y_{12} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} & y_{21} & y_{12} & y_{03} \\ y_{20} & y_{30} & y_{21} & y_{40} & y_{31} & y_{22} \\ y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{02} & y_{12} & y_{03} & y_{22} & y_{13} & y_{04} \end{pmatrix}.$$

Il est important de remarquer que si la mesure  $\nu$  est une mesure représentante pour la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ , alors :

$$\forall q \in \mathbb{R}^n[x], \quad \langle q, M_k(y)q \rangle_y = L_y(q^2) = \int q^2 d\nu \geq 0.$$

Ainsi,  $M_k(y) \succeq 0$ . La semi-définie positivité de la matrice des moments de la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  est donc une condition nécessaire pour que la séquence ait une mesure représentante  $\nu$ . Comme précédemment, le cas multi-dimensionnel est plus complexe que le cas unidimensionnel puisque dans ce dernier cas, la condition sur la matrice des moments (qui est une matrice de Hankel dans ce cas) est également une condition suffisante. Dans le cas multi-dimensionnel, des conditions suffisantes d'existence d'une mesure représentante, portant sur la séquence et sa matrice des moments, ont été proposées.

**Proposition 1** (Condition de Carleman multivariée). [74, Section 2.7]

Soit la suite  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  satisfaisant  $M_k(y) \succeq 0$  pour tout  $k = 0, 1, \dots$  alors :

- si  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  vérifie

$$\forall i = 1, \dots, n, \sum_{k=1}^{+\infty} L_y \left( x_i^{2k} \right)^{-\frac{1}{2k}} = +\infty, \quad (4.42)$$

alors  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  a une mesure représentante déterminée sur  $\mathbb{R}^n$ .

- S'il existe  $a, c > 0$  tels que

$$|y_\alpha| \leq ca^{|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad (4.43)$$

alors  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  a une mesure représentante déterminée dont le support est contenu dans  $[-a, a]^n$ .

Les extensions de ce résultat aux mesures supportées dans un ensemble semi-algébrique basique sont fondées sur les matrices de localisation qui sont maintenant définies.

**Définition 11** (Matrice de localisation). [74, Section 2.7.1]

Soient  $n \in \mathbb{N}$ , une séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  et  $u \in \mathbb{R}^n[x]$  un polynôme confondu avec le vecteur de ses coefficients suite à un abus de notations, indexés par  $\gamma \in \mathbb{N}^n$ .  $M_k(uy)$  est la matrice de localisation d'ordre  $k$  par rapport à  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  et  $u$ . La matrice de localisation est une matrice symétrique, carrée de dimensions  $\binom{n+k}{n}$  dont les lignes et les colonnes sont indexées par  $\alpha \in \mathbb{N}_k^n$  et définie par :

$$M_k(uy)_{\alpha, \beta} = L_y \left( u(x) x^\alpha x^\beta \right) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} u_\gamma y_{\gamma + \alpha + \beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_k^n.$$

**Exemple 7.**

Soient  $n = 2$ ,  $k = 1$  et la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^2}$ . Soit  $f \in \mathbb{R}^2[x]$  avec  $f : x \mapsto a + bx_1 + cx_2^2$ . Considérons le premier élément de la matrice de localisation  $M_1(fy)$  :

$$M_1(fy)_{00,00} = L_y(f(x) x^{00} x^{00}) = L_y(f(x)) = ay_{00} + by_{10} + cy_{02}.$$

Les autres coefficients sont obtenus de manière identique et la matrice de localisation  $M_1(f, y)$  s'exprime explicitement comme :

$$M_1(fy) = \begin{pmatrix} ay_{00} + by_{10} + cy_{02} & ay_{10} + by_{20} + cy_{12} & ay_{01} + by_{11} + cy_{03} \\ ay_{10} + by_{20} + cy_{12} & ay_{20} + by_{30} + cy_{22} & ay_{11} + by_{21} + cy_{13} \\ ay_{01} + by_{11} + cy_{13} & ay_{11} + by_{21} + cy_{13} & ay_{02} + by_{12} + cy_{04} \end{pmatrix}.$$

De même que la matrice des moments, la matrice de localisation  $M_k(uy)$  définit une forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_y^u$  sur  $\mathbb{R}^n[x]_k$  :

$$\langle p, M_k(uy)q \rangle_y^u = L_y(upq),$$

pour tous les polynômes  $p, q \in \mathbb{R}^n[x]_d$ . De plus, si  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  a une mesure représentante  $\nu$ , alors :

$$\forall q \in \mathbb{R}^n[x]_k, \quad \langle q, M_k(uy)q \rangle_y^u = L_y(uq^2) = \int_{\mathbb{R}^n} uq^2 d\nu.$$

Ainsi,  $M_k(uy) \succeq 0$  est une condition nécessaire pour que la séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  ait une mesure représentante  $\nu$  dont le support est contenu dans l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq 0\}$ .



## Extensions positives et plates des matrices de moments

**Définition 12** (Extension positive et extension plate). [74, Section 2.7.2]

Soit la séquence  $y_\alpha = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n}$  telle que  $M_d(y) \succeq 0$ , s'il existe une série de scalaires  $y_\beta$ ,  $2d < |\beta| < 2(d+1)$  telle que la nouvelle séquence finie  $(y_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}_{2d+2}^n}$  satisfait  $M_{d+1}(y) \succeq 0$  alors  $M_{d+1}(y)$  est appelée **une extension positive** de  $M_d(y)$ . Si, de plus,  $\text{rang}(M_{d+1}(y)) = \text{rang}(M_d(y))$  alors  $M_{d+1}(y)$  est appelée **une extension plate** de  $M_d(y)$ .

**Théorème 2** (Extension plate et mesure représentante atomique). [74, Section 2.7.2]

Soit la séquence  $y_\alpha = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n}$ , alors cette séquence admet une mesure représentante  $M_d(y)$ -atomique  $\mu$  (cf. Annexe C.1) sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $M_d(y) \succeq 0$  et  $M_d(y)$  admet une extension plate  $M_{d+1}(y) \succeq 0$ .

Ce théorème sera très important numériquement afin de détecter et construire les solutions optimales du problème d'optimisation polynomial (4.33)

### Exemple 8.

Soit la séquence  $y_\alpha = \{2, 1, 1\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_1^1$ . La matrice des moments associée à cette séquence est donnée par :

$$M_1(y_\alpha) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Une extension positive de cette matrice des moments est donnée par la matrice des moments :

$$M_2(y_\gamma) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0,$$

correspondant à la séquence  $(y_\gamma) = \{2, 1, 1, 1, 1, 1\}$ ,  $\gamma \in \mathbb{N}_2^1$ .  $M_2(y_\gamma)$  est également une extension plate de  $M_1(y_\alpha)$  puisque  $\text{rang}(M_2(y_\gamma)) = \text{rang}(M_1(y_\alpha)) = 2$  et par le Théorème 2, on en déduit que la séquence  $y_\alpha$  admet une mesure représentante 2-atomique  $\mu = \delta_0 + \delta_1$  (somme de deux mesures de Dirac définies respectivement en les points  $\{0\}$  et  $\{1\}$ ). La détermination exacte des points  $\{0\}$  et  $\{1\}$  ainsi que des poids attachés à la combinaison linéaire définissant  $\mu$  fait appel à un algorithme de reconstruction qui sera vu en détail dans une section suivante.

## Le problème des K-moments

Nous nous sommes ainsi dotés de tous les outils permettant d'établir le principal résultat caractérisant les séquences  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  qui sont des séquences de moments d'une mesure positive  $\nu$  dont le support  $\text{supp}(\nu) \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$  où  $\mathbf{K}$  est un ensemble semi-algébrique basique défini par :

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, \forall i = 1, \dots, r\} \quad (4.44)$$

pour des polynômes  $g_j \in \mathbb{R}[x]$ ,  $j = 1, \dots, r$  donnés. Suivant la terminologie de la référence [74], il s'agit du problème des **K**-moments.

**Théorème 3** (Conditions LMI). [74, Section 2.7.3]

Soit  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  une séquence donnée de  $\mathbb{R}$  et soit  $\mathbf{K}$  un ensemble défini par (4.44) et supposé compact. La séquence  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$  a une mesure de Borel finie et représentante dont le support est contenu dans  $\mathbf{K}$  si et seulement si

$$M_k(g_J y) \geq 0, \forall J \subseteq \{1, \dots, r\}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (4.45)$$

où  $g_J$ ,  $J \subset \{1, \dots, r\}$  est la notation pour le polynôme  $x \mapsto g_J(x) = \prod_{j \in J} g_j(x)$  ( $g_\emptyset = 1$ ).

On peut remarquer que  $M_k(g_\emptyset y) = M_k(y)$  est la matrice des moments d'ordre  $k$  associée à  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ .

**Théorème 4** (Condition de représentation). [74, Section 2.7.3]

Soit l'ensemble  $\mathbf{K}$  semi-algébrique basique donné par (4.44) pour lequel les polynômes  $g_j \in \mathbb{R}[x]$  sont de degré  $2v_j$  ou  $2v_j - 1$ ,  $\forall j = 1, \dots, r$  et soient une séquence  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_{2k}^n}$  et  $v = \max_j v_j$ .

Alors,  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_{2k}^n}$  a une mesure  $\mu$  représentante  $\text{rang}(M_{d-v}(y))$ -atomique dont le support est contenu dans  $\mathbf{K}$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1-  $M_d(y) \succeq 0$ ,  $M_{d-v}(g_j y) \succeq 0$ ,  $\forall j = 1, \dots, r$ ,
- 2-  $\text{rang}(M_d(y)) = \text{rang}(M_{d-v}(y))$ .

Ce résultat est l'équivalent de celui présenté au Théorème 2 relatif à l'extension plate d'une matrice des moments mais modifié pour tenir compte de la spécificité du problème des  $\mathbf{K}$ -moments. Il sera très utile pour la reconstruction des solutions optimales globales du problème d'optimisation quadratique non convexe.

#### 4.4.4 Une hiérarchie convergente de relaxations SDP

Nous revenons au problème d'optimisation initial dont nous souhaitons calculer la solution globalement optimale tel qu'il a été rappelé à la Section 4.4.1 et donné par :

$$f^* = \inf_{x \in \mathbf{K}} f(x) = c^T x, \quad (4.46)$$

où l'ensemble des solutions réalisables  $\mathbf{K}$  de ce problème d'optimisation est l'ensemble semi-algébrique, réel, basique et compact donné par :

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, r\}. \quad (4.47)$$

Les fonctions polynomiales ou affines  $g_j$  sont explicitement données en (4.33). Nous définissons une hiérarchie de relaxations semi-définies 4.48 dont les valeurs optimales constitue une séquence monotone non décroissante de bornes inférieures qui converge de manière finie vers l'optimum global  $f^*$  du Problème (4.46).

$$\begin{aligned} f_d^* &= \inf_y L_y(c^T x) \\ &\quad M_d(y) \succeq 0 \\ \text{sous} \quad &\quad M_{d-v_j}(g_j y) \succeq 0, j = 1, \dots, r \\ &\quad y_0 = 1, \end{aligned} \quad (4.48)$$

où  $g_0 = 1$  par convention,  $v_j = \lceil (\deg(g_j))/2 \rceil$ ,  $j = 0, \dots, r$ ,  $d \geq d_0 = \max\{\lceil (\deg(f))/2 \rceil, \max_{j=1, \dots, r} v_j\}$ .  $L_y$  est la fonctionnelle linéaire de Riesz,  $M_d(y)$  est la matrice des moments et  $M_{d-v_j}(g_j y)$  est la matrice de localisation associées à  $y$  et aux polynômes  $g_j$ .

#### Remarque 21.

Dans le cas particulier qui nous concerne où le problème est un problème quadratique non convexe, la relaxation (4.48) pour  $d = 1$  correspond à la relaxation classique SDP pour laquelle on a  $f_1^* \leq f^*$  et  $x_1^*$  n'est pas un point réalisable à l'optimum pour le problème non convexe sauf quand  $X^* = x^* x^{*T}$ .

**Exemple 9.**

Soit le problème QCLP avec une seule contrainte quadratique non convexe pour  $n = 2$

$$\begin{aligned} f^* &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} c^T x \\ \text{sous} \quad & x^T Q x + q^T x + p \geq 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

où  $c^T = [c_1 \ c_2]$ ,  $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ ,  $q^T = [q_1 \ q_2]$ . La relaxation (4.48) d'ordre 1 pour ce problème va donc s'écrire comme

$$\begin{aligned} f_1^* &= \inf_y c_1 y_{10} + c_2 y_{01} \\ \text{sous} \quad & M_1(y) = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & M_0(gy) = p y_{00} + q_1 y_{10} + q_2 y_{01} + 2Q_{12} y_{11} + Q_{11} y_{20} + Q_{22} y_{02} \geq 0, \\ & y_{00} = 1, \end{aligned} \quad (4.50)$$

où  $g(x) = x^T Q x + q^T x + p$ . La relaxation SDP (4.29) appliquée au problème (4.49) va s'écrire

$$\begin{aligned} f_{SDP}^* &= \inf_{x, X} c^T x \\ \text{sous} \quad & \begin{bmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & \text{trace}(QX) + q^T x + p \geq 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

où  $X = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{bmatrix}$ . En comparant les formulations (4.50) et (4.51), il est facile de voir qu'elles sont identiques si l'on identifie la séquence finie des moments  $y = \{y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{20}, y_{11}, y_{02}\}$  et le vecteur des variables de décision  $[1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$  de (4.51).

**Remarque 22.**

Il est facile de montrer que  $f_d^* \leq f^*$  pour tout  $d$  et de plus,  $f_d^* \leq f_{d+1}^*$  pour tout  $d \geq d_0$  puisque le Problème d'optimisation (4.48) est plus contraint à l'ordre  $d+1$  qu'à l'ordre  $d$ .

**Remarque 23.**

La convergence de la séquence de bornes inférieures  $f_d^*$  est un résultat reposant essentiellement sur la Positivstellensatz de Putinar [74, Section 2.4.1] qui fournit un certificat de positivité d'un polynôme sur l'ensemble  $\mathbf{K}$  en termes de polynômes sommes de carrés comme il sera vu dans la section suivante établissant le problème dual du Problème (4.48).

**Convergence finie de la séquence de relaxations SDP**

Une des caractéristiques intéressantes de cette hiérarchie de relaxations est le résultat de convergence finie obtenu sous la condition qu'une hypothèse technique (cf. Hypothèse 2.14 dans la référence [74, Section 2.4.1]) sur les polynômes définissant l'ensemble  $\mathbf{K}$  soit vérifiée. Cette hypothèse est relativement faible puisqu'elle est satisfaite dans notre cas du fait de la compacité assumée de cet ensemble  $\mathbf{K}$  (cf. [74, Section 2.4.1]).

**Théorème 5** (Convergence). [74, Section 6.1.1]

Soit la relaxation d'ordre  $d$  donnée par (4.48) et sa valeur optimale  $f_d^*$  alors :

- 1-  $f_d^* \rightarrow f^*$  quand  $d \rightarrow \infty$  ;
- 2- Si le Problème (4.46) possède un unique minimiseur global  $x^* \in \mathbf{K}$  et si  $y_d^*$  est une solution quasi optimale de la relaxation (4.48) d'ordre  $d$  avec  $L_y(c^T x^*) \leq f_d^* + 1/d$  alors  $L_{y_d^*}(x_j) \rightarrow x_j^*$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

#### Remarque 24.

Comme il est indiqué dans le Théorème 6.5 de la référence [74, Section 6.1.1], la convergence finie vers l'optimum (c.-à-d. il existe un ordre fini  $d$  tel que  $f_d = f^*$  de la suite de relaxations SDP) peut être obtenue sous une hypothèse relativement faible portant sur les polynômes définissant les contraintes (Hypothèse 6.4 de [74, Section 6.1.1]). De plus, le lien entre des conditions classiques (indépendance linéaire des gradients des contraintes, condition de complémentarité stricte, condition suffisante d'optimalité du second ordre) et connues en théorie de l'optimisation non linéaire, optimiseur global et solution optimale de la relaxation est également fait.

#### Algorithme de calcul des minimiseurs globaux

La résolution de la relaxation d'ordre  $d$  (4.48) ne pose pas de difficulté théorique pour un nombre de variables de décision raisonnable puisqu'il s'agit d'un problème d'optimisation SDP pour lequel il existe de nombreux solveurs libres et disponibles dans différents langages ([9], [50]). Une fois cette résolution effectuée, il est nécessaire de disposer d'un test d'optimalité permettant de décider si  $f_d^* < f^*$  (il faut alors augmenter l'ordre de la relaxation si cela est possible numériquement) ou  $f_d^* = f^*$  d'une part et d'une procédure de construction d'une ou des solutions optimales globales dans ce dernier cas, d'autre part. Une condition suffisante va permettre de fournir un test d'optimalité.

#### Théorème 6. [74, Section 6.1.2]

Soient  $f_d^*$  la valeur optimale de la relaxation (4.48) d'ordre  $d$ , supposée être atteinte à la solution  $y_d^*$  et  $v = \max_{j=1, \dots, r} v_j$ . Si  $\text{rang}(M_{d-v}(y_d^*)) = \text{rang}(M_d(y_d^*))$  alors  $f_d^* = f^*$  et il existe au moins  $s = \text{rang}(M_d(y_d^*))$  minimiseurs globaux.

Le Théorème 6 établit l'existence des solution optimales globales si la condition de rang est satisfaite. De plus, si cette condition de rang est satisfaite et comme il a été vu à l'Exemple 9, les solutions optimales globales du problème initial non convexe peuvent être obtenues à l'aide de la connaissance de la séquence optimale  $y_d^*$ . Dans un premier temps, nous présentons les principes de l'extraction de ces solutions optimales pour ensuite les synthétiser dans un algorithme d'extraction.

Nous supposons donc que la relaxation (4.48) d'ordre  $s$  est exacte ( $f_s^* = f^*$ ) et que la condition de rang du Théorème 6 est vérifiée :

$$\text{rang}(M_{s-v}(y_s^*)) = \text{rang}(M_s(y_s^*)) = k. \quad (4.52)$$

Plusieurs étapes distinctes sont nécessaires afin de réaliser l'extraction des  $k$  solutions optimales  $x(i) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

- 1- Factorisation de Cholesky  $VV^T$  de  $M_s(y_s^*)$  :

Si la condition de rang (4.52) est vraie en  $y_s^*$ , on sait d'après le Théorème 4 que  $y_s^*$  est le vecteur des moments d'une mesure de probabilité de Borel  $k$ -atomique  $\mu$  et supportée sur l'ensemble  $\mathbf{K}$ . Cela signifie que cette mesure peut être écrite :

$$\mu = \sum_{j=1}^k \lambda_j \delta_{x(j)}, \quad \lambda_j > 0, \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = y_0 = 1.$$

Il est donc possible d'écrire la matrice des moments comme :

$$M_s(y_s^*) = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_s(x^*(j)) v_s(x^*(j))^T = \bar{V} D \bar{V}^T,$$

où  $D \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les  $\lambda_j$  et  $\bar{V} = \begin{bmatrix} v_s(x^*(1)) & v_s(x^*(2)) & \cdots & v_s(x^*(k)) \end{bmatrix}$ . De fait, la valeur exacte des poids  $\lambda_j$  n'influence pas la procédure d'extraction puisqu'une autre matrice  $M_s(\tilde{y}_s^*)$  calculée avec d'autres poids  $\tilde{\lambda}_j$  donnerait les mêmes solutions globales optimales  $x(j)^*$ ,  $j = 1, \dots, k$ . De ce fait, la première étape se résume à décomposer la matrice  $M_s(\tilde{y}_s^*)$  en facteurs de Cholesky  $M_s(\tilde{y}_s^*) = VV^T$ . La factorisation de Cholesky est une fonction classique disponible dans toutes les bibliothèques d'algèbre linéaire (fonction `chol` dans MATLAB®).

- 2- Calcul de la forme échelonnée en colonnes  $U$  de la matrice  $V$  :

Pour n'importe quelle matrice  $V$ , il est possible de réaliser des opérations élémentaires portant sur ses colonnes (échange de deux colonnes, combinaison linéaire de colonnes remplaçant une colonne) afin d'obtenir une forme particulière pour cette matrice qui sera telle que :

- 1- Toutes les colonnes nulles sont à droite ;
- 2- Le premier élément non nul de chaque colonne est 1 (1 pivot) ;
- 3- Si  $j > i$ , le 1 pivot de la colonne  $c_j$  est sous le 1 pivot de la colonne  $c_i$ .

Fondée sur un algorithme d'élimination de Gauss, la forme échelonnée en colonnes  $U$  de la matrice  $V$  peut être obtenue comme la matrice transposée de la forme échelonnée réduite en lignes de la matrice  $V$ . Ainsi, elle sera obtenue comme  $U = \text{chol}(V)'$  en MATLAB®).

**Exemple 10.**

*Les matrices suivantes sont sous forme échelonnée en colonnes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

*alors que celles-ci ne le sont pas :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si l'on indexe chaque ligne de  $U$  avec un monôme  $x^\alpha$  dans la base de  $v_s(x)$ , les éléments pivots de  $U$  correspondent aux monômes  $x^{\beta_j}$ ,  $j = 1, \dots, k$  de la base générant les  $k$  solutions. Cela signifie que si l'on note  $w(x) = \begin{bmatrix} x^{\beta_1} & x^{\beta_2} & \cdots & x^{\beta_k} \end{bmatrix}^T$ , alors

$$v_x(x) = U w(x) \tag{4.53}$$

pour toute solution  $x = x(j)^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

- 3- Résolution du système polynomial (4.53) :

Il est donc nécessaire de trouver les solutions du système polynomial (4.53) afin d'obtenir les solutions optimales globales. Cela se réduit en fait à résoudre un problème d'algèbre linéaire décomposé en plusieurs étapes.

3.1- Extraction des matrices de multiplication  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  définies par :

$$N_i w(x) = x_i w(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

3.2- Former la combinaison linéaire aléatoire des matrices de multiplication :

$$N = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i,$$

où  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des nombres aléatoires tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

3.3- Calculer la décomposition ordonnée de Schur de  $N$  :

$$N = QTQ^T,$$

où  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_k] \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$  est une matrice orthogonale et  $T$  est une matrice triangulaire supérieure avec les valeurs propres de  $N$  sur sa diagonale, rangées dans l'ordre croissant.

On obtient les solutions optimales comme :

$$x_i(j)^* = q_j^T N_i q_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

Cette procédure, utilisée dans le code de la boîte à outils MATLAB® GloptiPoly dédiée à la résolution de problèmes des moments [60], est résumée dans l'Algorithme 6.

---

**Algorithme 6** EXTRACTION DES MINIMISEURS GLOBAUX

---

**Entrée:** Matrice des moments  $M_s(y_k^*)$  d'ordre  $k$ .

**Sortie:**  $r$  points  $x(i)^* \in \mathbf{K}$ ,  $i = 1, \dots, k$  qui constituent le support des solutions optimales du Problème des moments d'ordre  $d$ .

---

- 1: Calculer la factorisation de Cholesky  $VV^T$  de  $M_s(y_k^*)$ ;
  - 2: Calculer la forme échelonnée en colonne  $U$  de  $V$ ;
  - 3: Extraire les matrices de multiplication  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de  $U$ ;
  - 4: Calculer  $N = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i$  avec les coefficients  $\lambda_i$ , générés aléatoirement;
  - 5: Calculer la décomposition de Schur  $N = QTQ^T$ ;
  - 6: Calculer  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_k]$ ;
  - 7: Calculer  $x_i(j)^* = q_j^T N_i q_j$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, k$ .
- 

Des exemples numériques d'application de cet algorithme d'extraction sont donnés dans la référence [59] ainsi qu'une discussion détaillée sur les aspects numériques du test portant sur la condition de rang (4.52). D'autre part, une heuristique est également proposée pour étendre cette procédure aux cas pour lesquels cette condition n'est pas vérifiée afin de reconstruire des solutions qui, toutefois pourront être non réalisables pour le problème initial.

**Remarque 25.**

*Quand la condition de rang (4.52) et que la matrice des moments est de rang 1, la solution optimale globale est unique et égale au vecteur des moments d'ordre 1.*

## Algorithme général de résolution

Nous présentons maintenant l'algorithme général mettant en œuvre la méthode utilisant les relaxations convexes successives des moments.

---

### Algorithme 7 HIÉRARCHIE DE RELAXATIONS CONVEXES

---

**Entrée:** Vecteur de la fonction coût  $c$ , l'ensemble  $\mathbf{K}$  défini par les contraintes quadratiques et les contraintes affines  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , un nombre  $\bar{d}$  pour l'ordre de relaxation le plus élevé à utiliser.

**Sortie:** Valeur optimale  $f^*$  de la fonction critère et vecteur optimal  $x^*$  minimiseur global du Problème (4.46) ou borne inférieure  $f_d^*$  de  $f^*$ .

---

- ▷ *Résolution du problème SDP de la relaxation d'ordre  $d$*
  - 1: Résoudre le problème d'optimisation SDP (4.48) pour obtenir  $f_d^*$  et  $y_d^*$  s'il existe ;
  - 2: **si**  $y_d^*$  n'existe pas **alors**
  - 3:    $f_d^*$  ne fournit qu'une borne inférieure  $f_d^* \leq f^*$  ;
  - 4: **sinon si**  $d < \bar{d}$  **alors**
  - 5:    $d \leftarrow d + 1$  ;
  - 6:   Retour à l'étape 1 ;
  - 7: **fin si**
  - ▷ *Test d'optimalité globale*
  - 8: **si**  $\text{rang}(M_{d-v}(y_d^*)) = \text{rang}(M_d(y_d^*)) = k$  avec  $v = \max_j v_j$  **alors**
  - 9:    $f_d^* = f^*$  et il existe au moins  $\text{rang}(M_d(y_d^*)) = k$  minimiseurs globaux  $y^*$  pouvant être extraits.
  - 10: **fin si**
  - 11: **si**  $(\text{rang}(M_{d-v}(y_d^*)) \neq \text{rang}(M_d(y_d^*)))$  et  $(d < \bar{d})$  **alors**
  - 12:    $d \leftarrow d + 1$  ;
  - 13:   Retour à l'étape 1 ;
  - 14: **sinon**
  - 15:   Stop.  $f_d^*$  n'est qu'une borne inférieure de  $f^*$ .
  - 16: **fin si**
- 

### Remarque 26.

Le vecteur  $c$  définissant le critère peut être arbitrairement choisi par l'utilisateur dans l'Algorithme 7 alors que pour le problème d'évitement de collision, il est imposé que  $c^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^m$ .

#### 4.4.5 Liens avec les certificats de positivité des polynômes via la dualité SDP

La relaxation d'ordre  $d$  (4.48) est un problème d'optimisation SDP (donc convexe) pour lequel il est possible d'appliquer la dualité conique Lagrangienne classique [27, Chap. 5]. En notant,  $M_d(y) = v_d(y)v_d(y)^T = \sum_{|\alpha| \leq 2d} C_\alpha^0 y^\alpha$  et  $M_{d-v_j}(g_j y) = \sum_{|\alpha| \leq 2d} C_\alpha^j y^\alpha$ , avec les matrices symétriques réelles  $C_\alpha^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, r$  de dimensions appropriées, le multiplicateur de Lagrange pour chaque contrainte SDP est une matrice semi-définie positive  $X_j$ . Ainsi, le lagrangien associé au Problème primal (4.48) est donné par :

$$\mathcal{L}(y, \lambda, X_j) = c^T y + \lambda(1 - y_0) - \langle M_d(y), X_0 \rangle - \sum_{1 \leq j \leq r} \langle M_{d-v_j}(g_j y), X_j \rangle, \quad (4.54)$$

où le produit scalaire usuel pour les matrices réelles est  $\langle A, B \rangle_F = \text{trace}(A^T B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$  et les matrices  $X_j \succeq 0$ ,  $\forall j = 0, \dots, r$ . La fonction duale est définie comme  $g(y, \lambda, X_j) = \inf_y \mathcal{L}(y, \lambda, X_j)$ .

Puisque  $\mathcal{L}(y, \lambda, X_j)$  est une fonction affine du vecteur des moments  $y$ , on obtient :

$$g(y, \lambda, X_j) = \begin{cases} \lambda, & \text{si } c_\alpha - \lambda 1_{\alpha=0} - \sum_{0 \leq j \leq r} \langle C_\alpha^j, X_j \rangle = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n, \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad X_j \succeq 0, \forall j = 0, \dots, r \quad (4.55)$$

Le dual de (4.48) s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned} \lambda_d^* &= \sup_{\lambda, X_j} \lambda \\ \text{sous} \quad & c_\alpha - \lambda 1_{\alpha=0} - \sum_{0 \leq j \leq r} \langle C_\alpha^j, X_j \rangle = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n, \\ & X_j \succeq 0, \forall j = 0, \dots, r. \end{aligned} \quad (4.56)$$

**Remarque 27.**

Pour le cas particulier des relaxations SDP (4.48) associées au problème d'optimisation polynomial (4.33), la forme du problème dual (4.56) sera telle que  $c_\alpha = 0$  pour  $|\alpha| > 1$ .

**Exemple 11.**

Reprenons l'Exemple (9) pour lequel on considère le problème QCLP avec une seule contrainte quadratique non convexe pour  $n = 2$  et auquel on ajoute les contraintes de boîtes  $1 - x_1^2 \geq 0$  et  $1 - x_2^2 \geq 0$ .

$$\begin{aligned} f^* &= \inf_{x \in \mathbb{R}^2} c^T x \\ \text{sous} \quad & x^T Q x + q^T x + p \geq 0, \\ & 1 - x_1^2 \geq 0, \\ & 1 - x_2^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

où  $c^T = [c_1 \ c_2]$ ,  $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$ ,  $q^T = [q_1 \ q_2]$ . La relaxation (4.48) d'ordre 1 pour ce problème va donc s'écrire comme

$$\begin{aligned} f_1^* &= \inf_y c_1 y_{10} + c_2 y_{01} \\ \text{sous} \quad & M_1(y) = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & M_0(gy) = p y_{00} + q_1 y_{10} + q_2 y_{01} + 2Q_{12} y_{11} + Q_{11} y_{20} + Q_{22} y_{02} \geq 0, \\ & y_{00} - y_{20} \geq 0, \\ & y_{00} - y_{02} \geq 0, \\ & y_{00} = 1, \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $g(x) = x^T Q x + q^T x + p$ . Le lagrangien associé au Problème (4.58) et ordonné en factorisant les variables duales est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, \lambda, X_j) &= \lambda + (-\lambda + p X_1 + X_2 + X_3 - \text{trace}(C_{00}^0 X_0)) y_{00} \\ &+ (c_1 + q_1 X_1 - \text{trace}(C_{10}^0 X_0)) y_{10} + (c_2 + q_2 X_1 - \text{trace}(C_{01}^0 X_0)) y_{01} \\ &+ (2Q_{12} X_1 - \text{trace}(C_{11}^0 X_0)) y_{11} + (Q_{11} X_1 - X_2 - \text{trace}(C_{20}^0 X_0)) y_{20} \\ &+ (Q_{22} X_1 - X_3 - \text{trace}(C_{02}^0 X_0)) y_{02}, \end{aligned}$$



où  $X_0 \succeq 0$ ,  $X_1, X_2, X_3 \geq 0$  et les matrices  $C_\alpha^0$  sont définies par :

$$\begin{aligned} C_{00}^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_{10}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_{01}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_{11}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & C_{20}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_{02}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le problème dual de la relaxation SDP d'ordre 1 est donc le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= \sup_{\lambda, X_0, X_1, X_2, X_3} \lambda \\ &\quad -\lambda + pX_1 + X_2 + X_3 = \text{trace}(C_{00}^0 X_0), \\ &\quad c_1 + q_1 X_1 = \text{trace}(C_{10}^0 X_0), \\ &\quad c_2 + q_2 X_1 = \text{trace}(C_{01}^0 X_0), \\ &\quad 2Q_{12} X_1 = \text{trace}(C_{11}^0 X_0), \\ \text{sous} \quad &\quad Q_{11} X_1 - X_2 = \text{trace}(C_{20}^0 X_0), \\ &\quad Q_{22} X_1 - X_3 = \text{trace}(C_{02}^0 X_0), \\ &\quad X_0 \succeq 0, \\ &\quad X_1 \geq 0, \\ &\quad X_2 \geq 0, \\ &\quad X_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

L'interprétation des contraintes du Problème dual (4.56) permet d'aller plus loin. En reprenant la contrainte égalité et en multipliant chaque côté de l'égalité par le monôme  $x^\alpha$  et en faisant la somme sur  $\alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n$ , on obtient :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n} c_\alpha x^\alpha - \lambda = \sum_{j=0}^r \langle X_j, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_{2d}^n} C_\alpha^j x^\alpha \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

qui correspond à :

$$c^T x - \lambda = \sum_{j=0}^r g_j(x) v_{d-v_j}(x)^T X_j v_{d-v_j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En factorisant chaque matrice  $X_j = \sum_{l=1}^{t_j} q_{jl} q_{jl}^T$  pour  $t_j \in \mathbb{N}$ , on obtient :

$$c^T x - \lambda = \sum_{j=0}^r g_j(x) \left( \sum_{l=1}^{t_j} \underbrace{(q_{jl}^T v_{d-v_j}(x))^2}_{q_{jl}(x)^2} \right) = \sum_{j=0}^r g_j(x) \sigma_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\sigma_j \in \Sigma[x]_{d-v_j}$  est le polynôme SOS  $\sum_{l=1}^{t_j} q_{jl}(x)^2$  pour  $j = 0, \dots, r$ . Le Problème dual (4.56) peut donc se réinterpréter en termes de la recherche de  $\lambda$  et de polynômes SOS solutions du problème

d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_d^* &= \sup_{\lambda, \{\sigma_j\}} \lambda \\ \text{sous} \quad & c^T x - \lambda = \sum_{j=0}^r \sigma_j(x) g_j(x), \quad \sigma_j \in \Sigma(x)_{d-v_j}, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (4.60)$$

**Remarque 28.**

Le Problème d'optimisation SDP (4.60) est un problème d'optimisation plus contraint que le Problème (4.38) de la Remarque 20 puisque la contrainte de positivité sur l'ensemble  $\mathbf{K}$  est remplacée par la contrainte plus restrictive exprimée sous forme de certificat de positivité  $c^T x - \lambda = \sum_{j=0}^r \sigma_j(x) g_j(x)$ , pour des polynômes SOS  $\sigma_j$  de degré borné par  $2(d - v_j)$  pour  $j = 0, \dots, r$ . Cette observation est cohérente avec le fait que le Problème primal (4.48) est lui-même une relaxation du Problème initial (4.33) puisque la théorie de la dualité lagrangienne impose que la relaxation d'un problème primal induise que son dual soit plus contraint.

**4.4.6 Quelques exemples illustratifs**

A des fins de comparaison, nous reprenons les quatre exemples numériques didactiques et aléatoires utilisés dans la section précédente pour analyser la méthode SDR.

**Exemples en 2 dimensions**

**Exemple 12.**

- 1- Pour la relaxation d'ordre 1, nous retrouvons bien l'optimum global au point  $x_1^* = 0, x_2^* = 5$ .

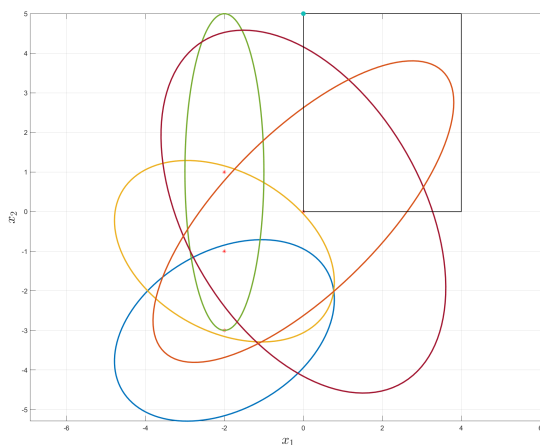


FIGURE 4.9 – Exemple 1 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 5)$ .

- 2- Pour la relaxation d'ordre 2, nous retrouvons bien l'optimum global au point  $x_1^* = 3.04, x_2^* = 0.6186$  qui est un des sommets du domaine réalisable qui est non convexe.

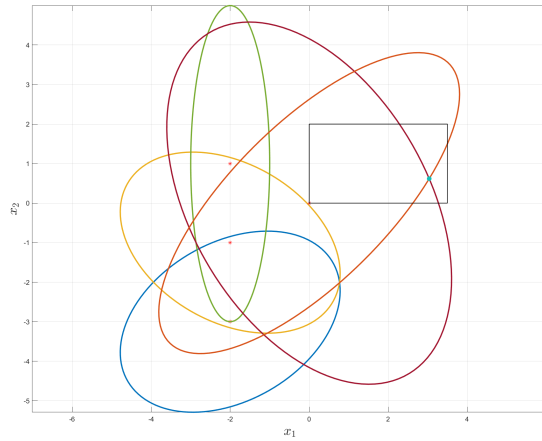


FIGURE 4.10 – Exemple 2 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (3.04, 0.62186)$ .

3- Pour la relaxation d'ordre 2, nous retrouvons bien l'optimum global au point  $x_1^* = 0.715$ ,  $x_2^* = 3.7$ .

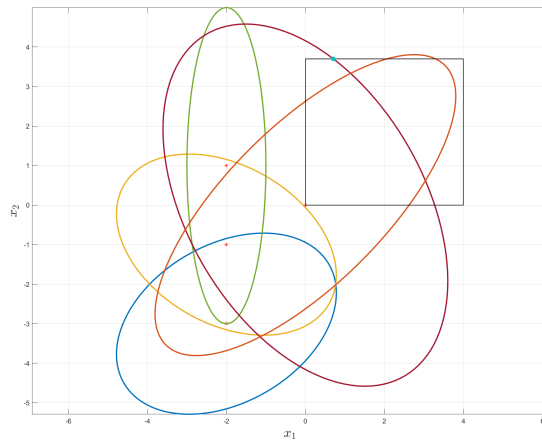


FIGURE 4.11 – Exemple 3 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.715, 3.7)$ .

4- Dans cet exemple, l'optimum est obtenu, pour la relaxation d'ordre 1, au point  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0.4$  qui est le sommet en haut et à gauche du polytope des contraintes linéaires.



FIGURE 4.12 – Exemple 4 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0.4)$ .

*Dans les cas 1 et 4 pour lesquels l'optimum global est un sommet du polytope des contraintes linéaires, la relaxation d'ordre 1 (on rappelle qu'elle est identique dans ce cas à la relaxation SDP classique) suffit pour obtenir un certificat numérique d'optimalité globale. Pour les cas 2 et 3 pour lesquels l'optimum global est atteint sur la frontière d'un des ellipsoïdes (cas 3) ou à l'intersection de deux ellipsoïdes (cas 2), il est nécessaire d'aller jusqu'à la relaxation d'ordre 2. Cela s'explique aisément du fait que la relaxation d'ordre 1, étant identique à la relaxation SDP classique, donne le minimum d'un problème d'optimisation dans lequel seules les contraintes convexes sont encore présentes. Dans les cas 1 et 4, l'optimum global calculé serait le même en l'absence des contraintes non convexes qui ne jouent pas de rôle dans ce cas.*

### Exemples aléatoires en $n$ dimensions

Là encore, et toujours à des fins de comparaison, nous reprenons exactement les données des exemples aléatoires de la Section 4.3.3. Ces données sont mises à l'échelle afin que l'ensemble réalisable du problème d'optimisation associé soit contenu dans une boîte  $[-1, 1]^n$  pour permettre un meilleur conditionnement numérique des données fournies au solveur SDP. Dans le tableau suivant, nous donnons le nombre de variables  $n$  non nulles à l'optimum calculé, le nombre de contraintes quadratiques  $N$ , l'ordre  $d$  de la relaxation pour laquelle une solution optimale a été certifiée numériquement par le solveur, le temps CPU mesuré approximativement par MATLAB© pour résoudre le problème SDP issu de la relaxation ainsi que la valeur du critère à l'optimum calculé  $f_d^*$ .

#### Exemple 13.

Case #	Caractéristiques de la solution				
	$n$	$N$	$d$	CPU (s)	$f_d^*$
2D 1	2	10	3	3.9	0.84
2D 2	1	30	3	1.91	2.17
3D	2	17	4	1.82	1.45
4D	1	10	3	1.94	0.0891
5D	1	10	3	8.36	0.5074
8D	0	6	3	41.22	0

TABLE 4.3 – Quelques résultats d'exemples aléatoires

Sur ces problèmes, la hiérarchie de relaxations SDP fonctionne bien pour des dimensions faibles mais son efficacité, en termes de temps de calcul, décroît rapidement avec l'augmentation de la dimension du problème. L'augmentation du temps de calcul avec l'augmentation de la dimension du problème limite également fortement les chances de calcul effectif de l'optimum global du fait que l'on ne peut recourir à des relaxations d'ordre très élevé en cas d'échec pour les premières relaxations. Toutefois, comme on peut le constater à la lecture de la Table 4.1, l'augmentation de la dimension du problème entraîne également un écart plus important de sous optimalité de la part de la méthode SDR.

#### Exemple 14.

Case #	Caractéristiques de la solution				
	$n$	$N$	$d$	CPU (s)	$f_d^*$
2D 1	1	10	5	1.55	1.3703
2D 2	2	30	3	1.56	0.6527
3D	1	17	4	2.12	0.5402
4D	1	10	4	4.76	0.5
5D	1	10	4	17.64	1.142
8D	1	2	4	1633.5	3.1623

TABLE 4.4 – Quelques résultats d'exemples aléatoires difficiles

Les conclusions concernant ces exemples plus difficiles sont confirmées et accentuées puisque la limitation en dimension de la méthode des moments est encore plus marquée pour ces exemples où la solution « facile » a été écartée par construction.

## 4.5 Un algorithme par subdivision fondé sur la méthode de l'ellipsoïde

### 4.5.1 Introduction

Dans cette section, nous proposons un algorithme direct qui emprunte à la fois aux méthodes par intervalle pour l'optimisation globale, aux méthodes de subdivision et aux algorithmes de branch and cut. A partir d'un ellipsoïde initial défini dans l'espace des variables de décision et incluant le domaine réalisable initial, l'idée est de générer une séquence d'ellipsoïdes de taille plus restreinte par génération de plans de coupe et qui va converger vers un ellipsoïde d'une taille fixée par la précision recherchée et incluant le minimum global du problème QCLP étudié. Le cœur de l'algorithme repose donc sur l'algorithme classique de l'ellipsoïde. Cet algorithme a originellement été introduit dans la littérature scientifique soviétique par D.B. Yudin et A.S. Nemirovski dans les articles conjoints [108], [109] pour une application à l'optimisation de fonctions convexes non nécessairement différentiables puis explicité dans la référence [98]. Son adaptation à la résolution de systèmes d'inégalités linéaires a ensuite été publiée par L.G. Khachian [69], référence devenue particulièrement renommée puisque l'algorithme proposé est en temps polynomial, permettant ainsi également de montrer que la programmation linéaire définit une classe de problèmes pouvant être résolus en temps polynomial. On pourra se reporter à la référence [19] pour une présentation détaillée des différentes étapes historiques du développement de cet algorithme ainsi que pour obtenir tous les détails techniques des différentes variantes de l'algorithme. Nous ne reproduisons pas ici tous ces détails mais rappelons les éléments essentiels et indispensables à la compréhension de l'algorithme proposé en nous appuyant sur [19] et [26],

### 4.5.2 Méthode de l'ellipsoïde pour la minimisation d'une fonction convexe

Dans un premier temps, nous présentons le principe général de l'algorithme de l'ellipsoïde dans le cadre de la minimisation d'une fonction convexe  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  non nécessairement différentiable dans tout son domaine de définition. L'idée est de construire une séquence d'ellipsoïdes de  $\mathbb{R}^n$ , de taille décroissante, qui contiennent tous un minimiseur de la fonction  $f$  en utilisant le fait que pour un sous-gradient calculé en un point, il est possible d'identifier ou de calculer (à l'aide d'un plan sécant) un demi-espace contenant ce point et ne contenant aucun minimiseur de  $f$ .

#### Remarque 29.

*En dimension  $n = 1$ , l'algorithme de l'ellipsoïde est exactement l'algorithme de bisection standard.*

Soit l'ellipsoïde  $\mathcal{E}^{(k)}$  donné à l'itération  $k$  et contenant un minimiseur de  $f$ . L'itération basique de l'algorithme de l'ellipsoïde consiste en deux étapes, répétées de manière itérative jusqu'à la convergence définie par une précision recherchée :

- 1- Calculer un sous-gradient  $h^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$  en le centre  $x^{(k)}$  de l'ellipsoïde ;
- 2- Calculer l'ellipsoïde  $\mathcal{E}^{(k+1)}$  de volume minimal contenant le demi ellipsoïde

$$\mathcal{E}^{(k)} \cap \{z \mid h^{(k)T}(z - x^{(k)}) \leq 0\}$$

qui contient un minimiseur de  $f$ .

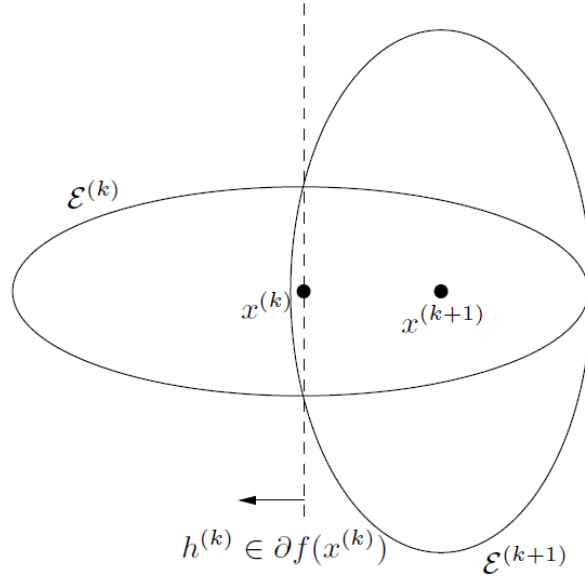


FIGURE 4.13 – Illustration d’une itération de la méthode de l’ellipsoïde pour la minimisation d’une fonction convexe  $f$ .

Si l’on regarde chaque étape en détail, la première est très simple dans notre cas puisque la fonction objectif est linéaire, donc différentiable et le calcul du sous-gradient donnera le vecteur  $c$  à chaque étape. La clarification de la deuxième étape nécessite de montrer comment calculer l’ellipsoïde de volume minimal contenant le demi ellipsoïde incluant un minimiseur de la fonction. Un ellipsoïde  $\mathcal{E}$  de centre  $x_c$  est l’ensemble défini par :

$$\mathcal{E} = \{z : (z - x_c)^T P^{-1} (z - x_c) \leq 1\}, \quad (4.61)$$

où la matrice  $P \succ 0$  fixe la taille, la forme et l’orientation de l’ellipsoïde. Le volume de l’ellipsoïde est calculé à partir du volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  comme  $\text{vol}(\mathcal{E}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \sqrt{\det(P)}$  où  $\Gamma$  est la fonction Gamma [45]. L’ellipsoïde de volume minimal contenant le demi ellipsoïde défini par :

$$\{z : (z - x_c)^T P^{-1} (z - x_c) \leq 1, h^T (z - x_c) \leq 0\}, \quad (4.62)$$

est donné par :

$$\mathcal{E}_{min} = \left\{z : (z - x_c^+)^T P^{+^{-1}} (z - x_c^+) \leq 1\right\}, \quad (4.63)$$

où

$$\begin{aligned} x_c^+ &= x_c - \frac{1}{n+1} P \tilde{h}, \\ P^+ &= \frac{n^2}{n^2 - 1} \left( P - \frac{2}{n+1} P \tilde{h} \tilde{h}^T P \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

avec  $\tilde{h}$ , le sous-gradient normalisé  $\tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{h^T P h}} h$ . Les Equations (4.64) permettent de faire la mise à jour des ellipsoïdes dans l’algorithme et l’équation du centre mis à jour  $x_c^+$  correspond à un pas dans la direction de l’opposé du sous gradient dans les coordonnées définies par  $P$ . L’algorithme de base de la méthode de l’ellipsoïde peut donc s’écrire comme suit en pseudo-code.

---

**Algorithme 8** ELLIPSOIDOBJECTIVE( $n, P^{(0)}, x^{(0)}, f, \epsilon$ )

---

**Entrée:** Dimension du problème  $n$ , Ellipsoïde initial  $(P^{(0)}, x^{(0)})$  contenant  $x^*$ , fonction objectif  $f$ , précision finale  $\epsilon$

**Sortie:**  $\hat{x}$  approximation de  $x^* = \arg \min f$

- 1:  $k \leftarrow 0$
  - 2: **tant que**  $\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}} < \epsilon$  **faire**
  - 3: Calculer un sous gradient  $h^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$
  - 4:  $\tilde{h} \leftarrow \frac{h^{(k)}}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$
  - 5:  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \frac{1}{n+1} P^{(k)} \tilde{h}$
  - 6:  $P^{(k+1)} \leftarrow \frac{n^2}{n^2-1} (P^{(k)} - \frac{2}{n+1} P^{(k)} \tilde{h} \tilde{h}^T P^{(k)})$
  - 7:  $k \leftarrow k + 1$
  - 8: **fin tant que**
- 

**Remarque 30.**

L'algorithme de l'ellipsoïde n'est pas un algorithme de descente et il est donc intéressant de garder une trace du meilleur optimum calculé :

$$f_{\text{best}}^{(k)} = \min_{j=0, \dots, k} f(x^{(j)}). \quad (4.65)$$

**Remarque 31.**

L'algorithme de l'ellipsoïde est un algorithme convergent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\text{best}}^{(k)} = f^*. \quad (4.66)$$

Une démonstration détaillée de la convergence peut être trouvée dans la référence [26].

**Remarque 32.**

Le critère d'arrêt  $\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}} < \epsilon$  de l'Algorithme 8 se déduit du fait que pour tout point minimiseur  $x^* \in \mathcal{E}^{(k)}$  on a

$$f^* = c^T x^* \geq f(x^{(k)}) + h^{(k)T} (x^* - x^{(k)}),$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} f(x^{(k)}) - f^* &\leq -h^{(k)T} (x^* - x^{(k)}) \\ &\leq \max_{z \in \mathcal{E}^{(k)}} -h^{(k)T} (z - x^{(k)}) \\ &= \sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est facilement obtenue en résolvant le problème de maximisation sous la contrainte d'appartenance à l'ellipsoïde qui est un problème d'optimisation convexe.

Ainsi, la condition  $\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}} < \epsilon$  garantit que  $f(x^{(k)})$  approxime  $f^*$  avec une précision fixée par  $\epsilon$ .



Si l'on dispose, pour chaque itération  $k$ , d'une borne supérieure sur le coût optimal :  $f^* \leq f_{\text{best}}^* \leq f(x^{(k)})$ . Par définition du sous-gradient  $h \in \partial f(x)$ , nous avons :

$$f(z) \geq f(x) + h^T(z - x),$$

pour tout  $z$  et donc, si  $x^*$  est un minimiseur de la fonction, on a :

$$h^T(x^* - x) + f(x) \leq f^* \leq f_{\text{best}}^{(k)}.$$

Il est donc possible d'exclure le demi-plan  $\{z \mid h^T(z - x) > f_{\text{best}}^{(k)} - f(x)\}$  qui est tel que :

$$\{z \mid h^T(z - x) > f_{\text{best}}^{(k)} - f(x)\} \supset \{z \mid h^T(z - x) > 0\},$$

si  $f(x^{(k)}) > f_{\text{best}}^{(k)}$ . On réalise ainsi une coupe profonde (deep cut, cf. Figure 4.14) à chaque étape. Dans cet aménagement de l'algorithme de base, l'actualisation de l'ellipsoïde  $\mathcal{E}^{(k+1)}$  à chaque itération est faite en calculant l'ellipsoïde de volume minimum qui contient l'ensemble :

$$\mathcal{E}^{(k)} \cap \{z \mid h^{(k)T}(z - x^{(k)}) \leq f_{\text{best}}^{(k)} - f(x^{(k)})\}, \quad (4.67)$$

et qui est caractérisé par son centre  $x^{(k+1)}$  et la matrice  $P^{(k+1)}$  :

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{1 + n\alpha}{n + 1} P^{(k)} \tilde{h}^{(k)}, \\ P^{(k+1)} &= \frac{n^2(1 - \alpha^2)}{n^2 - 1} \left( P^{(k)} - \frac{2(1 + n\alpha)}{(n + 1)(1 + \alpha)} P^{(k)} \tilde{h}^{(k)} \tilde{h}^{(k)T} P^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{f(x^{(k)})}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}, \\ \tilde{h}^{(k)} &= \frac{1}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}} h^{(k)}. \end{aligned}$$

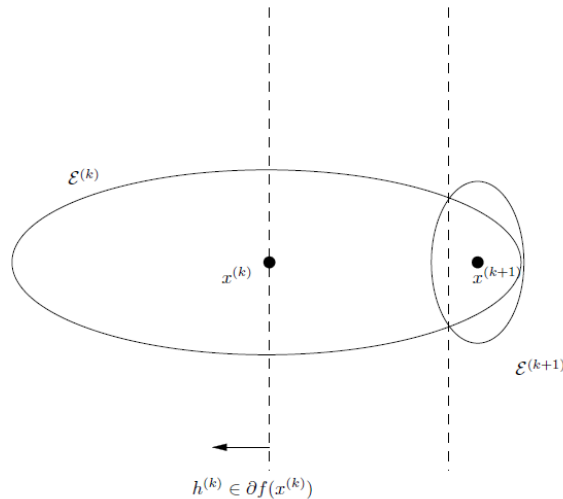


FIGURE 4.14 – Algorithme de l'ellipsoïde avec une coupe profonde.

Dans le cas de l'utilisation de coupes profondes, l'Algorithme 8 de l'ellipsoïde de base se décline comme :

---

**Algorithme 9** ELLIPSOIDOBJECTIVE( $n, P^{(0)}, x^{(0)}, f, f_{\text{best}}^{(k)}, \epsilon$ )

---

**Entrée:** Dimension du problème  $n$ , Ellipsoïde initial ( $P^{(0)}, x^{(0)}$ ) contenant  $x^*$ , fonction objectif  $f$ , une séquence de bornes supérieures  $f_{\text{best}}^{(k)}$ , précision finale  $\epsilon$ .

**Sortie:**  $\hat{x}$  approximation de  $x^* = \arg \min f$

- 1:  $k \leftarrow 0$
  - 2: **tant que**  $\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}} < \epsilon$  **faire**
  - 3: Calculer un sous gradient  $h^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$
  - 4: Mettre à jour la borne supérieure  $f_{\text{best}}^{(k)}$
  - 5:  $\alpha \leftarrow \frac{f(x^{(k)})}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$
  - 6:  $\tilde{h} \leftarrow \frac{h^{(k)}}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$
  - 7:  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \frac{1 + n\alpha}{n + 1} P^{(k)} \tilde{h}$
  - 8:  $P^{(k+1)} \leftarrow \frac{n^2}{n^2 - 1} (1_\alpha^2)(P^{(k)}) - \frac{2(1 + n\alpha)}{(n + 1)(1 + \alpha)} P^{(k)} \tilde{h} \tilde{h}^T P^{(k)}$
  - 9:  $k \leftarrow k + 1$
  - 10: **fin tant que**
- 

Cet algorithme peut également être utilisé pour des problèmes de minimisation d'une fonction convexe sous des contraintes inégalité. En effet, parmi les premiers travaux sur cet algorithme, on retrouve les résultats de Khachian [69] qui a développé cet algorithme pour identifier des solutions réalisables pour un système d'inégalités linéaires (cf. Figure 4.15).

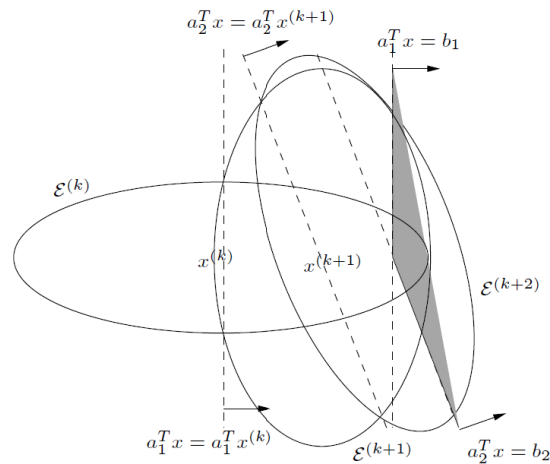


FIGURE 4.15 – Méthode de l'ellipsoïde pour tester la réalisabilité d'un système de deux inégalités linéaires  $a_1^T x \geq b_1$  et  $a_2^T x \geq b_2$ .

Cet algorithme peut ainsi être étendu à la résolution d'un problème d'optimisation convexe avec

des contraintes inégalité :

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ & \text{sous } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.69)$$

L'idée est toujours de générer une séquence d'ellipsoïdes de volume décroissant qui contiennent tous un minimiseur réalisable de la fonction  $f$ . Deux types d'itérations sont ainsi introduits. Le premier type est identique à celui déjà défini dans l'algorithme basique de l'ellipsoïde et peut être défini comme une coupe (éventuellement profonde) par rapport à l'objectif alors que le second définit une coupe par rapport à une contrainte violée et peut être identifiée comme une itération relative à une contrainte. Dans cette dernière, tous les points écartés par la coupe sont non réalisables alors que lors de l'itération relative à l'objectif, les points écartés sont tels qu'ils donnent un objectif plus grand ou égal à l'objectif correspondant à l'itéré courant. Nous présentons donc le principe de l'algorithme écrit en pseudo-code avec des coupes profondes.

---

**Algorithme 10** MÉTHODE DE L'ELLIPSOÏDE (CONTRAINTES)

---

**Entrée:** Ellipsoïde initial  $(P^{(0)}, x^{(0)})$  contenant  $x^*$  réalisable,  $f_{\text{best}}^{(k)} = \min_{j=0,1,\dots,k} f(x^{(j)})$  séquence de bornes supérieures

**Sortie:**  $\hat{x}$  approximation de  $x^* = \arg \min f$  sous  $g_i(x) \leq 0$

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: tant que  $x^{(k)}$  n'est pas réalisable faire
3:   si  $g_i(x^{(k)}) > 0$  pour  $i$  alors
4:     Calculer un sous gradient  $h^{(k)} \in \partial g_i(x^{(k)})$ 
5:      $\tilde{h}^{(k)} \leftarrow \frac{h^{(k)}}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$ 
6:      $\alpha \leftarrow \frac{g_i(x^{(k)})}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$ 
7:   sinon
8:     Calculer un sous gradient  $h^{(k)} \in \partial f(x^{(k)})$ 
9:      $\tilde{h}^{(k)} \leftarrow \frac{h^{(k)}}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$ 
10:    Actualiser  $f_{\text{best}}^{(k)}$ 
11:     $\alpha \leftarrow \frac{f(x^{(k)}) - f_{\text{best}}^{(k)}}{\sqrt{h^{(k)T} P^{(k)} h^{(k)}}}$ 
12:  fin si
13:   $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - \frac{1}{\alpha n + 1} P^{(k)} \tilde{h}^{(k)}$ 
14:   $P^{(k+1)} \leftarrow \frac{n}{n^2 - 1} (1 - \alpha^2) (P^{(k)} - \frac{2(1+n\alpha)}{(n+1)(\alpha+1)} P^{(k)} \tilde{h}^{(k)} \tilde{h}^{(k)T} P^{(k)})$ 
15:   $k \leftarrow k + 1$ 
16: fin tant que

```

---

En se fondant sur ces principes généraux, un algorithme ellipsoïdal de type Branch and Bound est proposé pour résoudre le Problème d'optimisation non convexe (4.33).

### 4.5.3 Un algorithme ellipsoïdal

Nous présentons l'algorithme général en pseudo-code. Il fait appel à des sous routines dont le pseudo-code est également donné en suivant. Il est à noter que seules les coupes simples et non les coupes profondes (deep cuts) ont été implantées dans cette version préliminaire de la mise en œuvre de l'algorithme.

---

**Algorithme 11** BRANCHANDBOUNDELLIPSOID( $n$ , ELLIPSOIDSLIST, LINEARCONSTRLIST,  $c$ ,  $k_{\text{Max}}$ ,  $V_{\text{Min}}$ )

---

**Entrée:** Dimension  $n$ , contraintes quadratiques non convexes ELLIPSOIDSLIST, contraintes linéaires LINEARCONSTRLIST, objectif linéaire  $c$ , paramètres de boucle  $k_{\text{Max}}$ ,  $V_{\text{Min}}$ .

**Sortie:** Centre de l'ellipsoïde final et coût  $(o_m, m)$ .

```

1: {Démarrer avec une sphère dans laquelle l'hypercube  $[-1, 1]^n$  est inscrit}
2:  $P_0 \leftarrow nI_n$ 
3:  $o_0 \leftarrow (0, \dots, 0)$ 
4:  $k \leftarrow 1$ 
5:  $L[k] \leftarrow (P_0, o_0)$ 
6:  $m \leftarrow +\infty$ 
7: tant que  $k < k_{\text{Max}}$  and  $k > 0$  faire
8:    $(P, o) \leftarrow L[k]$ 
9:   si VOLUMEELLIPSOID( $n, P$ )  $\leq V_{\text{Min}}$  alors
10:     $L_{\text{keep}} \leftarrow (P, o)$ 
11:     $k \leftarrow k - 1$ 
12:  sinon
13:    {Utiliser l'algorithme de l'ellipsoïde afin de réduire l'ellipsoïde courant par rapport aux contraintes linéaires, jusqu'à ce qu'aucune réduction ne soit possible : le centre est un point réalisable ou l'ellipsoïde est complètement non réalisable}
14:     $(P, o) \leftarrow \text{CUTELLIPSOIDLINERCONSTRAINTS}(n, P, o, \text{LINEARCONSTRLIST})$ 
15:    si  $P = \emptyset$  alors
16:       $k \leftarrow k - 1$ 
17:    fin si
18:    {Tester la réalisabilité du centre courant par rapport aux contraintes non convexes}
19:    si ISFEASIBLE( $o, \text{ELLIPSOIDSLIST}$ ) alors
20:      {Mettre à jour le minimum courant}
21:      si  $m > \min(m, c^T o)$  alors
22:         $m \leftarrow \min(m, c^T o)$ 
23:         $o_m \leftarrow o$ 
24:      fin si
25:      {Réduire l'objectif par la méthode de l'ellipsoïde sans contrainte}
26:       $(P, o) \leftarrow \text{CUTELLIPSOIDOBJECTIVE}(n, P, o, c)$ 
27:       $L[k] \leftarrow (P, o)$ 
28:    sinon
29:      {Si le centre de l'ellipsoïde courant n'est pas réalisable pour les contraintes non convexes, subdiviser}
30:       $(P_1, o_1, P_2, o_2) \leftarrow \text{BISECTELLIPSOID}(n, P, o)$ 
31:       $L[k] \leftarrow (P_1, o_1)$ 
32:       $k \leftarrow k + 1$ 
33:       $L[k] \leftarrow (P_2, o_2)$ 
34:    fin si
35:  fin si
36: fin tant que
37: retourne  $(o_m, m)$ 

```

---

**Algorithme 12** VOLUMEELLIPSOID( $n, P$ )

---

**Entrée:** Dimension  $n$ , Matrice  $P$ .

**Sortie:** volume  $v$  of ellipsoïde  $X^T P X \leq 1$ .

```

1:  $v \leftarrow \frac{\det(P)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ 
2: retourne  $v$ 

```

---

---

**Algorithme 13** CUTELLIPSOIDLINERCONSTRAINTS( $n, P_0, o_0, \text{LINEARCONSTRLIST}$ )

---

**Entrée:** Dimension  $n$ ,  $(P_0, o_0)$  pour l'ellipsoïde  $(X - o_0)'P_0(X - o_0) \leq 1$ , contraintes linéaires  $\text{LINEARCONSTRLIST}$ .

**Sortie:**  $(P, o)$  pour le nouveau ellipsoïde  $(X - o)'P(X - o) \leq 1$ .

- 1: {Utiliser l'algorithme de l'ellipsoïde afin de réduire l'ellipsoïde courant par rapport aux contraintes linéaires, jusqu'à ce qu'aucune réduction ne soit possible : le centre est un point réalisable ou l'ellipsoïde est complètement non réalisable}
  - 2:  $k \leftarrow 0$
  - 3: **tant que**  $o_k$  n'est pas réalisable **faire**
  - 4:   **si**  $g_i(o_k) > 0$  pour  $g_i \in \text{LINEARCONSTRLIST}$  **alors**
  - 5:     Calculer le gradient  $g^{(k)} = \partial g_i(o_k)$
  - 6:     **si**  $g_i(o_k) > \sqrt{g^{(k)T} P_k g^{(k)}}$  **alors**
  - 7:       {Terminer l'algorithme si tous les points du nouveau ellipsoïde violent le contrainte  $i$ }
  - 8:       **retourne**  $(\emptyset, \emptyset)$
  - 9:     **sinon**
  - 10:        $\tilde{g}^{(k)} \leftarrow \frac{g^{(k)}}{\sqrt{g^{(k)T} P_k g^{(k)}}}$
  - 11:        $o_{k+1} \leftarrow o_k - \frac{1}{n+1} P_k \tilde{g}^{(k)}$
  - 12:        $P_{k+1} \leftarrow \frac{n^2}{n^2-1} \left( P_k - \frac{2}{(n+1)} P_k \tilde{g}^{(k)} \tilde{g}^{(k)T} P_k \right)$
  - 13:        $k \leftarrow k+1$
  - 14:     **fin si**
  - 15: **fin si**
  - 16: **fin tant que**
  - 17: **retourne**  $(P_k, o_k)$
- 

---

**Algorithme 14** CUTELLIPSOIDOBJECTIVE( $n, P_0, o_0, c$ )

---

**Entrée:** Dimension  $n$ ,  $(P_0, o_0)$  pour l'ellipsoïde  $(X - o_0)'P_0(X - o_0) \leq 1$ , objective linéaire  $c^T X$ .

**Sortie:**  $(P, o)$  pour le nouveau ellipsoïde  $(X - o)'P(X - o) \leq 1$ .

- 1: {Réduire l'objectif par la méthode de l'ellipsoïde sans contrainte}
  - 2: Le gradient est simplement  $g = c$
  - 3:  $\tilde{c} \leftarrow \frac{c}{\sqrt{c^T P_0 c}}$
  - 4:  $o \leftarrow o_0 - \frac{1}{n+1} P_0 \tilde{c}$
  - 5:  $P \leftarrow \frac{n^2}{n^2-1} \left( P_0 - \frac{2}{(n+1)} P_0 \tilde{c} \tilde{c}^T P_0 \right)$
  - 6: **retourne**  $(P, o)$
- 

---

**Algorithme 15** BISECTELLIPSOID( $n, P_0, o_0$ )

---

**Entrée:** Dimension  $n$ ,  $(P_0, o_0)$  pour l'ellipsoïde  $(X - o_0)'P_0(X - o_0) \leq 1$ .

**Sortie:** Deux ellipsoïdes  $(P_1, o_1)$  et  $(P_2, o_2)$  qui contiennent l'ellipsoïde initial  $(X - o_0)'P_0(X - o_0) \leq 1$ .

- 1: {Couper en deux en utilisant la méthode de l'ellipsoïde en fonction de la normale au plus long axe.}
  - 2:  $g \leftarrow$  le vecteur propre de  $P_0$  correspondant à la plus grande valeur propre de  $P_0$ .
  - 3:  $\tilde{g} \leftarrow \frac{g}{\sqrt{g^T P_0 g}}$
  - 4:  $o_1 \leftarrow o_0 - \frac{1}{n+1} P_0 \tilde{g}$
  - 5:  $P_1 \leftarrow \frac{n^2}{n^2-1} \left( P_0 - \frac{2}{(n+1)} P_0 \tilde{g} \tilde{g}^T P_0 \right)$
  - 6:  $o_2 \leftarrow o_0 + \frac{1}{n+1} P_0 \tilde{g}$
  - 7:  $P_2 \leftarrow P_1$
  - 8: **retourne**  $(P_1, o_1), (P_2, o_2)$
- 

#### 4.5.4 Quelques exemples illustratifs

Pour illustrer le fonctionnement et l'efficacité (ou ses limites) de la méthode de subdivision par ellipsoïde, nous reprenons les 4 exemples en dimension 2 qui ont servi d'illustration pour la méthode SDR et celle des moments ainsi que les exemples construits aléatoirement en dimensions supérieures.

Dans le premier cas pour lequel il est possible de représenter le domaine réalisable ainsi que la solution optimale, nous donnons le nombre d'itérations de la boucle principale de l'Algorithme 11 ainsi que la valeur du paramètre  $v$ , sortie de la fonction VOLUMEELLIPSOID qui définit en partie la précision de la solution trouvée. De plus, un échantillonnage de points réalisables tirés aléatoirement est également tracé sur la première figure qui représente les ellipses d'exclusion et le polytope réalisable (en noir). Le point optimal est représenté par un cercle sur cette figure. Une deuxième figure donnant également les différents ellipsoïdes générés par l'algorithme est proposé. Cette figure permet d'avoir une meilleure idée de la manière dont se passe la recherche avec l'illustration claire de la concentration d'ellipsoïdes de taille de plus en plus faible autour du point final.

## Exemples en 2 dimensions

### Exemple 15.

Les données des 4 exemples en deux dimensions ne sont pas rappelées puisqu'on peut les retrouver à l'Exemple 1 et à l'Exemple 2.

- 1- L'Algorithme 11 fournit un optimum au point  $x_1^* = 0.0031$ ,  $x_2^* = 4.9932$  après 3752 itérations de la boucle principale pour  $v = 1.10^{-5}$ .

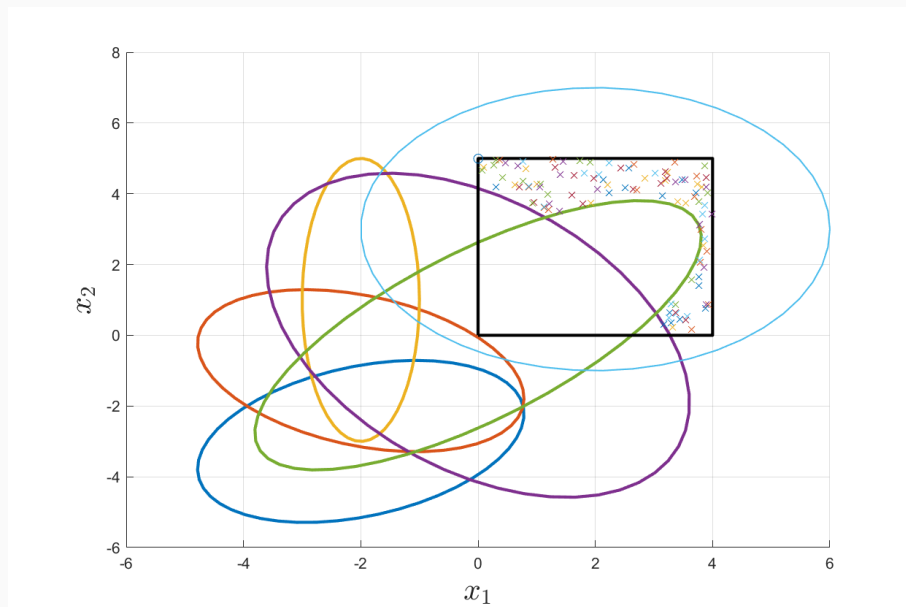


FIGURE 4.16 – Exemple 1 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.0031, 4.9932)$ .

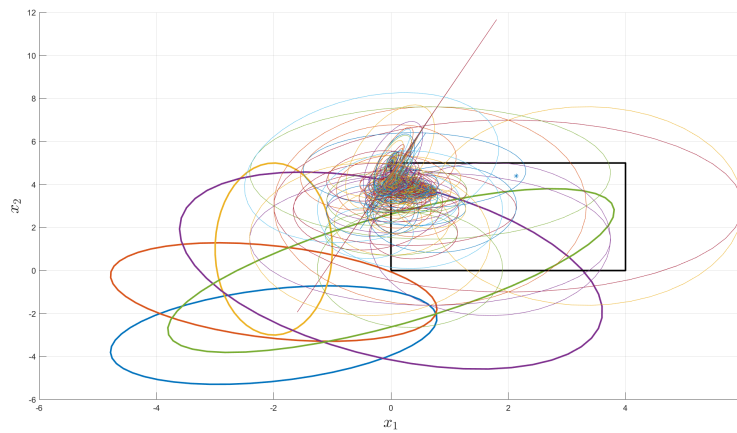


FIGURE 4.17 – Exemple 1 : suite d'ellipses et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.0031, 4.9932)$ .

2- L'Algorithme 11 fournit un optimum au point  $x_1^* = 3.105$ ,  $x_2^* = 0.61$  après 9590 itérations de la boucle principale pour  $v = 0.01$ .

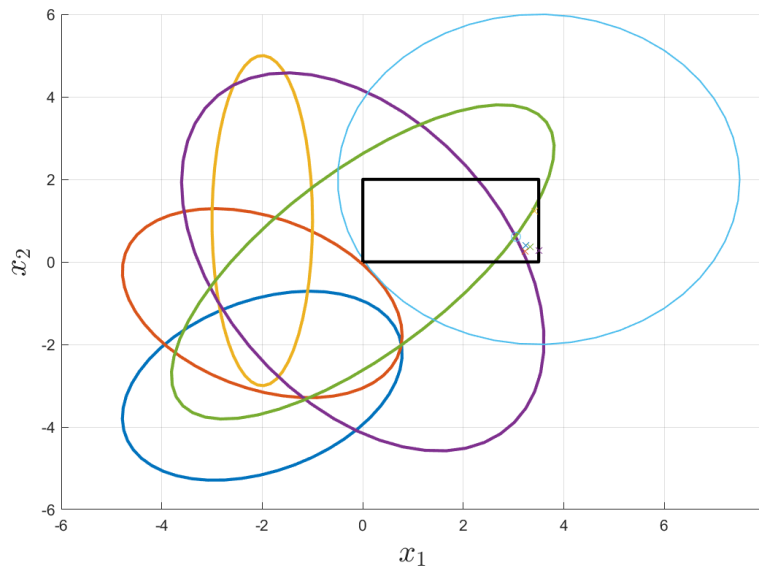


FIGURE 4.18 – Exemple 2 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (3.105, 0.61)$ .

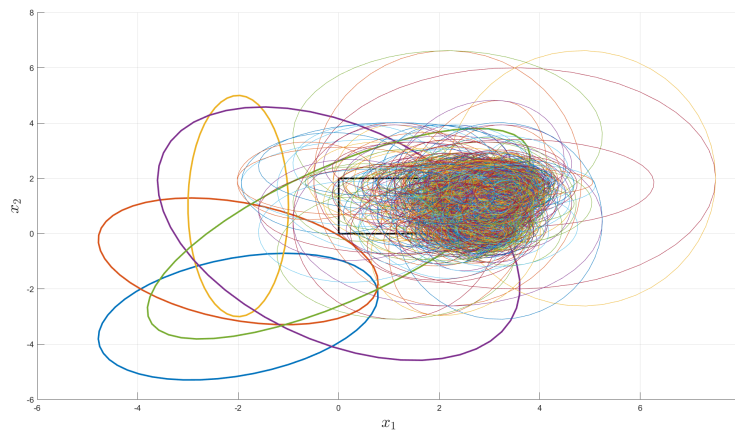


FIGURE 4.19 – Exemple 2 : suite d'ellipsoïdes et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (3.105, 0.61)$ .

3- L'Algorithme 11 fournit un optimum au point  $x_1^* = 0.7341$ ,  $x_2^* = 3.6850$  après 7188 itérations de la boucle principale pour  $v = 0.01$ . Il est à noter que pour gagner un ordre de grandeur en précision en fixant  $v = 0.001$ , il est nécessaire de réaliser 36662 itérations pour obtenir une solution optimale effectivement plus précise et donnée par  $x_1^* = 0.7132$ ,  $x_2^* = 3.6975$ . Cette difficulté peut s'expliquer par la non connexité du domaine réalisable qui est clairement illustrée par la Figure 4.21 avec deux foyers de concentration d'ellipses clairement distinguables et correspondant aux deux domaines réalisables.

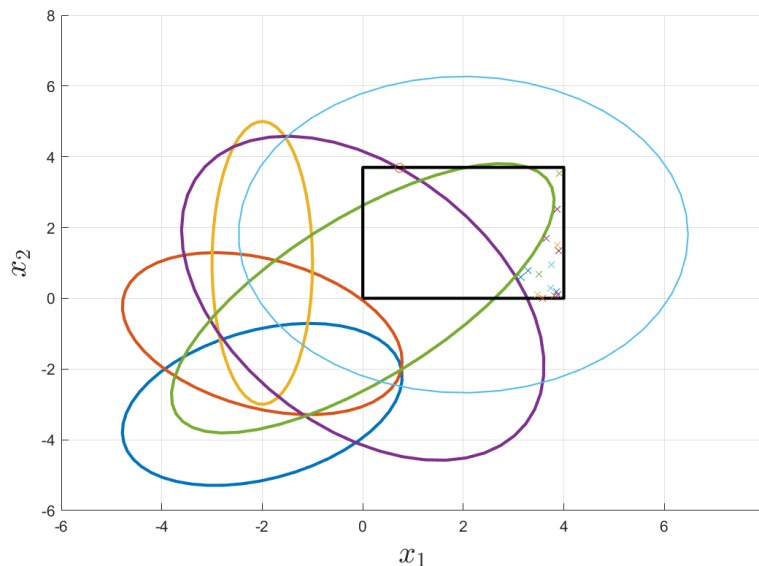


FIGURE 4.20 – Exemple 3 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.7341, 3.6850)$ .



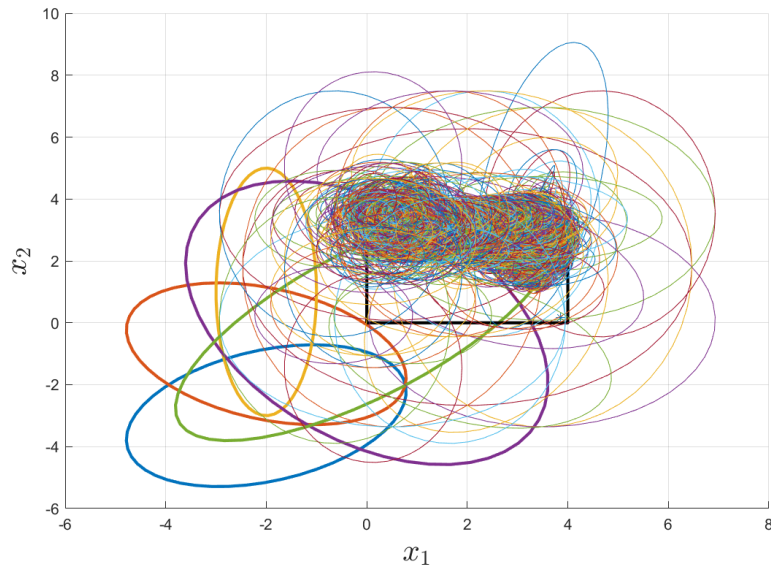


FIGURE 4.21 – Exemple 3 : suite d'ellipsoides et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.7341, 3.6850)$ .

4- L'Algorithme 11 fournit un optimum au point  $x_1^* = 0.0022$ ,  $x_2^* = 0.5457$  après 3609 itérations de la boucle principale pour  $v = 1.10^{-4}$ .

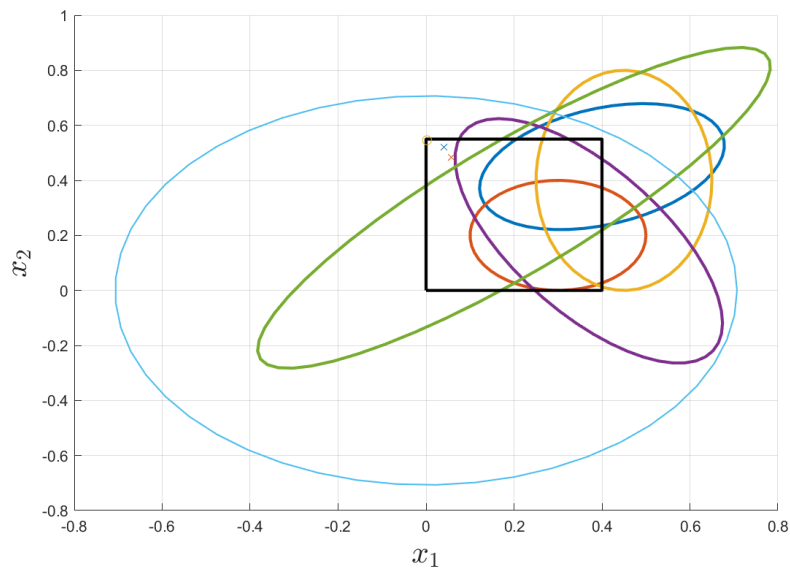


FIGURE 4.22 – Exemple 4 : domaine réalisable et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.0022, 0.5457)$ .

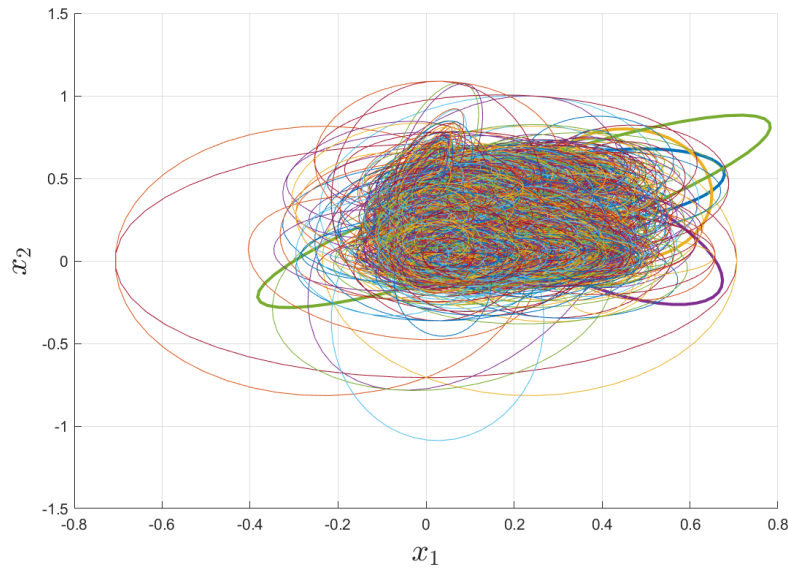


FIGURE 4.23 – Exemple 4 : suite d'ellipsoides et solution optimale  $(x_1^*, x_2^*) = (0.0022, 0.5457)$ .

### Exemples aléatoires en $n$ dimensions

Dans les deux Tableaux 4.5 et 4.6, nous donnons, pour chaque cas identifié par son label, la dimension du problème  $n$  (nombre de variables de décision), le nombre de contraintes quadratiques  $N$ , deux choix du paramètre de précision  $V_{\text{Min}}$  lié à la taille de l'ellipsoïde final, le nombre d'itérations  $It$  de la boucle principale, le temps CPU en secondes tel qu'il est estimé par une fonction propre à MATLAB©, la valeur optimale du critère obtenue avec la méthode des moments et la valeur du critère optimal obtenue avec la méthode de subdivision.

#### Exemple 16.

*Le Tableau 4.5 présente des résultats relativement attendus et conformes en partie à la méthode SDR en termes de précision puisque l'on retrouve une bonne précision des résultats quand la dimension du problème est faible et une moindre précision pour les dimensions supérieures qui réclament également un réglage plus fin du paramètre de précision  $V_{\text{Min}}$  pour un temps de calcul qui peut croître rapidement à la différence de la méthode SDR pour laquelle celui-ci reste la plupart du temps raisonnable. Il est important de remarquer que l'exemple en dimension 8 pose une difficulté numérique à la méthode qui ne peut trouver qu'une approximation grossière de la solution alors que celle-ci est relativement facile à trouver (cf. méthode SDR et méthode des moments). Cela peut s'expliquer par la nature de l'optimum qui est l'origine de l'espace des variables de décision et par le principe de la méthode de subdivision qui pour des valeurs très faibles de l'optimum sera en échec partiel.*

Case #	Caractéristiques de la solution						
	$n$	$N$	$V_{\text{Min}}$	It	CPU (s)	$f_d^*$	$f_{\text{ell}}^*$
2D 1	2	10	0.004	3280	2.5	0.84	0.88
2D 1	2	10	0.0004	19942	15.6	0.84	0.85
2D 2	2	30	0.004	187	0.6	2.17	2.26
2D 2	2	30	0.0004	680	1.3	2.17	2.18
3D	3	17	0.004	11023	14.1	1.45	1.50
3D	3	17	0.0004	142024	160.73	1.45	1.48
4D	4	10	0.0004	8392	8.02	0.0891	0.60
4D	4	10	0.00004	167812	144.2	0.0891	0.38
5D	5	10	0.00004	62	0.26	0.5074	1.93
5D	5	10	0.000000004	26580	26.1	0.5074	0.88
8D	8	6	0.0004	26	0.1	0	0.69

TABLE 4.5 – Quelques résultats d'exemples aléatoires

**Exemple 17.**

*Pour ces exemples plus difficiles, nous retrouvons les conclusions précédentes accentuées avec des temps de calcul relativement importants pour atteindre une précision relative pour les exemples d'une dimension plus importante. Ces temps de calcul correspondent à une implémentation basique de la méthode qui peut sans doute être très largement améliorée avec la mise en place de différentes stratégies plus fines (deep cuts par exemple).*

Case #	Caractéristiques de la solution						
	$n$	$N$	$V_{\text{Min}}$	It	CPU (s)	$f_d^*$	$f_{\text{ell}}^*$
2D 1	2	10	0.004	3222	2.53	1.3703	1.45
2D 1	2	10	0.0004	24589	17.12	1.3703	1.40
2D 2	2	30	0.0004	1301	2.18	0.6527	0.68
2D 2	2	30	0.00004	13054	18.15	0.6527	0.66
3D	3	17	0.004	8464	10.52	0.5402	0.74
3D	3	17	0.0004	178586	196.33	0.5402	0.59
4D	4	10	0.0004	5154	5.45	0.5	0.61
4D	4	10	0.00004	168833	171.6	0.5	0.54
5D	5	5	0.004	121	0.4	1.142	2.55
5D	5	5	0.0004	1763	2.08	1.142	1.91
5D	5	5	0.00004	54001	55.15	1.142	1.72
8D	8	2	0.0004	7652021	6181.3	3.16323	4.19

TABLE 4.6 – Quelques résultats d'exemples aléatoires difficiles

## 4.6 Notes d'implémentation et conclusions

Toutes les expérimentations numériques ont été faites sous MATLAB© avec différentes boîtes à outils officielles (Statistics and Machine Learning) ou libres (Yalmip, GloptiPoly) et avec le solveur SDP MOSEK© pour les méthodes des moments et SDR. Ce dernier n'est pas libre mais est actuellement le plus performant en termes de temps de calcul. Il peut toutefois être remplacé par un solveur libre du type SDPT3 [103] par exemple. La construction du problème SDP a été faite à l'aide de l'interface Yalmip pour lequel il y a peu d'équivalents. La suite CVX [56], [57] fournit une alternative sans doute moins complète en termes de modélisations (en particulier concernant les hiérarchies) et de solveurs SDP pris en compte. Il est important également de disposer d'une librairie de fonctions de base d'algèbre linéaire (factorisation de Cholesky, forme échelonnée, décomposition de Schur...).

Concernant les premiers résultats numériques, il apparaît que la méthode qui semble réaliser le meilleur compromis entre efficacité numérique, précision de la solution et facilité d'implémentation soit la méthode SDR. La méthode de l'ellipsoïde paraît la plus simple à mettre en œuvre du fait qu'elle ne réclame que très peu d'outils spécifiques (outils d'algèbre linéaire) mais elle paraît être assez rapidement prohibitive en temps de calcul quand la dimension augmente. La méthode des moments qui est la seule fournissant une garantie pour l'optimalité globale de la solution apparaît très limitée par la charge de calcul nécessaire quand la dimension augmente et ne permet pas de conclure dans tous les cas du fait de la limitation en nombre de variables de décision des solveurs SDP actuels. L'implémentation actuelle des moments dans la base des monômes induit sans doute également des limitations à la résolution numérique. De plus, cette méthode nécessite de nombreux outils complémentaires (manipulation symbolique de polynômes, solveur SDP efficace, interface pour construire le problème des moments et faire le lien avec les mesures) essentiellement accessibles actuellement dans un environnement MATLAB©.

Il est important de souligner que les résultats présentés sont très préliminaires dans le sens où les implémentations des méthodes sont très basiques. Même s'il semble que les nombreuses améliorations portant sur la mise en œuvre ne soient pas de nature à changer fondamentalement le bilan, il n'en reste pas moins qu'un travail numérique spécifique sur chaque algorithme permettrait de tirer des conclusions plus définitives. Au delà de ces aspects pratiques, il est également essentiel de rappeler que ces méthodes s'appliquent à un problème d'optimisation résultant de choix de modélisation reposant eux-mêmes sur des hypothèses restrictives. Une réflexion plus approfondie sur ces choix et ces hypothèses, qui n'était pas dans le périmètre de l'étude, serait essentielle afin de valider de manière plus complète les résultats de ce rapport.

Enfin, nous ne prétendons pas avoir épuisé les choix de méthodes possibles pour aborder la résolution des ces problèmes quadratiques pour lesquels de nombreux heuristiques existent dans la littérature. D'autres approches, comme celles relevant de l'optimisation probabiliste et prenant en compte explicitement le caractère stochastique du problème (cf. la thèse de Romain Serra [96]), auraient également pu être analysées.

# Annexe A

## Les repères de référence

### A.1 Le repère géocentrique équatorial

Le repère géocentrique équatorial  $\mathcal{R}_{\text{in}} = (O_T, \vec{u}_{X_{\text{in}}}, \vec{u}_{Y_{\text{in}}}, \vec{u}_{Z_{\text{in}}})$  est défini comme un repère pseudo-inertiel dans [104] par exemple, sous le nom *Geocentric Equatorial Coordinate System* ou *Earth Center Inertial*, dont l'origine est située au centre de la Terre, représenté par le point  $O_T$  et dont la base associée  $\mathcal{B}_{\text{in}}$  est définie par les vecteurs  $[\vec{u}_{X_{\text{in}}}, \vec{u}_{Y_{\text{in}}}, \vec{u}_{Z_{\text{in}}}]$  où :

- $\vec{u}_{Z_{\text{in}}}$  pointe vers le pôle nord terrestre suivant l'axe de rotation de la terre,
- $\vec{u}_{X_{\text{in}}}$  indique le point d'équinoxe vernal  $\gamma$  (point d'intersection ascendant ou nœud ascendant) porté par la droite obtenue par l'intersection entre le plan de l'écliptique (plan dans lequel se déplace la terre dans son mouvement autour du soleil) et le plan de l'équateur terrestre,
- l'axe  $(O_T, \vec{u}_{Y_{\text{in}}})$  qui complète le trièdre orthogonal direct,

Ce système de référence est illustré par la Figure A.1.

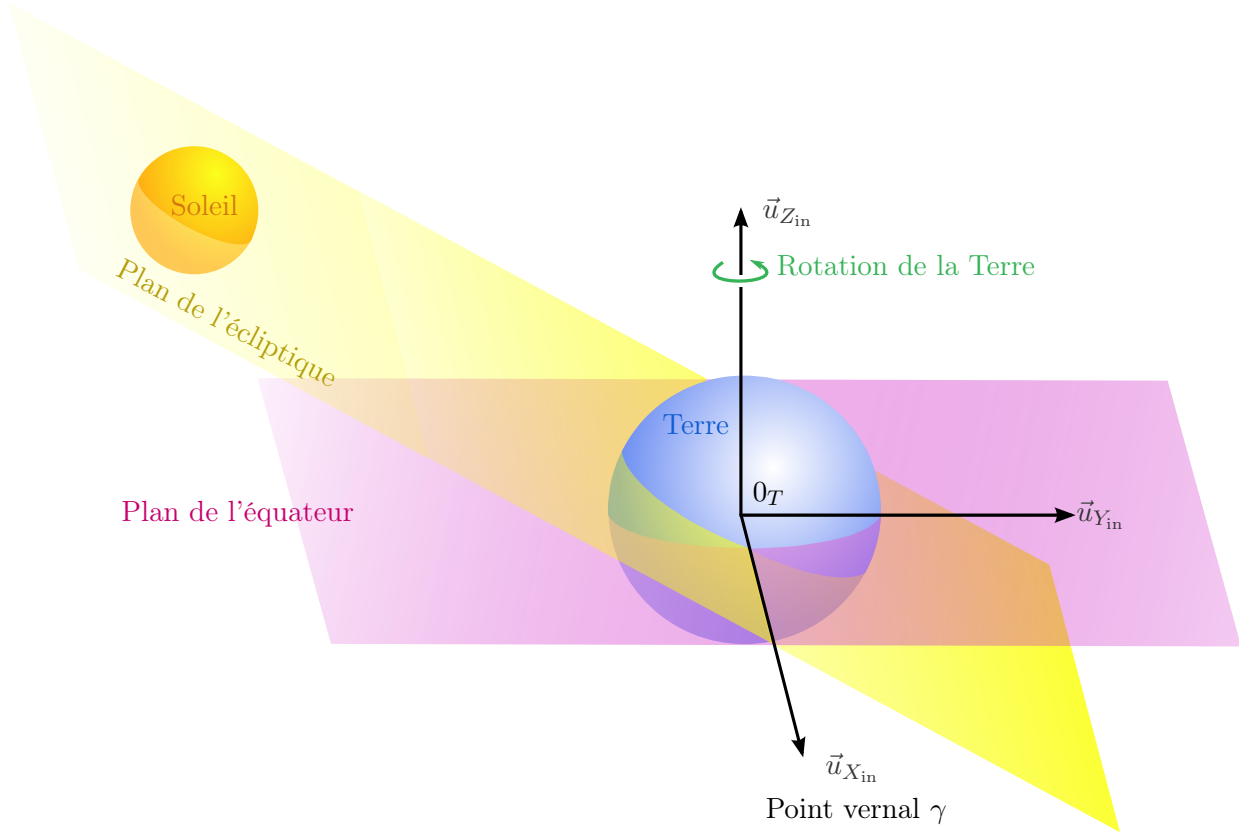


FIGURE A.1 – Repère géocentrique inertiel

Une position dans l'espace est repérée par ses trois coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  ou par ses trois coordonnées sphériques  $r$  (distance radiale),  $\alpha$  (ascension droite) et  $\delta$  (déclinaison) reliées entre elles de la façon suivante et illustrées par la Figure A.2.

$$x = r \cos \delta \cos \alpha, \quad (\text{A.1a})$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha, \quad (\text{A.1b})$$

$$z = r \sin \delta. \quad (\text{A.1c})$$

Les relations inverses s'écrivent :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (\text{A.2b})$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad (\text{A.2c})$$

où  $\alpha$  est choisi tel que  $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$  pour  $x > 0$  et  $\alpha \in [90^\circ, 270^\circ]$  pour  $x < 0$ .

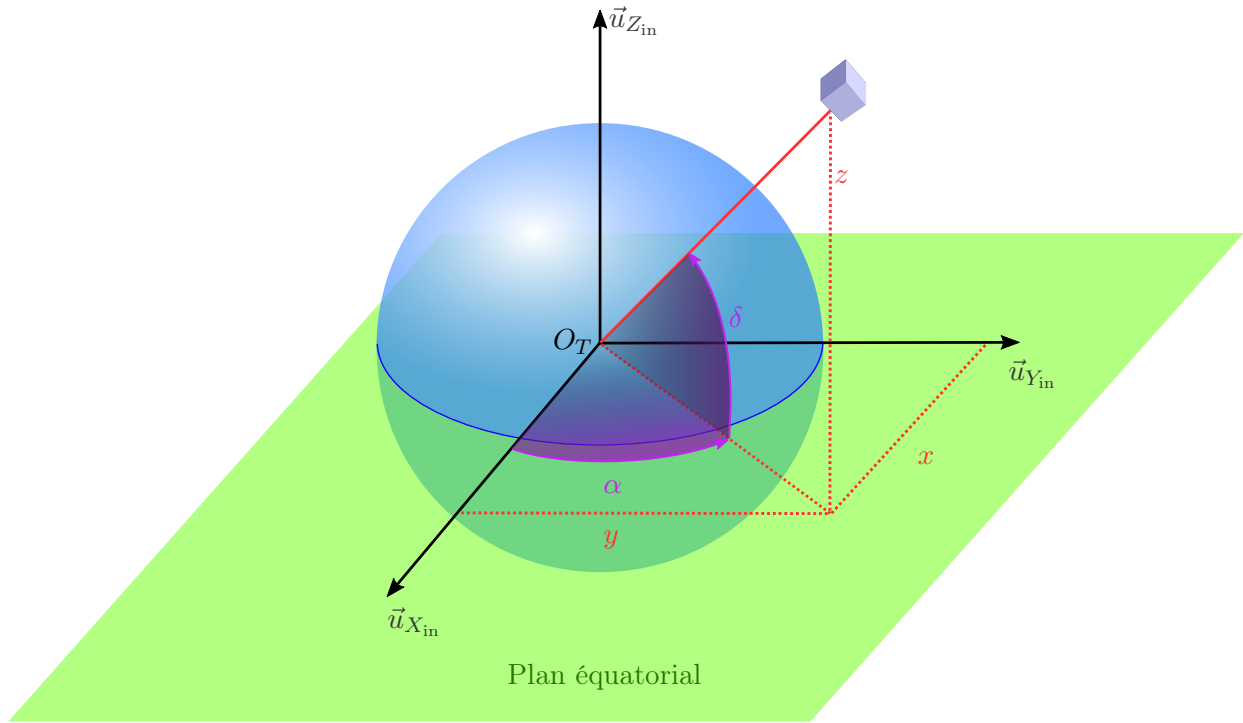


FIGURE A.2 – Ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$  d'un point dans l'espace

## A.2 Le repère péricentral PQW

Le repère péricentral est le repère naturel pour une orbite puisqu'il est centré au foyer de l'orbite (centre de la terre dans le cas des orbites terrestres qui nous intéressent plus particulièrement) et  $\mathcal{R}_{PQW} = (O_T, \vec{u}_P, \vec{u}_Q, \vec{u}_W)$  est défini tel que le plan des vecteurs  $(\vec{u}_P, \vec{u}_Q)$  est le plan orbital alors que le vecteur  $\vec{u}_W$  est perpendiculaire au plan de l'orbite suivant le vecteur moment cinétique de l'orbite [41]. La base associée est notée  $\mathcal{B}_{PQW}$ , définie par les vecteurs  $[\vec{u}_P, \vec{u}_Q, \vec{u}_W]$  où :

- $\vec{u}_P$  pointe vers périhélie suivant la ligne apsidale,
- $\vec{u}_W$  est normal au plan orbital défini par les vecteurs position et vitesse, colinéaire au vecteur moment cinétique  $\vec{h}$ ,
- le vecteur  $\vec{u}_Q$  complète le trièdre orthogonal direct et se trouve dans le plan de l'orbite à  $\pi/2$  radians d'anomalie vraie du vecteur  $\vec{u}_P$ .

Ce système de référence est illustré par la Figure A.3.

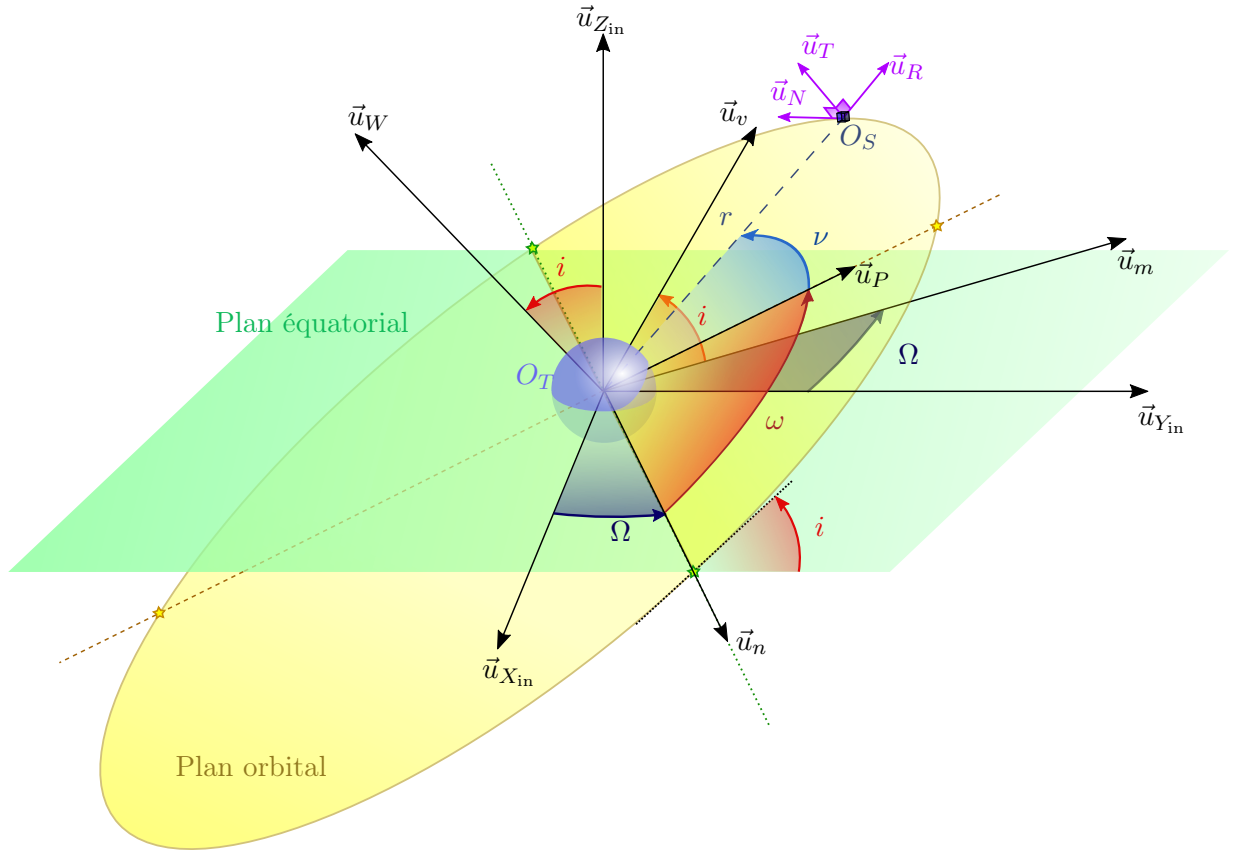


FIGURE A.3 – Représentation des angles de rotation entre le repère géocentrique équatorial et le repère périfocal.

Si  $\vec{\sigma}$  est un vecteur de l'espace de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}}, \quad (\text{A.3})$$

dans la base géocentrique équatoriale et de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_w \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{PQW}}, \quad (\text{A.4})$$

dans la base périfocale, la transformation du repère géocentrique équatorial vers le repère périfocal peut être obtenue par la séquence de rotations des angles d'Euler classique donnée par  $[R_3(\omega)][R_1(i)][R_3(\Omega)]$  où les matrices  $R_1(\alpha)$ ,  $R_2(\alpha)$ ,  $R_3(\alpha)$  sont les matrices de rotation classiques données par :

$$R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$



$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_w \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{PQW}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}}, \\
&= \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \cos i \sin \omega \sin \Omega \\ -\sin \omega \cos \Omega - \cos i \cos \omega \sin \Omega \\ \sin i \sin \Omega \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \cos i \cos \Omega \sin \omega + \cos \omega \sin \Omega & \sin i \sin \omega \\ \cos i \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega & \sin i \cos \omega \\ -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

La transformation inverse est obtenue simplement par transposition de la matrice de transformation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}} = [R_3(\omega)][R_1(i)][R_3(\Omega)]^T \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_w \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{PQW}}.$$

### A.3 Repères orbitaux locaux

Les repères locaux sont très adaptés pour représenter les composantes des vecteurs et spécifiquement les accélérations dues aux perturbations. Ces repères locaux nous permettent d'exprimer la géométrie relative d'une formation de satellites.

#### A.3.1 Le repère orbital local RSW (RTN) de Gauss

Un repère local permettant de modéliser le mouvement relatif est *le repère de Gauss*  $R_{RTN} = (O_S, \vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$  où l'origine  $O_S$  est le centre de masse du satellite et ses axes, pouvant être notés  $QSW$  ( $Q$  pour normalized radius,  $S$  pour second et  $W$  pour omega),  $RSW$  ( $R$  pour radial,  $S$  pour second,  $W$  pour omega),  $RIC$  ( $R$  pour radial,  $I$  pour intrack et  $C$  pour crosstrack) ou  $RTN$  ( $R$  pour radial,  $T$  pour transverse et  $N$  pour normal) comme dans [104], sont définis par :

- l'axe  $\vec{u}_N$  est normal au plan orbital défini par les vecteurs position et vitesse, colinéaire au vecteur moment cinétique  $\vec{h}$  (cross-track direction),
- l'axe  $\vec{u}_R$  est radial, colinéaire à la direction centre de la Terre - satellite,
- l'axe  $\vec{u}_T$  qui complète le trièdre orthogonal direct (along-track direction).

Le repère  $(S, \vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ , noté  $\mathcal{R}_{RTN}$  et la base associée  $\mathcal{B}_{RTN}$  sont illustrés sur la Figure A.4.

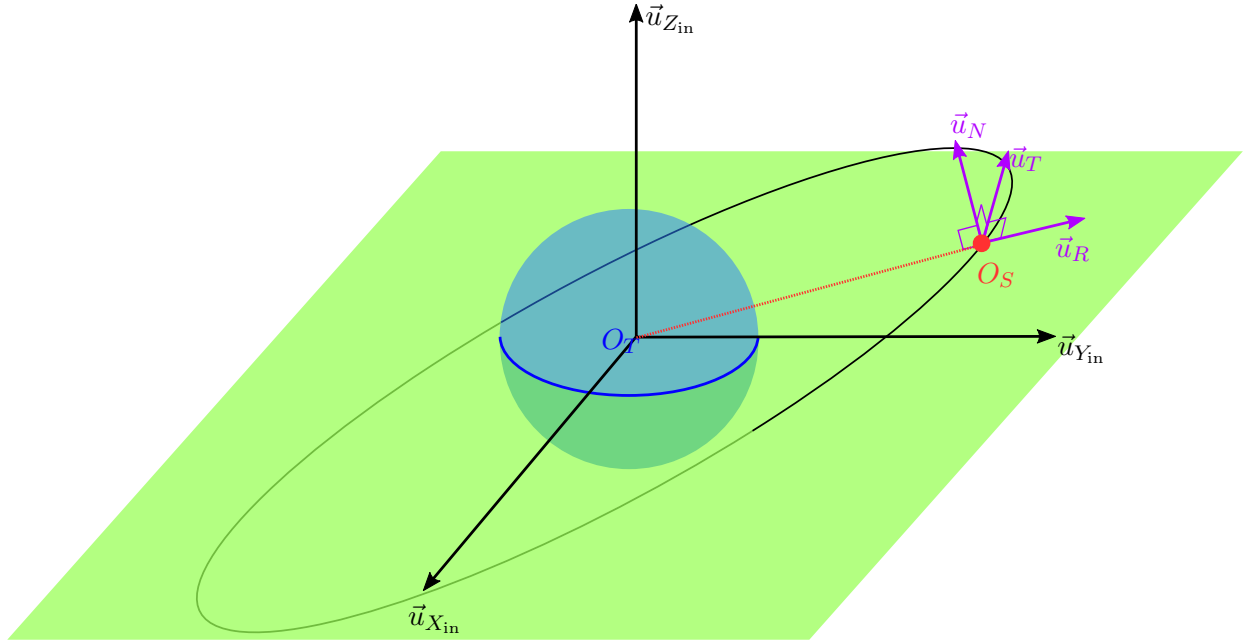


FIGURE A.4 – Repère orbital local de Gauss

Il est possible de définir le repère orbital local à partir de trois rotations transformant la base géocentrique équatoriale  $\mathcal{B}_{in}$  en une base orbitale locale  $\mathcal{B}_{RTN}$ . Celle-ci se déduit de la base géocentrique équatoriale  $\mathcal{B}_{in}$  par la série de transformations suivantes (voir la Figure A.5) :

- une rotation autour de l'axe  $(O_T, \vec{u}_{Z_{in}})$  d'angle  $\Omega$ ,
- une rotation autour de l'axe  $(O_T, \vec{u}_n)$  d'angle  $i$ ,
- une rotation autour de l'axe  $(O_T, \vec{u}_h)$  d'angle  $\omega + \nu$ ,

où  $\vec{u}_n$  est un vecteur unitaire dans la direction de l'intersection entre le plan de l'équateur et le plan de l'orbite et  $\vec{u}_h$  est un vecteur directeur perpendiculaire au plan de l'orbite. La Figure A.6 montre ces rotations dans l'espace et la Figure A.7 présente les rotations planes associées à ces transformations. On a ainsi les coordonnées de ces vecteurs de base dans la base inertielle  $\mathcal{B}_{in}$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_R &= \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \cos i \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \cos i \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \sin i \sin(\omega + \nu) \end{bmatrix}, \\
 \vec{u}_T &= \begin{bmatrix} -\cos i \cos(\omega + \nu) \sin \Omega - \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \cos i \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \sin i \cos(\omega + \nu) \end{bmatrix}, \\
 \vec{u}_N &= \begin{bmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Si  $\vec{\sigma}$  est un vecteur de l'espace de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}}, \tag{A.8}$$

dans la base géocentrique équatoriale et de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{RTN}}, \quad (\text{A.9})$$

dans la base orbitale locale, la transformation des coordonnées exprimées dans la base orbitale locale de Gauss en les coordonnées exprimées dans la base géocentrique équatoriale est donnée par :

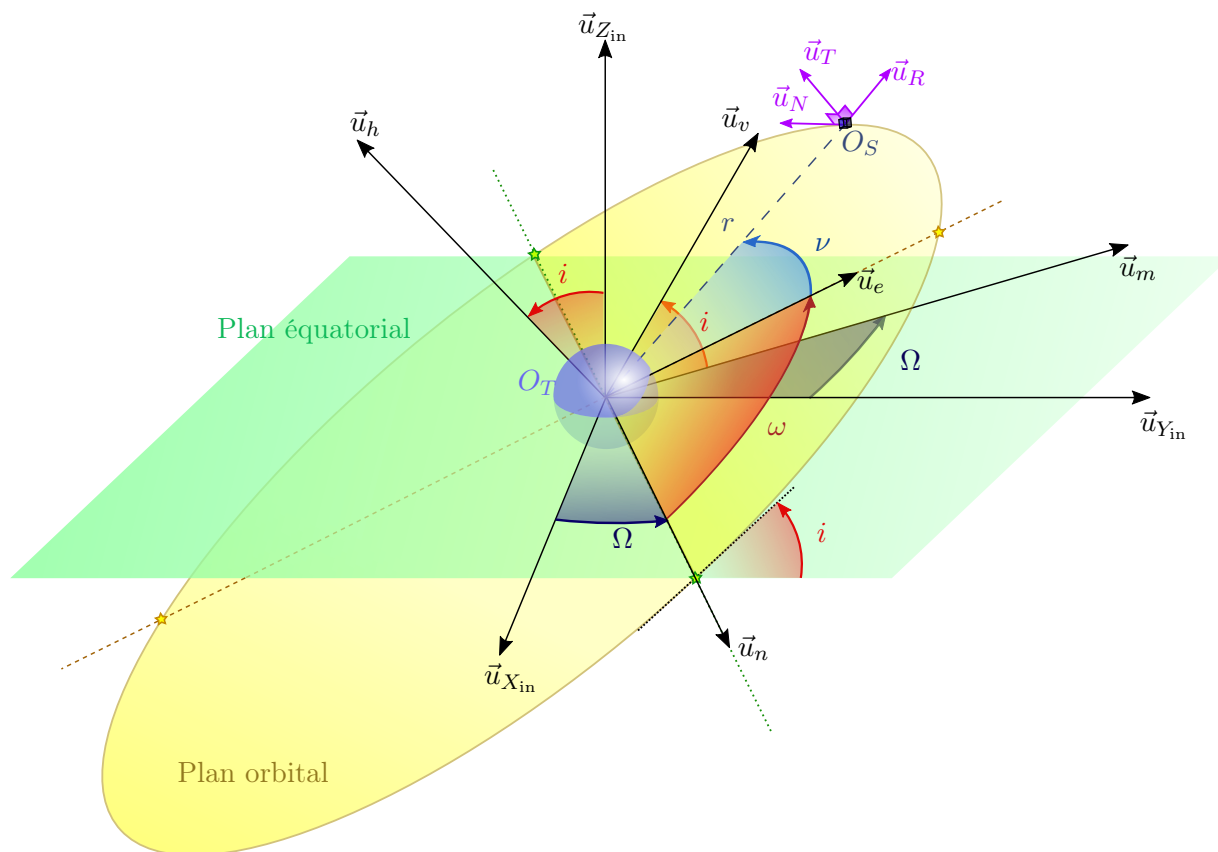


FIGURE A.5 – Représentation des angles de rotation entre le repère géocentrique équatorial et le repère orbital local de Gauss. Notons que  $\vec{u}_N$  et  $\vec{u}_h$  sont colinéaires.

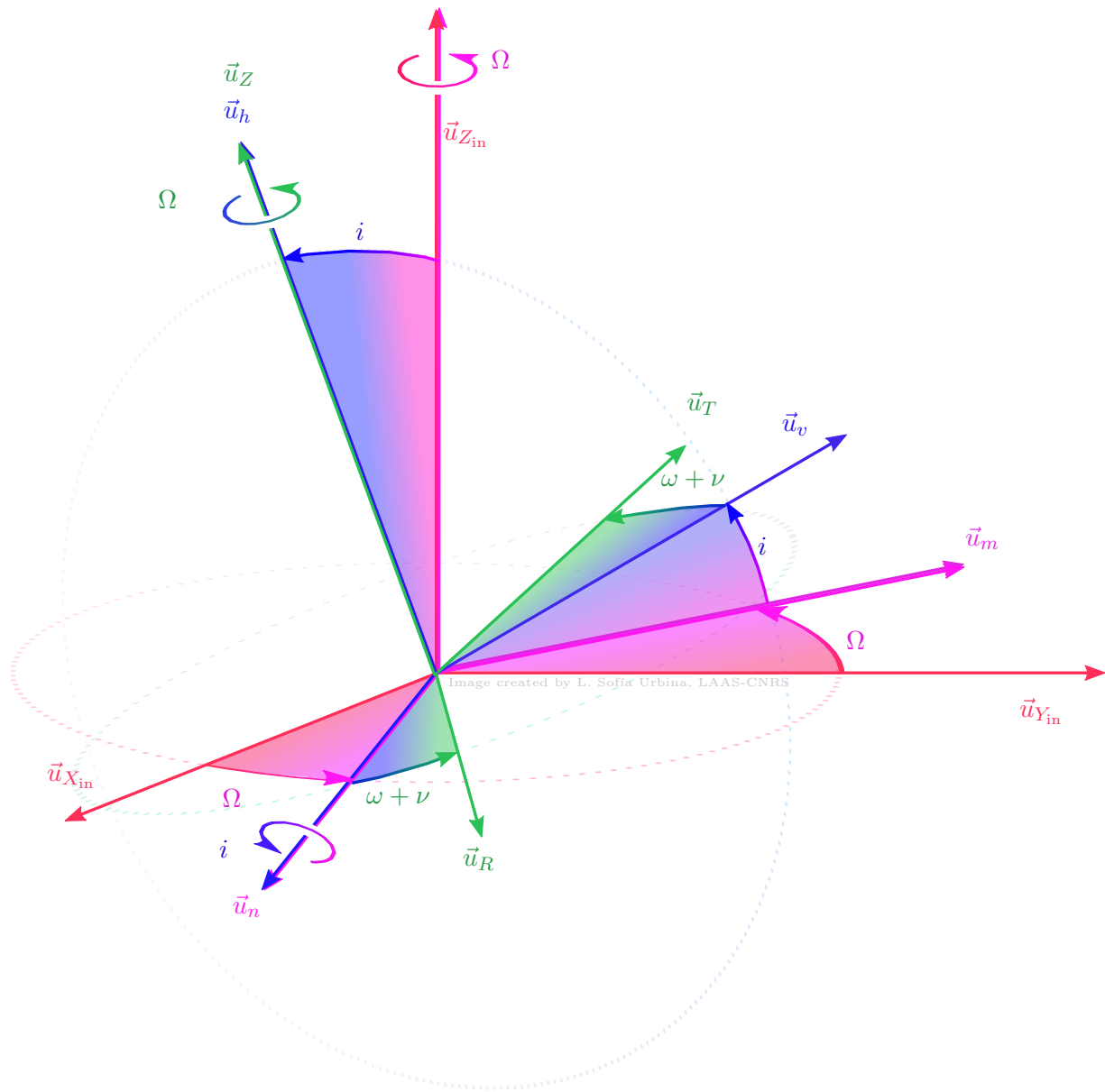


FIGURE A.6 – Rotations dans l’espace entre la base géocentrique équatoriale et la base orbitale locale de Gauss.

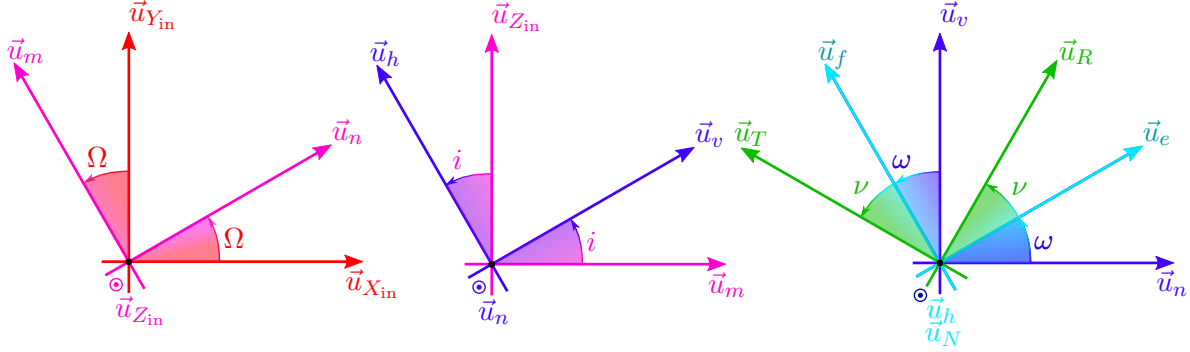


FIGURE A.7 – Rotations planes entre le base géocentrique équatoriale et la base orbitale locale de Gauss.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) & -\sin(\omega + \nu) & 0 \\ \sin(\omega + \nu) & \cos(\omega + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{RTN}}, \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \cos i \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \cos i \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \sin i \sin(\omega + \nu) \\ -\cos i \cos(\omega + \nu) \sin \Omega - \sin(\omega + \nu) \cos \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \cos i \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \sin(\omega + \nu) \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ \sin i \cos(\omega + \nu) & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{RTN}}. \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

Le repère orbital local de Gauss s'obtient alors par la translation de l'origine du repère géocentrique équatorial telle que :  $\overline{O_T O_S} = r \vec{u}_R$ .

Ce repère est lié au satellite et ne doit pas être confondu avec le repère appelé LVLH (Local-Vertical-Local-Horizontal)  $R_{LVLH} = (O_S, \vec{u}_{X_{LVLH}}, \vec{u}_{Y_{LVLH}}, \vec{u}_{Z_{LVLH}})$  qui est, en général, défini dans la littérature avec pour origine  $O_S$ , le centre de masse du satellite et les axes définis par :

- l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_{Z_{LVLH}}$  est radial orienté du satellite vers le centre de la terre,
- l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_{Y_{LVLH}}$  est normal au plan orbital dans la direction opposée du moment cinétique,
- l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_{X_{LVLH}} = \vec{u}_{Y_{LVLH}} \wedge \vec{u}_{Z_{LVLH}}$  est dans la direction de la vitesse et tel que  $[\vec{u}_{X_{LVLH}}, \vec{u}_{Y_{LVLH}}, \vec{u}_{Z_{LVLH}}]$  forme un trièdre orthonormé direct.

Il est à noter que la littérature anglo-saxonne a des notations particulières pour le repère LVLH :

- l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_{Z_{LVLH}}$  est appelé **R-bar**,
- l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_{Y_{LVLH}}$  est appelé **H-bar**,
- l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_{X_{LVLH}} = \vec{u}_{Y_{LVLH}} \wedge \vec{u}_{Z_{LVLH}}$  est appelé **V-bar**.

### A.3.2 Le repère orbital local NTW de Frenet

Dans le cas du mouvement perturbé par le frottement atmosphérique, le repère le plus naturel est le repère NTW de Frénet  $R_{OLF} = (O_S, \vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_W)$  défini par son origine  $O_S$  située au centre de masse du satellite et les axes portant les vecteurs  $[\vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_W]$ .

- L'axe portant le vecteur  $\vec{u}_T$  est toujours parallèle au vecteur vitesse du satellite  $\vec{v}$  (in-track direction) ;

— l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_W$  est perpendiculaire au plan orbital du satellite (cross-track direction);

— l'axe portant le vecteur  $\vec{u}_N$  est tel que  $[\vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_W]$  forme un trièdre orthonormé direct.

Ce repère est également lié au satellite. Les formules de passage entre les deux bases locales  $B_{OLG}$  et  $B_{OLF}$  sont données dans [94] par :

$$\begin{aligned}\vec{u}_R &= \frac{n \cdot a}{v\sqrt{1-e^2}} [e \sin \nu \vec{u}_T + (1 + e \cos \nu) \vec{u}_N] = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [e \sin \nu \vec{u}_T + (1 + e \cos \nu) \vec{u}_N], \\ \vec{u}_S &= \frac{n \cdot a}{v\sqrt{1-e^2}} [(1 + e \cos \nu) \vec{u}_T - e \sin \nu \vec{u}_N] = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [(1 + e \cos \nu) \vec{u}_T - e \sin \nu \vec{u}_N].\end{aligned}\tag{A.11}$$

ou réciproquement :

$$\begin{aligned}\vec{u}_N &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [(1 + e \cos \nu) \vec{u}_R - e \sin \nu \vec{u}_S], \\ \vec{u}_T &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [e \sin \nu \vec{u}_R + (1 + e \cos \nu) \vec{u}_S].\end{aligned}\tag{A.12}$$

## Annexe B

# Les orbites képlériennes elliptiques

Cette annexe traite du mouvement keplerien en général, et plus particulièrement des orbites elliptiques. Tous les résultats utilisés peuvent être trouvés avec leur preuve dans [17].

### B.1 Problème de Kepler

Le problème dit de Kepler consiste à résoudre le système différentiel suivant :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t), \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{\vec{v}}(t) = -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}(t), \quad (\text{B.2})$$

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0. \quad (\text{B.4})$$

où  $\dot{(\ )} = \frac{d(\ )}{dt}$  et  $\mu$  est la constante de gravitation du corps autour duquel orbite le mobile à la position  $\vec{r}$  dans un repère inertiel. Le vecteur  $\vec{v}$  est donc la vitesse.

Comme la force est dirigée selon le vecteur position, on parle de force centrale.

### B.2 Nature des trajectoires

Les trois lois de Kepler, obtenues à l'origine empiriquement par ce dernier à l'aide des observations de Tycho Brahé, sont vérifiables analytiquement. La première loi stipule que les trajectoires sont planes : le mouvement a donc lieu dans le plan engendré par  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$ . De plus, la loi précise que ces trajectoires sont des coniques.

Pour les orbites les moins énergétiques, il s'agit d'ellipses. Dans la suite, on supposera que l'on se trouve dans ce cas là et l'on notera  $a$  le demi-grand axe de l'ellipse et  $e$  son excentricité. Ces quantités dépendent des conditions initiales selon les formules suivantes :

$$a = \left( \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} \right)^{-1}, \quad (\text{B.5})$$

$$e = \frac{1}{\mu} \left\| \left( v_0^2 - \frac{\mu}{r_0} \right) \vec{r}_0 - (\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 \right\|. \quad (\text{B.6})$$

### B.3 Anomalies angulaires

Dans la résolution du problème de Kepler, il est intéressant d'introduire deux angles : l'anomalie vraie  $\nu$  et l'anomalie excentrique  $E$ . Ces paramètres angulaires apparaissent naturellement dans la géométrie du problème et sont représentés sur la Figure B.1).

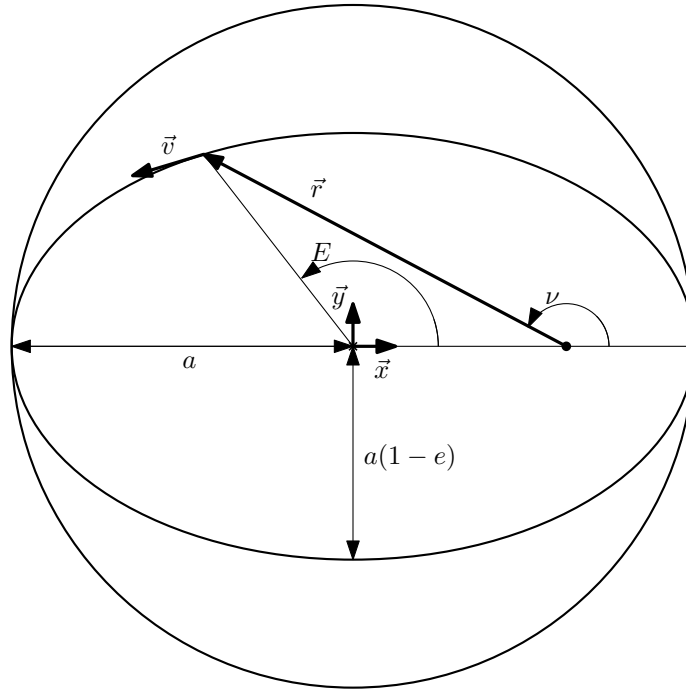


FIGURE B.1 – Anomalies angulaires.

On peut prouver géométriquement ou analytiquement que :

$$\|\vec{r}\| = a(1 - e \cos(E)). \quad (\text{B.7})$$

L'équation (B.7) fait le lien entre la norme du vecteur position et l'anomalie excentrique, le signe de  $E$  étant donné par celui de  $\vec{r} \cdot \vec{v}$ .

Il est également possible de prouver que :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) = E - e \sin(E), \quad (\text{B.8})$$

où  $t_p$  est le dernier temps de passage au périapse (point de l'orbite le plus proche du corps central). L'équation (B.8), dite de Kepler, permet de relier l'anomalie excentrique à la variable temporelle. Elle donne immédiatement la seconde en fonction de la première, en revanche pour déduire la première de la seconde il faut résoudre cette équation transcendante. Dans la pratique, on peut le faire par une méthode de Newton-Raphson.

En dérivant l'équation de Kepler par rapport au temps, on obtient immédiatement :

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1}{1 - e \cos(E)}. \quad (\text{B.9})$$

Une fois l'anomalie excentrique calculée, on peut passer à l'anomalie vraie en utilisant les relations suivantes :

$$\cos(\nu) = \frac{e - \cos(E)}{e \cos(E) - 1}, \quad (\text{B.10})$$



$$\sin(\nu) = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\|\vec{r}\|} \sin(E). \quad (\text{B.11})$$

## B.4 Solution du problème de Kepler

Dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y})$  représenté sur la Figure B.1, on a :

$$\vec{r} = X\vec{x} + Y\vec{y}, \quad (\text{B.12})$$

et

$$\vec{v} = \dot{X}\vec{x} + \dot{Y}\vec{y}. \quad (\text{B.13})$$

On peut prouver, géométriquement ou analytiquement, que :

$$X = a(\cos(E) - e), \quad (\text{B.14})$$

$$Y = a\sqrt{1-e^2} \sin(E). \quad (\text{B.15})$$

En dérivant et en injectant (B.9), on obtient :

$$\dot{X} = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sin(E)}{1-e\cos(E)}, \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{Y} = \sqrt{\frac{\mu(1-e^2)}{a}} \frac{\cos(E)}{1-e\cos(E)}. \quad (\text{B.17})$$

## B.5 Coefficients $f$ et $g$ de Lagrange

Les coefficients  $f$  et  $g$  de Lagrange sont un moyen d'exprimer les solutions du problème de Kepler [17, 41, 67]. On sait que pour tout  $t$ ,  $(0, \vec{r}(t), \vec{v}(t))$  et  $(0, \vec{r}(0), \vec{v}(0))$  engendrent le même plan. Ceci encourage à chercher une expression pour la position du type :

$$\vec{r}(t) = f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0. \quad (\text{B.18})$$

où les coefficients  $f$  et  $g$  sont des scalaires dépendant de  $t$ ,  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}_0$ . Par dérivation temporelle, on obtient immédiatement :

$$\vec{v}(t) = \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0. \quad (\text{B.19})$$

Pour une force centrale, on a conservation du moment cinétique, d'où :

$$\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0. \quad (\text{B.20})$$

En injectant dans cette équation les coefficients de Lagrange, on obtient que :

$$1 = f\dot{g} - \dot{f}g. \quad (\text{B.21})$$

En regardant le produit vectoriel entre  $\vec{r}$  et  $\vec{v}_0$ , il vient que :

$$f = \frac{X\dot{Y}_0 - \dot{X}_0Y}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}. \quad (\text{B.22})$$

De même, en analysant  $\vec{r}_0 \times \vec{r}$ , on obtient :

$$g = \frac{X_0 Y - X Y_0}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}. \quad (\text{B.23})$$

Par dérivation temporelle, il vient immédiatement que :

$$\dot{f} = \frac{\dot{X}\dot{Y}_0 - \dot{X}_0\dot{Y}}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}, \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{g} = \frac{X_0\dot{Y} - \dot{X}Y_0}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}. \quad (\text{B.25})$$

En injectant dans ces expressions des coefficients de Lagrange les équations présentées dans la Section B.4, on a, tous calculs faits :

$$f = 1 - \frac{a}{\|\vec{r}_0\|} (1 - \cos(\Delta E)), \quad (\text{B.26})$$

$$g = \Delta t - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (\Delta E - \sin(\Delta E)), \quad (\text{B.27})$$

$$\dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{\|\vec{r}_0\| \|\vec{r}\|} \sin(\Delta E), \quad (\text{B.28})$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{a}{\|\vec{r}\|} (1 - \cos(\Delta E)), \quad (\text{B.29})$$

avec  $\Delta E = E - E_0$  et  $\Delta t = t - t_0$ .

Annexe C

Théorie de la mesure

## C.1 Définitions, résultats et faits élémentaires de la théorie de la mesure

Cette annexe résume rapidement les principales définitions de la théorie de la mesure et de l'intégration qui sont nécessaires pour les développements présentés dans ce rapport. Le contenu de cette annexe a été principalement emprunté aux références [20], [8] et [95].

**Définition 13** (Fonction Indicatrice).

Soit  $B \subset A$ . La fonction indicatrice  $1_B$  de  $B$  est définie comme :

$$1_B : A \rightarrow \{0, 1\},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B, \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

**Définition 14** ( $\sigma$ -algèbre).

Soit  $A$  un ensemble. Une  $\sigma$ -algèbre de sous-ensembles de  $A$  est une famille  $\mathcal{A}$  (appelée également tribu) de sous-ensembles de  $A$  telle que :

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
2.  $\forall E \in \mathcal{A}, A \setminus E \in \mathcal{A}$ ,
3. pour toute séquence  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$ .

**Exemple 18.**

- $\mathcal{P}(A)$  est une (la maximale)  $\sigma$ -algèbre sur  $A$ .
- $\{\emptyset, A\}$  est une (la minimale)  $\sigma$ -algèbre sur  $A$ .
- Pour  $B \subset A$ ,  $\{\emptyset, B, A \setminus B, A\}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $A$ .
- Si  $B \neq \emptyset$  et  $B \neq A$  alors  $\{\emptyset, B, A\}$  n'est pas une  $\sigma$ -algèbre sur  $A$ .

**Définition 15.**

Pour tout système d'ensembles  $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(A)$ , il existe une plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant  $\mathcal{G}$ . Cette  $\sigma$ -algèbre, notée  $\sigma(\mathcal{G})$  est la  $\sigma$ -algèbre générée par  $\mathcal{G}$ .

**Définition 16** (Tribu de Borel ou  $\sigma$ -algèbre topologique).

La  $\sigma$ -algèbre  $\sigma(\mathcal{O}^n)$ , notée  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , générée par le système  $\mathcal{O}^n$  de tous les ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^n$  est appelée la tribu de Borel sur  $\mathbb{R}^n$  et ses éléments sont les ensembles de Borel ou ensembles mesurables de Borel.

Noter que la tribu de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  peut être générée par la famille de rectangles demi-ouverts dans  $\mathbb{R}^n$ , c.-à-d.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{I}$  où  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$ .

**Définition 17** (Espace Mesurable).

Un espace mesurable est une paire  $(A, \mathcal{A})$  où  $A$  est un ensemble et  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre de sous-ensembles de  $A$ .

**Définition 18** (Mesure).

Soit  $(A, \mathcal{A})$  un espace mesurable (voir Définition 17). Une mesure positive sur  $A$  (ou, plus précisément, sur  $(A, \mathcal{A})$ ) est une application  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  satisfaisant :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,

2. pour toute séquence  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ensembles disjoints deux à deux dans  $\mathcal{A}$ ,  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ .

### Exemple 19.

- *Mesure de Borel* : une mesure définie sur la tribu de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  est appelée une mesure de Borel.
- *Mesure de Dirac en  $a$*  : soient  $(A, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $a \in A$ . Alors, l'application  $\delta_a : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ , définie pour  $A \in \mathcal{A}$  par :

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A, \\ 1 & \text{si } a \in A, \end{cases}$$

est appelée la mesure de Dirac au point  $a$ .

- *Mesure de Lebesgue* : la fonction  $\lambda^n$  sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  qui assigne la valeur :

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

à tout rectangle semi-ouvert  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{I}$ , est appelée mesure de Lebesgue de dimension  $n$ . Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  alors

$$\lambda^n(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i} \sum (b_1^i - a_1^i) \cdots (b_n^i - a_n^i),$$

où les  $R_i$  sont des rectangles semi-ouverts, c.-à-d.  $R_i = [a_1^i, b_1^i] \times \cdots \times [a_n^i, b_n^i]$ .

La mesure de Lebesgue de dimension 1 représente la « longueur » usuelle d'un segment :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a < b, \quad \lambda([a, b]) = b - a.$$

Il est à remarquer que, pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda(\{a\}) = 0$ . Du second point de la Définition 18 :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a < b, \quad \lambda([a, b]) = \lambda(\{a\}) + \lambda(]a, b]) + \lambda(\{b\}) = \lambda(]a, b[).$$

### Définition 19 (Espace Mesuré).

Un espace mesuré est un triplet  $(A, \mathcal{A}, \mu)$  où  $A$  est un ensemble,  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre de sous-ensembles de  $A$ , et  $\mu$  est une mesure positive sur  $(A, \mathcal{A})$ .

### Propriété 1.

Soit  $(A, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $B, C \in \mathcal{A}$ . Alors,  $C \subset B \Rightarrow \mu(C) \leq \mu(B)$ .

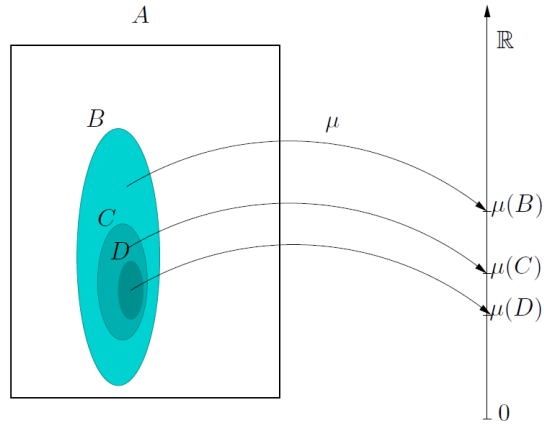


FIGURE C.1 – Propriété de monotonie des mesures positives.

**Définition 20** (Mesure  $\sigma$ -finie).

Une mesure  $\mu$  définie sur  $(A, \mathcal{A})$  est dite  $\sigma$ -finie et  $(A, \mathcal{A}, \mu)$  est appelé espace mesuré  $\sigma$ -fini si  $\mathcal{A}$  contient une séquence croissante  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  d'ensembles  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  tels que  $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j = A$ , vérifiant  $\mu(A_j) < \infty$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

**Définition 21** (Support d'une Mesure).

Soit  $(A, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Le support d'une mesure positive  $\mu$  est le plus petit ensemble fermé défini par :

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in A \text{ t.q. } \mu(U) > 0 \text{ pour tout voisinage ouvert } U \text{ de } x\}.$$

**Exemple 20.**

- Le support de la mesure de Dirac en 0 est le singleton  $\{0\}$ .
- Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Le support de la mesure de Lebesgue  $\lambda$  est  $\mathbb{R}$ . Noter que tout point a une mesure de Lebesgue nulle de même que toute union dénombrable de points.

**Définition 22** (Atome d'une mesure).

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, l'ensemble  $A \in \mathcal{A}$  est un atome de la mesure  $\mu$  si  $\mu(A) > 0$  et pour tout ensemble  $B \subset A$  et  $B \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(B) = \mu(A)$ .

**Définition 23** (Mesure purement atomique).

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, et  $A_n$ ,  $n = 1, \dots$ , les atomes de la mesure  $\mu$  alors  $\mu$  est une mesure purement atomique si  $\mu(X \setminus \cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 0$ .

Comme  $\mathbb{R}^n$  est un espace métrique séparable, si  $A$  est un atome pour la mesure de Borel positive  $\mu$  alors il existe  $x \in A$  tel que  $\mu(A \setminus \{x\}) = 0$ . Une mesure  $s$ -atomique sera donc une mesure de Borel, finie sur  $\mathbb{R}^n$  et supportée en  $s$  points (les atomes). On pourra donc l'écrire  $\mu = \sum_{i=1}^s \lambda_i \delta_{x_i}$ , combinaison linéaire de mesures de Dirac en les points  $x_i$  affectées des poids positifs  $\lambda_i$ .

**Définition 24** (Mesure Produit).

Soient  $(A_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(A_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ , deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis. Alors, la fonction

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 &\rightarrow [0, \infty], \\ A_1 \times A_2 &\mapsto \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \end{aligned}$$

est la mesure unique appelée mesure produit, notée  $\rho = \mu_1 \otimes \mu_2$  et définie sur l'espace mesuré  $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  où  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  est la tribu produit.  $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$  est appelé l'espace mesuré produit.

La mesure produit  $\rho$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  telle que

$$\rho(E) = \int \int 1_E(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \int \int 1_E(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx),$$

est vrai pour tout  $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ .

**Exemple 21.**

La mesure de Lebesgue de dimension  $n$ ,  $\lambda^n$  sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  peut être construite comme une mesure produit, c.-à-d.

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n) = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-d}), \lambda^d \otimes \lambda^{n-d}), \quad \forall n > d \geq 1.$$

## C.2 Fonctions mesurables et intégration

**Définition 25** (Fonction  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ -mesurable).

Soient  $(A_1, \mathcal{A}_1)$  et  $(A_2, \mathcal{A}_2)$  deux espaces mesurables. Une fonction  $f : A_1 \rightarrow A_2$  est  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ -mesurable si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1, \quad \forall B \in \mathcal{A}_2.$$

**Définition 26** (Fonction mesurable).

Soit  $(A, \mathcal{A})$  un espace mesurable. Une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable (ou simplement mesurable) si  $\{x : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$  ou de manière équivalente

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Une fonction mesurable  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

**Exemple 22.**

Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace mesurable. La fonction indicatrice  $f(x) = 1_A(x)$  est mesurable si et seulement si  $A \in \mathcal{A}$ . Ainsi, pour un ensemble  $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \{x : 1_A(x) < c\} &= \emptyset \in \mathcal{A} && \text{si } c \leq 0, \\ \{x : 1_A(x) < c\} &= X \setminus A \in \mathcal{A} && \text{si } c \in (0, 1], \\ \{x : 1_A(x) < c\} &= X \in \mathcal{A} && \text{si } c > 1. \end{aligned}$$

**Définition 27** (Fonction simple).

Une fonction simple  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un espace mesurable  $(A, \mathcal{A})$  est une fonction de la forme :

$$g(x) = \sum_{j=1}^M y_j 1_{A_j}(x),$$

avec un nombre fini d'ensembles disjoints  $A_1, \dots, A_M \in \mathcal{A}$  et  $y_1, \dots, y_M \in \mathbb{R}$ .

Si  $y_i \geq 0$  pour tout  $i$ , la fonction  $g$  est dite simple positive.

**Définition 28.**

On suppose que  $\mu$  est une mesure positive sur l'espace mesurable  $(A, \mathcal{A})$  et  $f$  est mesurable

- Si  $f = \sum_{j=1}^M y_j 1_{A_j}$  est une fonction simple positive alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^M y_i \mu(A_i).$$

- Si  $f \geq 0$  alors

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \leq f, g \text{ est simple positive} \right\}.$$

- Pour une fonction  $f$  arbitraire,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

où  $f^+ = \max\{f, 0\}$  et  $f^- = -\min\{f, 0\}$ .

Si  $(B, \mathcal{B})$  est mesurable, l'intégrale de  $f$  sur  $B$  est définie par :

$$\int_B f d\mu = \int f 1_B d\mu.$$

**Théorème 7 (Fubini).**

Soient  $(A_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$  et  $(A_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$  des espaces mesurés  $\sigma$ -finis et soit  $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -mesurable. Si, au moins une de ces intégrales est finie

$$\int_{A_1 \times A_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2), \quad \int_{A_2} \int_{A_1} |f(x, y)| \mu_1(dx) \mu_2(dy), \quad \int_{A_1} \int_{A_2} |f(x, y)| \mu_2(dy) \mu_1(dx)$$

alors

$$\int_{A_1 \times A_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{A_2} \int_{A_1} f(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \int_{A_1} \int_{A_2} f(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx).$$

**Définition 29 (Densité).**

Soient  $(A, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $\rho$  une fonction positive réelle  $\mathcal{A}$ -mesurable, la fonction

$$\mu_\rho : A \mapsto \int_A \rho d\mu = \int 1_A \rho d\mu = \int 1_A(x) \rho(x) \mu(dx),$$

est une mesure sur  $(A, \mathcal{A})$  appelée mesure de fonction densité  $\rho$  par rapport à  $\mu$  et notée  $\mu_\rho = \rho \mu$ .

Traditionnellement, la densité est notée  $\rho = \frac{d\mu_\rho}{d\mu}$ .



Par exemple, pour la mesure  $\mu_I$  gaussienne ( $\mu_I = \mu_g$ ), de moyenne  $m \in \mathbb{R}^n$ , et de matrice de covariance  $\Sigma$ , donnée par :

$$\mu_I(A) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi\det(\Sigma))^n}} \int_A \exp\left(-\frac{(X-m)^T \Sigma^{-1} (X-m)}{2}\right) dX, \quad (\text{C.1})$$

où  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  sont les notations pour la complétion de la tribu de Borel sur  $\mathbb{R}^n$  et l'intégrale dans (C.1) est définie par rapport à la mesure de Lebesgue à  $n$  dimensions standard, la densité de la mesure  $\mu_I$  est une fonction  $\rho_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\rho_I(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\det(\Sigma))^n}} \exp\left(-\frac{(X-m)^T \Sigma^{-1} (X-m)}{2}\right). \quad (\text{C.2})$$

En utilisant les notations de la Définition 29, on a  $\rho_I = \frac{d\mu_I}{d\lambda}$ .

# Bibliographie

- [1] M.R. Akella and K.T. Alfriend. Probability of collision between space objects. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(5) :769–772, 2000.
- [2] S. Alfano. A numerical implementation of spherical objet collision probability. *Journal of Astronautical Sciences*, 53(1), Janvier-Mars 2005.
- [3] S. Alfano. Relating position uncertainty to maximum conjunction probability. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 53(2) :193–205, 2005.
- [4] S. Alfano. Satellite collision probability enhancements. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 29(3) :588–592, 2006.
- [5] S. Alfano. Review of conjunction probability methods for short-term encounters (aas 07-148). *Advances in the Astronautical Sciences*, 127(1) :719, 2007.
- [6] S. Alfano and D. Negron. determining satellite close approaches. *Journal of Astronautical Sciences*, 42(2) :143–152, 1994.
- [7] K.T Alfriend, M.R. Akella, J. Frisbee, J.L. Foster, D.-J. Lee, and M. Wilkins. Probability of collision error analysis. *Space Debris*, 1(1) :21–35, 1999.
- [8] L. Ambrosio. *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations. Lecture Notes in Mathematics*, volume 1927, chapter Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields. Springer-Verlag, 2008.
- [9] M.F. Anjos and J-B. Lasserre, editors. *Handbook on Semidefnite, Conic and Polynomial Optimization*. International Series in Operations Research and Management Science. Springer, novembre 2012.
- [10] R. Armellin. Collision avoidance maneuver optimization with a multiple-impulse convex formulation. *Acta Astronautica*, 186 :347–362, juin 2021.
- [11] R. Armellin, P. Di Lizia, F. Bernelli-Zazzera, and M. Berz. Asteroid close encounters characterization using differential algebra : the case of apophis. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107(4) :451–470, août 2010.
- [12] R. Armellin, A. Morselli, P. Di Lizia, and M. Lavagna. Rigorous computation of orbital conjunctions. *Advances in space research*, 50(5) :527–538, 2012.
- [13] D. Arzelier, F. Bréhard, M. Joldeş, J.B. Lasserre, L. Martire, and A. Rondepierre. Global probability of collision : problem modelling via occupation measure. Technical Note AJ/AR/EO-2016-6457, LAAS-CNRS, Octobre 2017.
- [14] D. Arzelier, F. Bréhard, M. Joldeş, J.B. Lasserre, and A. Rondepierre. Analysis and review of the literature for the computation of the (global) probability of collision between space objects : Multiple long-term/short-term encounters. Rapport technique R-S19-BS-0005-051, LAAS-CNRS, Décembre 2020.

- [15] D. Arzelier, F. Bréhard, M. Joldeş, J.B. Lasserre, and A. Rondepierre. Analyse et revue bibliographique de la littérature pour le calcul de la probabilité de collision en orbite : rencontres long-terme et court-terme. Rapport technique 1100 EU-SST-2020, LAAS-CNRS, Janvier 2021.
- [16] D. Arzelier, F. Bréhard, and M. Joldeş. Comment on "series for collision probability in short-encounter model". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 43(5) :1034–1036, Mai 2020.
- [17] R.R. Bate, D.D. Mueller, and J.E. White. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover. Cambridge University Press, New York, USA, 1971.
- [18] R.H. Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 1999.
- [19] R.G. Bland, D. Goldfarb, and J. Todd. The ellipsoid method : a survey. *Operations Research*, 29(6) :1039–1090, Novembre–Décembre 1981.
- [20] V. I. Bogachev. *Measure theory*, volume I and II. Springer Science & Business Media, 2007.
- [21] C. Bombardelli. Analytical formulation of impulsive collision avoidance dynamics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 118 :99–114, 2014.
- [22] C. Bombardelli, G. Bau, and J. Pelaez. Asymptotic solution for the two-body problem with constant tangential thrust acceleration. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 110(3) :239–256, 2011.
- [23] C. Bombardelli and J. Hernando-Ayuso. Optimal impulsive collision avoidance in low earth orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38(2) :217–225, 2015.
- [24] F. Bonaventure and A.H. Gicquel. Collision risk management in astrium satellites. In *Proceedings of the European Space Surveillance Conference*, Madrid, Espagne, juin 2011.
- [25] F. Bonaventure and A.H. Gicquel. Management of collision risks and debris mitigation - airbus ds flight dynamics team. In *Proceedings of the 24th International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD)*, Laurel, Maryland, USA, mai 2014.
- [26] S. Boyd. Ellipsoid method (notes for ee364b). Technical report, Stanford University, 2018.
- [27] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.
- [28] J.-C. Brunelle. Evaluation du risque et stratégies de mnœuvres pour l'évitement de collisions. Master's thesis, ISAE-ENSMA, 2019.
- [29] G. Calafiore and M.C. Campi. Uncertain convex programs : randomized solutions and confidence levels. *Mathematical Programming*, 102(1) :25–46, 2005.
- [30] G. Calafiore and F. Dabbene, editors. *Scenario Approximations of Chance Constraints*, pages 3–47. Springer London, London, 2006.
- [31] M.C. Campi and S. Garatti. The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs. *SIAM Journal on Optimization*, 19(3) :1211–1230, 2008.
- [32] M.C. Campi and S. Garatti. A sampling-and-discarding approach to chance-constrained optimization : Feasibility and optimality. *Journal on Optimization Theory and Applications*, 148 :257–280, 2011.
- [33] F.K. Chan. *Spacecraft Collision Probability*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [34] A. Charnes and W.W. Cooper. Chance-constrained programming. *Management Science*, 5 :73–79, 1959.

- [35] A. Charnes and W.W. Cooper. Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints. *Operations research*, 11(1) :18–39, janvier–février 1963.
- [36] N. Chernov and S. Wijewickrema. Algorithms for projecting points onto conics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 251 :8–21, 2013.
- [37] W.H. Clohessy and R.S. Wiltshire. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Astronautical Sciences*, 27(9) :653–658, 1960.
- [38] B.A. Conway. Near-optimal deflection of Earth-approaching asteroids. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(5) :1035–1036, septembre-octobre 2001.
- [39] V. Coppola. Evaluating the short encounter assumption of the probability of collision formula. In *Proceedings of the AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 12-248, Minneapolis, Minnesota, USA, 2012.
- [40] V.T. Coppola. Including Velocity Uncertainty in the Probability of Collision between Space Objects. *Advances in the Astronautical Sciences*, 143, 2012.
- [41] H.D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Dover. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2005.
- [42] Y.H. Dai. Fast algorithms for projection on an ellipsoid. *SIAM Journal on Optimization*, 16(4) :986–1006, 2006.
- [43] E. Denenberg and P. Gurfil. Improvements to time of closest approach calculation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 39(9) :1967–1979, 2016.
- [44] E. Denenberg and P. Gurfil. Debris avoidance maneuvers for spacecraft in a cluster. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 40(6) :1428–1440, 2017.
- [45] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, France, 2nd edition, 1992.
- [46] J.C. Dolado, P. Legendre, R. Garmier, B. Revelin, and X. Pena. Satellite collision probability computation for long-term encounters. In *AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 11-419, Gridwood, Alaska, USA, Janvier 2011.
- [47] M. Duncan and J. Wysack. Operational collision risk management - evaluating and mitigating high-risk conjunction events. In *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies*, Maui, USA, septembre 2011.
- [48] M. Duncan, J. Wysack, and B. Wainwright. Optimal collision avoidance for multiple conjunction events. In *Proceedings of the AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 11-433, Gridwood, Alaska, USA, 2011.
- [49] S.L. Fernandez-Mellado and M. Vasile. AI for autonomous CAM execution. In *Proceedings of 71st International Astronautical Congress*, octobre 2020.
- [50] C. Flicker. A comparison of the performance of the sdp solvers. Master’s thesis, New Mexico Institute of Mining and Technology Socorro, 2021.
- [51] C.A. Floudas and V. Visweswaran. Quadratic optimization. In R. Horst and P.M. Pardalos, editors, *Handbook of global optimization*, volume 2, chapter 5, pages 217–269. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1995.
- [52] R.C. Frigm, M.D. Hejduk, L.C. Johnson, and D. Plakalovic. Total probability of collision as a metric for finite conjunction assessment and collision risk management. In *Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies*, Maui, USA, September 2015.
- [53] R. García-Pelayo and J. Hernando-Ayuso. Series for collision probability in short-encounter model. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 39(8) :1908–1916, 2016.

- [54] D.-W. Gim and K.A. Alfriend. The state transition matrix of relative motion for the perturbed non-circular reference orbit. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(6) :956–971, 2003.
- [55] J.L. Gonzalo, C. Colombo, and P. Di Lizia. Introducing MISS, a new tool for collision avoidance analysis and design. In *First International Orbital Debris Conference*, Sugar Land, Texas, USA, décembre 2019.
- [56] Michael Grant and Stephen Boyd. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, editors, *Recent Advances in Learning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 95–110. Springer-Verlag Limited, 2008. [http://stanford.edu/~boyd/graph\\_dcp.html](http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html).
- [57] Michael Grant and Stephen Boyd. CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. <http://cvxr.com/cvx>, March 2014.
- [58] J.M. Hedo, M. Ruiz, and J. Peláez. On the minimum orbital intersection distance computation : a new effective method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 479(3) :3288–3299, 2018.
- [59] D. Henrion and A. Garulli, editors. *Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly*, volume 312 of *LNCIS*, chapter 3.5, pages 293–310. Springer, Berlin, Allemagne, 2005.
- [60] D. Henrion, J.B. Lasserre, and J. Lofberg. GloptiPoly 3 : moments, optimization and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software, Taylor & Francis*, 24(4-5) :761–779, 2009.
- [61] R. Henrion. Structural properties of linear probabilistic constraints. *Optimization*, 56(4) :425–440, Août 2007.
- [62] J. Hernando-Ayuso, C. Bombardelli, and J.L. Gonzalo. Occam : Optimal computation of collision avoidance maneuvers. In *6th International conference on Astrodynamics tools and techniques*, Darmstadt, Allemagne, Mars 2016.
- [63] J.-B. Hiriart-Urruty. Global optimality conditions in maximizing a convex quadratic function under convex quadratic constraints. *Journal of Global Optimization*, 21 :445–455, 2001.
- [64] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Pure and Applied Mathematics. Cambridge University Press, New York, New York, USA, 1985.
- [65] D. Izzo. Optimization of interplanetary trajectories for impulsive and continuous asteroid deflection. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(2) :401–408, mars-avril 2007.
- [66] N. Jai and S. Wijewickrema. Comparison of several fast algorithms for projection onto an ellipsoid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 319 :320–337, 2017.
- [67] J.L. Junkins and H. Schaub. *Analytic Mechanics of Space Systems*. AIAA Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [68] J. Kennedy. Swarm intelligence. In *Handbook of nature-inspired and innovative computing*, pages 187–219. Springer, 2006.
- [69] L.G. Khachian. A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20 :191–194, 1979.
- [70] N. Kiselev, M.V. Orlov, and E.L. Fedorova. Projecting a point onto an ellipsoid. *Computational Mathematics and Cybernetics*, 1 :44–48, 1993.
- [71] O. Klopfenstein. *Optimisation robuste de réseaux de télécommunication*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2008.

- [72] S. Kotz, N.L. Johnson, and D.W. Boyd. A study on the collision avoidance maneuver optimization with multiple space debris. *Journal of Astronautical Sciences*, 1 :11–21, 2012.
- [73] J.B. Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications*, volume 1 of *Imperial College Press Optimization Series*. World Scientific, 2009. <http://books.google.fr/books?id=1Fi7CgAAQBAJ>.
- [74] J.B. Lasserre. *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*. Cambridge University Press, 2015.
- [75] S. Laurens. GUEPARD. Note technique GATES V2.1-ISL, CNES, octobre 2020.
- [76] Z-Q. Luo, W-K. Ma, A.M-C. So, Y. Ye, and S. Zhang. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27(3) :20–34, 2010.
- [77] Vasile M. Optimal impact strategies for asteroid deflection. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(4) :858–872, mars-avril 2008.
- [78] L. Mazal and P. Gurfil. Closed-loop distance-keeping for long-term satellite cluster flight. *Acta Astronautica*, 94 :73–82, janvier 2014.
- [79] B.L. Miller and H.M. Wagner. Chance constrained programming with joint constraints. *Operations research*, 13(6) :930–945, novembre–décembre 1963.
- [80] A. Morselli, R. Armellin, P. Di Lizia, and F. Bernelli-Zazzera. Collision avoidance maneuver design based on multi-objective optimization. *Advances in the Astronautical Sciences*, 152(4) :1819–1838, 2014.
- [81] J.A. Nelder and R.A. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4) :308–313, 1965.
- [82] A. Nemirovski. On safe tractable approximations of chance constraints. *European Journal of Operational Research*, 219(3) :707–718, juin 2012.
- [83] G. Pataki. On the rank of extreme matrices in semidefinite programs and the multiplicity of optimal eigenvalues. *Mathematics of Operations Research*, 23(2) :339–358, 1998.
- [84] R.P. Patera. General Method for Calculating Satellite Collision Probability. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(4) :716–722, July 2001.
- [85] R.P. Patera. Satellite collision probability for nonlinear relative motion. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 26(5) :728–733, 2003.
- [86] R.P. Patera and G.E. Peterson. Satellite collision probability for nonlinear relative motion. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 26(2) :233–237, mars 2003.
- [87] R.P. Patera and G.E. Peterson. Space vehicle maneuver method to lower collision risk to an acceptable level. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26(2), March-April 2003.
- [88] M. Phillips and S. Hur-Diaz. On-board estimation of collision probability for cluster flight. In *Proceedings of the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, 2013.
- [89] A. Prékopa. *Stochastic programming*, volume 324 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [90] L.M. Rios and N.V. Sahinidis. Derivative-free optimization : A review of algorithms and comparison of software implementations. *Journal of Global Optimization*, 56 :1247–1293, 2013.
- [91] I Ross. *Modern Astrodynamics*, chapter 6 Space trajectory optimization and  $L^1$ -optimal control problems. Elsevier Astrodynamics Series. Gurfil, P., 2007.
- [92] H. Royden and P Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson, Boston, Massachusetts, USA, 2010.

- [93] N. Sánchez-Ortiz, M. Belló-Mora, and H. Klinkrad. Collision avoidance manoeuvres during spacecraft mission lifetime : Risk reduction and required  $\delta v$ . *Advances in Space Research*, 38(9) :2107–2116, 2006.
- [94] H. Schaub and J.L. Junkins. *Analytical mechanics of space systems*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [95] S. L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, 2011.
- [96] R. Serra. *Opérations de proximité en orbite : évaluation du risque de collision et calcul de manoeuvres optimales pour l'évitement et le rendez-vous*. PhD thesis, Université de Toulouse, INSA de Toulouse, 135 Avenue de Rangueil, 31400 Toulouse, France, 12 2015.
- [97] R. Serra, D. Arzelier, M.M. Joldes, J.B. Lasserre, A. Rondepierre, and B. Salvy. Fast and accurate computation of orbital collision probability for short-term encounters. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 39(5) :1–13, janvier 2016.
- [98] N.Z. Shor. Cut-off methods with space extension in convex programming problems. *Cybernetics*, 13(1) :94–96, 1977.
- [99] B. Simon. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. *Advances in Mathematics*, 137 :82–203, 1998.
- [100] G.L. Slater, S.M. Byram, and T.W. Williams. Collision Avoidance for Satellites in Formation Flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(5) :1140–1146, sep 2006. <http://dx.doi.org/10.2514/1.16812>.
- [101] R.J. Stern and H. Wolkowicz. Indefinite trust region subproblems and nonsymmetric eigenvalue perturbations. *SIAM J. Optimization*, 5(2) :286–313, 1995.
- [102] J. Sturm and S. Zhang. On cones of nonnegative quadratic functions. *Mathematics of Operations Research*, 28(2) :246–267, 2003.
- [103] K.C. Toh, M.J. Todd, and H.T. Tütüncü. SDPT3 - a matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11/12 :545–581, 1999.
- [104] D.A. Vallado. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space Technology Library. Kluwer Academic Publishers, El Segundo, California, USA, 2001.
- [105] S.A. Vavasis. Complexity issues in global optimization : A survey. In R. Horst and P.M. Pardalos, editors, *Handbook of global optimization*, volume 2, chapter 2, pages 27–41. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1995.
- [106] K. Yamanaka and F. Ankersen. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1) :60–66, January 2002. <http://dx.doi.org/10.2514/2.4875>.
- [107] Y. Ye and S. Zhang. New results on quadratic optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 14(1) :245–267, 2003.
- [108] D.B. Yudin and A.S. Nemirovski. Evaluation of the informational complexity of mathematical programming problems. *Matekon : Translations of Russian and East European Math. Economics*, 13 :3–25, 1976.
- [109] D.B. Yudin and A.S. Nemirovski. Informational complexity and effective methods of solution for convex extremal problems. *Matekon : Translations of Russian and East European Math. Economics*, 13 :25–45, 1976.