

Analyse et revue bibliographique de la littérature pour le calcul de la probabilité de collision en orbite: rencontres long-terme et court-terme

D. Arzelier, F. Bréhard, M. Joldes, J.B. Lasserre, A. Rondepierre

Equipe MAC (Méthodes et Algorithmes en Commande), LAAS-CNRS
7, avenue du Colonel Roche 31031 Toulouse
lasserre@laas.fr

Equipe ROC (Recherche Opérationnelle Optimisation Contraintes)
LAAS-CNRS
7, avenue du Colonel Roche 31031 Toulouse
denis.arzelier@laas.fr, mioara.joldes@laas.fr, aude.rondepierre@insa-toulouse.fr

Automatisation et système bord autonome pour la gestion des risques de collision
(Lot technique n°1, tâche 1100)

Ref :

R&T : 23SST2018-20-EU-SST WP7

Rapport Technique TR 1

Version 1.0

Table des matières

Notations	3
Acronymes	4
1 Introduction	5
1.1 Introduction générale	5
1.2 Modèle général de rencontre et définition du problème d'évaluation du risque de collision	6
1.2.1 Géométrie des objets	6
1.2.2 Modèles dynamiques pour la rencontre	6
1.2.3 Définition des incertitudes affectant le modèle	7
1.2.4 Définition de la collision	8
1.2.5 Evaluation du risque par la probabilité de collision	9
1.3 Formalisme des mesures pour la modélisation de la probabilité de collision	9
2 Evaluation du risque pour les rencontres rapides	11
2.1 Le cadre théorique des rapprochements rapides	11
2.1.1 Définition du modèle des rencontres rapides et des hypothèses associées . . .	11
2.1.2 Première dérivation de la probabilité de collision 2D	13
2.2 Quelques méthodes de calcul de la probabilité de collision pour les rapprochements rapides	17
2.3 Une méthode semi-analytique par développement en série	18
2.3.1 Principe de la méthode	18
2.3.2 Algorithme de calcul avec une précision garantie	23
2.3.3 Liens avec la formulation de Chan	25
2.3.4 Liens avec la formulation de García-Pelayo et Hernando-Ayuso	26
2.4 Extension au calcul de la probabilité instantanée en 3 dimensions	28
3 Evaluation du risque pour les rencontres rapides avec incertitudes sur la vitesse	33
3.1 Probabilité instantanée : une alternative semi-analytique par la méthode du point col	33
3.1.1 Analyse des limites du calcul par série entière	33
3.1.2 Principe du calcul de la probabilité de collision instantanée par séries divergentes	35
3.1.3 Calcul de la transformée de Laplace de la fonction g	35
3.1.4 Formule d'inversion de Laplace	35
3.1.5 Développement asymptotique de l'intégrale paramétrée	36
3.1.6 Algorithme pour le calcul de la probabilité de collision instantanée par séries divergentes	42
3.1.7 Exemples numériques	43
3.2 Une méthode hybride pour les rencontres rapides avec incertitudes sur la vitesse . . .	44
3.2.1 Principe de la méthode	44
3.2.2 Résultats numériques	46
4 La méthode directe ou PoC 3D pour les rencontres lentes	50
4.1 Dérivation rigoureuse de la formule de Coppola dans le cadre de la théorie des mesures	50
4.2 Dérivation de la formule classique en rencontre courte	60

5	Une méthode alternative pour les rencontres lentes	64
5.1	Introduction	64
5.2	Approximations PSS des ensembles semi-algébriques bornés	68
5.2.1	Formulation par un problème d'optimisation polynomiale	68
5.2.2	Une hiérarchie LMI pour le calcul de PSS	68
5.3	Les approximations PSS du swept-volume en dynamique relative	70
5.3.1	Les approximations PSS des discrétisations du swept-volume	70
5.3.2	Cas sans incertitude sur la vitesse	72
5.4	Intégration d'une gaussienne sur un volume implicitement défini par un polynôme	74
5.5	Implémentation numérique détaillée	75
5.6	Une méthode alternative efficace par tirage aléatoire brute-force	79
5.7	Sur le choix de la méthode la plus adaptée - Quelques exemples	80
5.7.1	Cas test 7	80
5.7.2	Cas test 9	81
5.7.3	Cas test 11	83
6	Conclusion	85
A	Quelques notes sur l'évaluation de fonction sans compensation	86
A.1	Introduction	86
A.2	Principe de la méthode GMR	87
A.2.1	Quelques notions classiques en analyse complexe	87
A.2.2	Lien entre compensation et fonction indicatrice	88
A.3	L'ordre, le type et la fonction indicatrice de la fonction de probabilité	88
A.3.1	Transformée de Borel et théorème de Polya	88
A.3.2	Choix du préconditionneur $e^{p\xi}$	89
B	Quelques notes sur les séries divergentes	91
C	Définitions, résultats et faits élémentaires de la théorie de la mesure	95
D	Fonctions mesurables et intégration	98
E	Image d'une mesure	100
F	Les repères de référence	101
F.1	Le repère géocentrique équatorial	101
F.2	Repères orbitaux locaux	102
F.2.1	Le repère orbital local RSW (RTN) de Gauss	103
F.2.2	Le repère orbital local NTW de Frenet	107
F.3	Le repère équinoxial	108

Notations

Mathématiques

Les preuves sont terminées par le symbole \square .

Ensembles

- \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels.
- \mathbb{Z} : ensemble des entiers relatifs.
- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq 1\}$.
- ${}^c A := A \setminus B = \{x \in A \text{ t.q. } x \notin B\}$: complément de B dans A . L'indice préfixe c peut être omis si le contexte est suffisamment clair.
- ∂A : frontière de l'espace topologique A .
- $\text{cl}(A) = A \cup \partial A$: fermeture de l'espace topologique A .
- $\overline{B}(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \|x - y\|_2 \leq R\}$ ($n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$).
- $\text{supp}(f) = \text{cl}(\{x \in A \text{ t.q. } f(x) \neq 0\})$: support de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\text{supp}(\mu)$: support de la mesure μ .

Analyse complexe

- $\text{Re}(z)$: partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.
- $\text{Im}(z)$: partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$.

Fonctions et Mesures

- id : fonction identité c.-à-d. $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$.
- 1_B : fonction indicatrice de l'ensemble B .
- $|\cdot|$: valeur absolue.
- $\|x\|_2 = \left[x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right]$: norme euclidienne.
- $\mu_1 \otimes \mu_2$: mesure produit des mesures μ_1 et μ_2 .

Calcul Différentiel et Analyse Vectorielle

Soit $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $f : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire et $g : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel.

- $\partial_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$: dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i ($i = 1, \dots, n$).
- $\dot{g} = \partial_t g = (\partial_t g_1, \partial_t g_2, \dots, \partial_t g_m)$: dérivée partielle temporelle de g .
- $\nabla f = (\partial_t f, \partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots)^T$: opérateur gradient.
- $\text{div}(g) = \partial_{x_1} g_1 + \partial_{x_2} g_2 + \dots + \partial_{x_n} g_n$: opérateur divergence.
- $J(g) = (\partial_{x_1} g, \partial_{x_2} g, \dots, \partial_{x_n} g)$: opérateur jacobien.
- $d_t f = \frac{df}{dt} = \partial_t f + (\nabla f) \cdot g$: dérivée totale de f suivant le champ de vecteur g .

Algèbre Linéaire

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: ensemble des matrices avec $m \in \mathbb{N}$ lignes et $n \in \mathbb{N}$ colonnes, et dont les éléments sont dans le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- I_n : matrice carrée identité de dimension n .
- Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}))^2$ ($n \in \mathbb{N}$). La notation « $A \succeq 0$ » signifie A est semidéfinie positive. « $A \succeq B$ » signifie « $A - B \succeq 0$ ».
- $u \cdot v$: produit scalaire entre les vecteurs u et v .
- $\langle A, B \rangle_F = \text{trace}(A^T B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$: produit scalaire de Frobenius de deux matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^2$, ($n, m \in \mathbb{N}$).
- $0_{n,m}$ est une matrice de zéros de dimensions $n \times m$.

Dénombrément, Probabilités et Statistiques

- $k!!$: double factorielle = $\begin{cases} k \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 & \text{si } k \text{ impair} \\ k \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$ et $(-1)!! = 1$.
- $\mathbb{P}(E)$: probabilité de l'évènement E .
- $x \sim \mathcal{N}(m, P)$: x est un vecteur aléatoire de dimension n ($n \in \mathbb{N}$) dont la distribution est une gaussienne multivariée de vecteur moyenne $m \in \mathbb{R}^n$ et de matrice de covariance $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ($P \succeq 0$).

Dynamiques Orbitales

Ces notations définissent les notations utilisées pour les vecteurs d'état et les dynamiques associées dans ce rapport sauf mention explicite de changement de notation au début d'une section.

- $r_\star = (r_{\star 1}, r_{\star 2}, r_{\star 3})^T$: vecteur position de l'objet \star dans un référentiel donné, (primaire : $\star = p$, secondaire : $\star = s$, relatif : $\star = r$).
- $v_\star = (v_{\star 1}, v_{\star 2}, v_{\star 3})^T$: vecteur vitesse de l'objet \star .
- $x_\star = (r_\star^T, v_\star^T)^T$: vecteur d'état de l'objet \star .
- $X_{\star b} = (x_\star^T, x_b^T)^T$: vecteur d'état de l'objet composé de \star et b .
- $f_\star(\cdot, \cdot)$: dynamique du système (objet) \star .
- $x(\cdot | x^0)$: trajectoire, solution des équations du mouvement issue de la condition initiale x^0 .

Acronymes

- TCA : Time of Closest Approach.
- LMI : Linear Matrix Inequality.
- PDF : Probability Density Function.
- SOS : Sum Of Squares.
- SDP : SemiDefinite Programming.

1 Introduction

1.1 Introduction générale

L'évaluation du risque de collision en orbite entre deux engins spatiaux, par calcul de la probabilité de collision, repose actuellement majoritairement sur deux modèles de rencontre qui sont définis dans la littérature comme les rencontres rapides (short-term en anglais) et les rencontres lentes (long-term en anglais). Il est également possible de trouver la dichotomie rencontres linéaires et rencontres non linéaires sans qu'il soit complètement évident de savoir si les deux oppositions ainsi définies sont exactement les mêmes. Même en supposant que ces oppositions sont identiques et que l'on puisse indifféremment appeler le modèle de rencontre le plus simple, rapide ou linéaire, le nombre important d'hypothèses simplificatrices qui le caractérisent indique clairement qu'il n'est en revanche pas raisonnable de postuler qu'il n'existe qu'une seule autre classe de rencontres ne satisfaisant pas à tout ou partie de ces hypothèses. D'ailleurs, les critères utilisés pour décider si une rencontre appartient à l'une ou l'autre de ces deux classes ne sont pas complètement satisfaisants puisque d'une certaine manière, ils postulent par principe que rapide et linéaire sont plus ou moins équivalents et donc que la perte d'une certaine hypothèse entraîne nécessairement la perte d'un certain nombre d'autres hypothèses qui ne paraissent pas toujours lui être indiscutablement liées.

Ainsi, cela explique sans doute le fait qu'il n'y ait ni une hiérarchie claire ni une solution se dégageant nettement dans la classe des méthodes de calcul dédiées aux rencontres lentes alors que les méthodes de calcul de la probabilité de collision pour le modèle de rencontre rapide sont suffisamment efficaces et offrent un degré de maturité important. Il est toutefois indispensable de signaler qu'une étape importante allant dans le sens d'une clarification des conditions d'application de méthodes de calcul numérique efficaces et adossées à un modèle théorique clairement défini (en particulier les hypothèses retenues) a été franchie par V.T. Coppola dans son article [26]. La méthode proposée dans cette référence a semblé alors s'imposer rapidement comme une méthode standard pour toutes les rencontres lentes [29], [72]. Presque aussi rapidement, des travaux ont été publiés montrant le manque d'efficacité de la méthode dans certains cas pratiques particuliers [69] et même remettant en cause les fondements théoriques de la méthode [21], [22].

Un premier objectif de ce rapport est de démontrer que les bases théoriques et mathématiques de la méthode de Coppola sont parfaitement assurées si l'on reste dans le cadre des hypothèses données dans [26]. En s'adossant à la théorie de la mesure, il est ainsi démontré que la formule de Coppola est complètement justifiée dans le cadre des hypothèses retenues. Par ailleurs, les contre-exemples présentés dans les articles [21] et [22] et impliquant des erreurs théoriques de la méthode, ont été analysés dans le rapport [12] où il est montré qu'ils n'entrent pas dans le cadre du modèle théorique retenu dans [26].

L'analyse de la pertinence théorique et de l'efficacité numérique de la méthode de Coppola nous a conduit également à réfléchir à de nouvelles méthodes couvrant des rencontres qui n'entrent *stricto sensu* ni dans la catégorie des rencontres rapides ni dans la catégorie des rencontres lentes. Cela peut comprendre par exemple les rencontres rapides avec des incertitudes sur les vitesses relatives ou le cas de rencontres répétées avec des hypothèses non vérifiées de mouvement relatif rectiligne lors de la rencontre. Nous avons donc revisité le cadre des rencontres rapides en rappelant la méthode de calcul de la probabilité de collision par développement en série entière, puis en donnant, pour les cas où le nombre de termes nécessaires est grand, une méthode complémentaire basée sur le développement en séries divergentes. Cette méthode a un double objectif : être utile en tant que telle pour le calcul de la probabilité instantanée en d dimensions mais également servir de brique de base pour d'autres méthodes permettant d'aborder des rencontres plus complexes.

Trois nouvelles méthodes dont la complexité de calcul est variable sont ainsi proposées dans

ce rapport. Les fondements théoriques en sont décrits en détail et les algorithmes permettant leur mise en œuvre informatique sont également fournis. Si la première méthode est une extrapolation relativement directe de la méthode 2D pour les rencontres rapides, les deux autres se fondent sur la notion de *swept volume* qui nous semble très prometteuse et dont on peut trouver l'idée préliminaire quoique inaboutie dans les papiers de Chan [21] et [22]. Quelques exemples numériques de la littérature illustrent ces développements.

Dans ce travail, on s'intéresse à la conjonction des trajectoires de deux corps en orbite. Cette rencontre met donc en scène un satellite actif opérationnel, l'objet primaire p , et un débris spatial, l'objet secondaire s . Dans la suite, on définit le cadre mathématique nécessaire à l'évaluation du risque de collision selon un critère probabiliste.

1.2 Modèle général de rencontre et définition du problème d'évaluation du risque de collision

1.2.1 Géométrie des objets

La nature géométrique des objets en conjonction doit être connue afin de définir l'état de collision entre eux.

Hypothèse 1 (Géométrie sphérique.).

Les objets p et s sont modélisés par des sphères, de diamètre respectif D_p et D_s .

Cette hypothèse permet d'ignorer tous les aspects liés à l'orientation dans l'espace des deux corps, et notamment les éventuelles contraintes d'attitude de l'objet primaire. Elle permet aussi de modéliser de manière conservatrice l'objet secondaire, dont la géométrie est souvent mal connue.

Remarque 1.

Plusieurs auteurs [59, 5, 20] se sont intéressés à des géométries différentes, comme des polygones ou des assemblages de polygones. De tels modèles permettent de modéliser plus finement des structures complexes comme la Station Spatiale Internationale [20].

La Figure 1 représente la configuration spatiale d'une rencontre entre deux objets modélisés par des sphères.

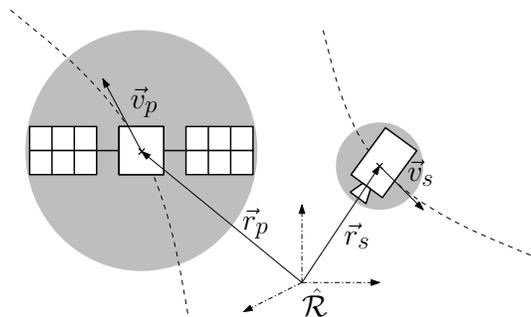


FIGURE 1 – Profil sphérique d'une rencontre

1.2.2 Modèles dynamiques pour la rencontre

L'état de chaque objet en orbite est décrit par les vecteurs de leurs position et vitesse, $x_p^T = (r_p^T, v_p^T)$ et $x_s^T = (r_s^T, v_s^T)$, donnés dans un repère de référence $\hat{\mathcal{R}}$. Ce peut être un référentiel

inertiel ou bien un repère local. On considère un intervalle de temps $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$ au cours duquel les deux corps sont soumis à des dynamiques propres définies par les champs de vecteurs $f_p, f_s : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^3$. Ainsi, pour tout $t \in \mathcal{J}$:

$$\frac{dv_p}{dt}(t) = f_p(t, x_p), \quad x_p(t_0) = x_p^0, \quad (1)$$

$$\frac{dv_s}{dt}(t) = f_s(t, x_s), \quad x_s(t_0) = x_s^0. \quad (2)$$

T est un nombre réel positif définissant l'intervalle de temps de la rencontre et t_0 est la date initiale (temps à l'époque par exemple). Ces dynamiques, supposées déterministes, tiennent compte de l'attraction gravitationnelle newtonienne. Elles peuvent aussi prendre en compte des perturbations orbitales diverses : non-sphéricité de la Terre, frottement atmosphérique, pression de radiation solaire, attraction de la Lune, etc. Quel que soit le modèle adopté, on suppose que les solutions aux problèmes de Cauchy des systèmes (1) et (2) sont uniques.

Afin de décrire la dynamique relative des objets, on définit le vecteur $x_r^T = (r_r^T, v_r^T)$ tel que :

$$r_r = r_s - r_p, \quad (3)$$

et

$$v_r = v_s - v_p. \quad (4)$$

De la même façon, il est possible de définir un objet composé du primaire et du secondaire dont les états sont concaténés dans un vecteur global d'état X_{ps} :

$$X_{ps}^T = (r_p^T, v_p^T, r_s^T, v_s^T) \in \mathbb{R}^n,$$

où $n = 12$.

Les équations dynamiques de ces deux objets sont alors définies par :

$$\begin{cases} \dot{X}_{ps}(t) = f_{ps}(t, X_{ps}(t)), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ X_{ps}(t_0) = X_{ps}^0. \end{cases} \quad (5)$$

où f_{ps} est un champ de vecteur réel composé des deux champs de vecteurs f_p et f_s .

Définition 1 (Trajectoire).

Pour une condition initiale donnée $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$, une trajectoire issue de X_{ps}^0 est la solution unique de :

$$X_{ps}(t|X_{ps}^0) = X_{ps}^0 + \int_{t_0}^t f(u, X_{ps}(u|X_{ps}^0)) du. \quad (6)$$

1.2.3 Définition des incertitudes affectant le modèle

Grâce à des mesures physiques, les positions et vitesses des deux objets sont connues avec une certaine incertitude à un temps de référence, pris comme origine des temps. Le vecteur des conditions initiales $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire dont la distribution est définie par une mesure de probabilité donnée μ_I dont la fonction de densité est $\rho_I = \frac{d\mu_I}{d\lambda} : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^+$ (cf. la notation définie dans l'Annexe D). En revanche, le modèle dynamique de chaque objet est considéré comme déterministe et non incertain.

Hypothèse 2 (Dynamiques déterministes.).

Les objets p et s suivent des dynamiques déterministes et non incertaines.

1.2.4 Définition de la collision

Définissons maintenant la notion de collision. Supposons que pour toute condition initiale $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$, la trajectoire correspondante existe sur l'intervalle de temps $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + T]$, alors une collision intervient quand une trajectoire entre dans une *région interdite* \mathcal{X}_R donnée. Par exemple, en pratique, dans le cadre de la modélisation sphérique (Hypothèse 1), il y a collision sur un intervalle de temps $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ si et seulement si on a l'existence de $t \in \mathcal{I}$ tel que :

$$\|r_r(t)\|_2 \leq R, \quad (7)$$

avec :

$$R = \frac{D_p + D_s}{2}. \quad (8)$$

Si l'état X_{ps} est donné par les positions et vitesses des 2 objets, alors la *région interdite* est définie par :

$$\mathcal{X}_R = \{X_{ps}^T = (r_p^T, v_p^T, r_s^T, v_s^T) \in \mathbb{R}^{12} \mid \|r_s - r_p\|^2 - R^2 < 0\}. \quad (9)$$

En d'autres termes, du point de vue de la position relative, l'ensemble de collision à un instant t est assimilable à une sphère fictive de rayon R . On définit ainsi l'objet sphérique combiné, représenté sur la Figure 2 comme la région interdite \mathcal{X}_R .

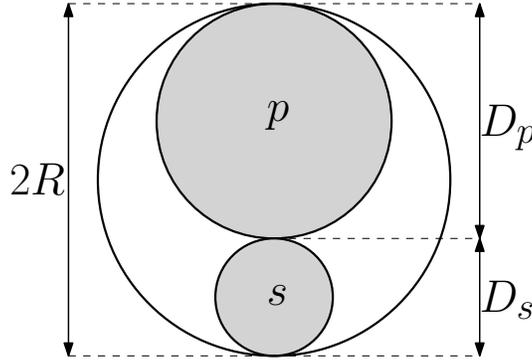


FIGURE 2 – Sphère combinée des deux objets

Définissons le complément de la région interdite, appelé *région admissible*, par ${}^c\mathcal{X}_R := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}_R$.

Définition 2 (Collision).

Pour une condition initiale $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$, une date de fin de rencontre $T + t_0 > 0$, et une région interdite \mathcal{X}_R , une collision intervient s'il existe $t \in [t_0, t_0 + T]$ tel que $X_{ps}(t|X_{ps}^0) \in \mathcal{X}_R$.

Définition 3 (Domaine de collision).

Le domaine de collision \mathcal{X}_T^0 sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ est l'ensemble des conditions initiales conduisant à une collision entre une paire d'objets durant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$:

$$\mathcal{X}_T^0 = \{X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [t_0, t_0 + T], X_{ps}(t|X_{ps}^0) \in \mathcal{X}_R\}. \quad (10)$$

Remarque 2.

Dans l'Equation (9) et la Définition 3, les ensembles \mathcal{X}_R et \mathcal{X}_T^0 ont été définis à partir du vecteur d'état X_{ps} de l'objet combiné. Des définitions équivalentes pourraient être données à partir de n'importe quel vecteur d'état combiné tel que X_{rp} par exemple. En fait, si l'on restreint la région interdite à la sphère combinée, seul le vecteur d'état relatif x_r est impliqué dans la définition de ces ensembles. Dans ce cas, qui est celui qui va être exclusivement étudié dans ce rapport, ces ensembles sont tels que $\mathcal{X}_R \subset \mathbb{R}^{n/2}$ et $\mathcal{X}_T^0 \subset \mathbb{R}^{n/2}$.

1.2.5 Evaluation du risque par la probabilité de collision

Historiquement, le premier critère utilisé dans l'évaluation du risque de collision entre deux objets était purement géométrique : il reposait essentiellement et uniquement sur le fait de tester si la trajectoire nominale entrait ou non dans une zone interdite [9, 27] (incluant la région interdite définie plus haut) dont la taille était arbitrairement fixée ou calculée en fonction de l'écart-type définissant les incertitudes. Une formulation plus naturelle du problème d'évaluation du risque de collision repose sur le calcul de *la probabilité* qu'une collision intervienne.

Problème 1.

Soit le modèle dynamique donné par (5), une date $t_0 + T > 0$ et une région admissible ${}^c\mathcal{X}_R$. Si les conditions initiales $X_{ps}^0 \in \mathbb{R}^n$ sont distribuées suivant une mesure de probabilité donnée μ_I dont la fonction densité est ρ_I , la probabilité qu'une collision arrive est calculée simplement par :

$$\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} = \mathcal{P}_c([t_0, t_0 + T]) = \mathcal{P}_c(T, t_0) = \mathbb{P}(X_{ps}^0 \in \mathcal{X}_T^0) = \mu_I(\mathcal{X}_T^0) = \int_{\mathcal{X}_T^0} d\mu_I. \quad (11)$$

Remarque 3.

Si $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$, on a $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}_1} \leq \mathcal{P}_c^{\mathcal{I}_2}$. De plus, lorsque l'intervalle de temps est réduit à un singleton, on regarde en réalité la probabilité pour qu'il y ait collision à une date fixée. On parle de probabilité instantanée de collision à l'instant t et on a la propriété $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} \geq \sup_{t \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_c^{\{t\}}$.

Le calcul analytique de la probabilité de collision définie par (11) est un problème très difficile dans sa généralité : la première difficulté est de déterminer le domaine d'intégration, qui dépend du modèle choisi pour les dynamiques et donc pour la propagation de la distribution de probabilité de l'état initial aléatoire. De plus, l'opération d'intégration de la densité de probabilité sur cet ensemble peut également être une étape complexe, même dans le cas d'une distribution initiale gaussienne [20].

Les seules méthodes de calcul qui s'appliquent dans le cadre le plus général possible c.-à-d. sans hypothèse particulière sont celles de Monte-Carlo. Dans la littérature, on les trouve par exemple dans [8, 32]. Elles sont basées sur un échantillonnage aléatoire de N vecteurs dans l'espace des conditions initiales. Pour chacun d'entre eux, on simule la trajectoire selon le modèle dynamique adopté sur l'intervalle \mathcal{I} , que l'on discrétise. On compte 1 s'il y a collision, 0 sinon. Au final, la probabilité est donnée par la formule $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i$. Le nombre de tirages à effectuer dépend de la précision demandée ainsi que de la valeur de la probabilité : une valeur faible requiert beaucoup d'échantillons pour être correctement estimée. C'est là un des désavantages majeurs des méthodes de Monte-Carlo : on peut avoir besoin de beaucoup de tirages et les simulations peuvent s'avérer coûteuses en temps. Ces méthodes sont donc peu aptes à calculer des probabilités faibles, liées à des événements dits rares. Des méthodes spécifiques existent néanmoins pour essayer de réduire le nombre de tirages nécessaires [55].

1.3 Formalisme des mesures pour la modélisation de la probabilité de collision

A l'instar de ce qui est proposé dans la référence [26], l'ensemble \mathcal{X}_T^{00} est l'ensemble des états initiaux pour lesquels une collision intervient à $t = t_0$ et l'ensemble $\mathcal{X}_T^{0t_c} := \mathcal{X}_T^0 \setminus \mathcal{X}_T^{00}$ est l'ensemble des états initiaux restants pour lesquels une collision intervient plus tard dans \mathcal{J} (à la date t_c). La probabilité de collision $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} := \mu_I(\mathcal{X}_T^0)$ est donc, $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} = \mu_I(\mathcal{X}_T^{00}) + \mu_I(\mathcal{X}_T^{0t_c})$. En pratique, la probabilité qu'une collision intervienne à $t = t_0$ est souvent très faible. Toutefois, le calcul de la probabilité de collision *instantanée* à un temps fixé $t = t_0$ (quand la distribution des états en t_0 est gaussienne) est aussi un problème intéressant qui peut être analysé indépendamment.

Nous nous intéressons plus particulièrement au calcul de $\mu_I(\mathcal{X}_T^{0t_c})$. Plus spécifiquement, on suppose données la distribution (la mesure) de tous les états initiaux μ_I , les dynamiques des deux objets, ainsi que la région interdite \mathcal{X}_R . Le calcul de $\mu_I(\mathcal{X}_T^{0t_c})$ revient à trouver (dans un certain sens) une mesure initiale inconnue μ_0 qui peut être vue comme la restriction de μ_I aux états initiaux conduisant à une collision dans l'intervalle de temps $(t_0, t_0 + T]$. Cette restriction sera notée $1_{\mathcal{X}_T^{0t_c}}\mu_I$. On suppose que les trajectoires $X_{ps}(\cdot|X_{ps}^0)$ issues de $X_{ps}^0 \in {}^c\mathcal{X}_R$ sont des fonctions continues et nous définissons $({}^c\mathcal{X}_R)^\circ$ comme l'intérieur de ${}^c\mathcal{X}_R$. Alors, pendant la période fixée $(t_0, t_0 + T]$, ces trajectoires sont soit dans l'ensemble $({}^c\mathcal{X}_R)^\circ$ soit touchent sa frontière topologique $\partial {}^c\mathcal{X}_R := {}^c\mathcal{X}_R \setminus ({}^c\mathcal{X}_R)^\circ$ en une date de premier contact $\tau(X_{ps}^0) \in (t_0, t_0 + T]$,

$$\tau(X_{ps}^0) := \min\{t_0 + T, \inf\{t \geq t_0 \text{ t.q. } X_{ps}(t|X_{ps}^0) \in \partial {}^c\mathcal{X}_R\}\}.$$

Finalement, nous définissons la mesure finale $\mu_F \in M([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n)_+$ qui capture la distribution des dates de premier contact $\tau(X_{ps}^0)$ et les états correspondants $X_{ps}(t|X_{ps}^0)$ après propagation par les dynamiques à partir de la mesure initiale μ_0 :

$$\mu_F(A \times B) := \int_{[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n} 1_{A \times B}(\tau(X_{ps}^0), X_{ps}(\tau(X_{ps}^0)|X_{ps}^0)) d\mu_0(X_{ps}^0), \quad (12)$$

pour tout ensemble de Borel mesurable $A \times B \subseteq (t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n$. La mesure finale μ_F est la mesure image $h_{\tau*}\mu_0$ de μ_0 , par l'application :

$$h_{\tau} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n, \\ X_{ps}^0 \mapsto (\tau(X_{ps}^0), X_{ps}(\tau(X_{ps}^0)|X_{ps}^0)), \end{array} \quad (13)$$

c'est à dire :

$$\mu_F(A \times B) = \mu_0(h_{\tau}^{-1}(A \times B)), \quad (14)$$

pour tout ensemble de Borel mesurable $A \times B \subseteq (t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n$. (cf. Figure 3).

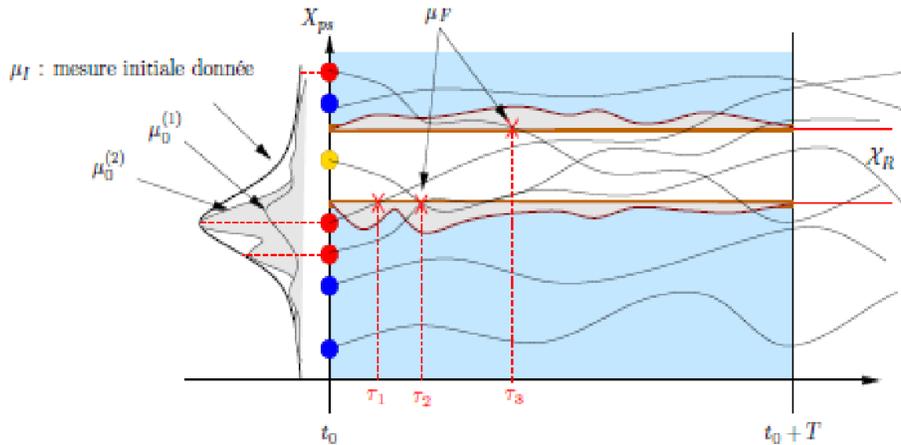


FIGURE 3 – Points jaunes : $X_{ps}^0 \in \mathcal{X}_T^{00}$, points rouges : $X_{ps}^0 \in \mathcal{X}_T^{0\tau_i}$, points bleus : $X_{ps}^0 \in {}^c\mathcal{X}_T^{00}$.

2 Evaluation du risque pour les rencontres rapides

2.1 Le cadre théorique des rapprochements rapides

Certaines rencontres se caractérisent par une vitesse relative moyenne élevée, de l'ordre du km/s. Cette configuration pousse à faire des hypothèses supplémentaires afin de définir le modèle dit des rencontres rapides (« short-term encounter » dans la littérature anglophone [20, 26]), dont par ailleurs certains auteurs se sont intéressés aux limites de validité [25, 32, 20] comme nous le verrons dans la suite de ce rapport. Cette modélisation de la rencontre repose sur un ensemble d'hypothèses qui vont être rappelées précisément dans la suite, dont, en particulier, l'hypothèse fondamentale d'un mouvement relatif rectiligne, réaliste en raison de la faible courbure de la trajectoire au plus proche de la conjonction. Il existe même chez certains auteurs [59, 3] une dénomination alternative du modèle sous la forme de rencontre linéaire. Dans un tel cadre, la probabilité de collision admet une expression simplifiée, sous la forme d'une intégrale 2-D. Les démonstrations de cette formule varient dans la littérature, où l'on distingue essentiellement deux formulations. D'un côté, il est possible d'obtenir d'abord une expression du taux de collision, puis de l'intégrer selon la variable temporelle [1, 26]. Cette formulation sera analysée dans la deuxième partie de ce rapport quand il sera question de justifier la validité théorique de la formule de Coppola pour le calcul de la probabilité de collision dans le cadre des rencontres long-terme. De l'autre, certains auteurs [9, 20] suivent un raisonnement similaire à ce qui est proposé dans la suite de cette section, dans la continuité du cas général présenté dans la section précédente. Plus précisément, on considère le volume géométrique des coordonnées relatives initiales aboutissant à une collision, sur lequel on intègre ensuite la fonction de densité du vecteur aléatoire de position relative.

2.1.1 Définition du modèle des rencontres rapides et des hypothèses associées

L'idée essentielle sur laquelle repose la classe des rencontres rapides est que la durée de la conjonction est suffisamment courte pour permettre à un certain nombre d'hypothèses simplificatrices d'être considérées comme pertinentes et valides. Par exemple, la faible durée de la rencontre incite à négliger les écarts concernant les vitesses des deux objets, limitant ainsi l'incertitude à leurs seules positions.

Hypothèse 3 (Aucune incertitude sur la vitesse relative.).

A chaque instant $t \in [t_0, t_0 + T]$, le vecteur de vitesse relative $v_r(t)$ est précisément connu et est un vecteur déterministe.

Les hypothèses suivantes sont également fondamentales et concernent la modélisation des incertitudes affectant les conditions initiales des deux objets.

Hypothèse 4 (Vecteurs aléatoires gaussiens.).

On suppose que les conditions initiales x_p^0 et x_s^0 suivent des lois de distribution multinormales conjointement définies c.-à-d. $x_p^0 \sim \mathcal{N}_3(m_{p_0}, P_{p_0})$ et $x_s^0 \sim \mathcal{N}_3(m_{s_0}, P_{s_0})$. Cela implique que le vecteur aléatoire X_{ps}^0 est gaussien ($X_{ps}^0 \sim \mathcal{N}_6(m_{ps_0}, P_{ps_0})$).

On déduit facilement de cette hypothèse que la mesure initiale μ_I est une distribution gaussienne de densité $\rho_I(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(P_{ps_0})}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - m_{ps_0})^T P_{ps_0}^{-1} (x - m_{ps_0}) \right]$. Associée à cette dernière hypothèse, une hypothèse d'indépendance (équivalente à la décorrélation dans le cas gaussien) est également nécessaire.

Hypothèse 5 (Indépendance des lois de probabilité.).

On suppose que les vecteurs aléatoires x_p^0 et x_s^0 sont indépendants.

La nature géométrique de la trajectoire relative est fondamentale dans la dérivation de la formule 2D de la probabilité de collision pour les rencontres rapides.

Hypothèse 6 (Mouvement rectiligne uniforme.).

Le mouvement de chaque objet est considéré comme rectiligne uniforme pendant la rencontre. Ainsi, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$r_p(t) = r_p^0 + v_p^0 t, \quad (15)$$

$$r_s(t) = r_s^0 + v_s^0 t. \quad (16)$$

Cela signifie que le mouvement relatif entre les deux objets sera un mouvement rectiligne $r_r(t) = r_r^0 + v_r^0 t$.

Les hypothèses de mouvement rectiligne et de vitesses déterministes conduisent naturellement à introduire le plan et le repère de la rencontre. La définition exacte de ce dernier varie dans la littérature [20, 60] mais, dans tous les cas, le repère est centré sur l'un des objets et un des axes est orienté selon la vitesse relative.

Définition 4. *Repère et plan de rencontre au temps t .*

A une date t , on définit le repère local de rencontre $\tilde{\mathcal{R}}_t$ de la manière suivante :

- *Origine : position moyenne du centre de gravité de l'objet primaire*
- *Axe \tilde{z} : orienté selon la vitesse relative v_r^0*

Les deux autres axes sont perpendiculaires à la vitesse relative. Le plan Π_t contenant l'origine et qui est engendré par ces axes est appelé plan de rencontre.

- *Axe \tilde{x} : dirigé vers la projection de la position moyenne du centre de gravité de l'objet secondaire dans le plan de rencontre*
- *Axe \tilde{y} : complète le repère orthogonal direct*

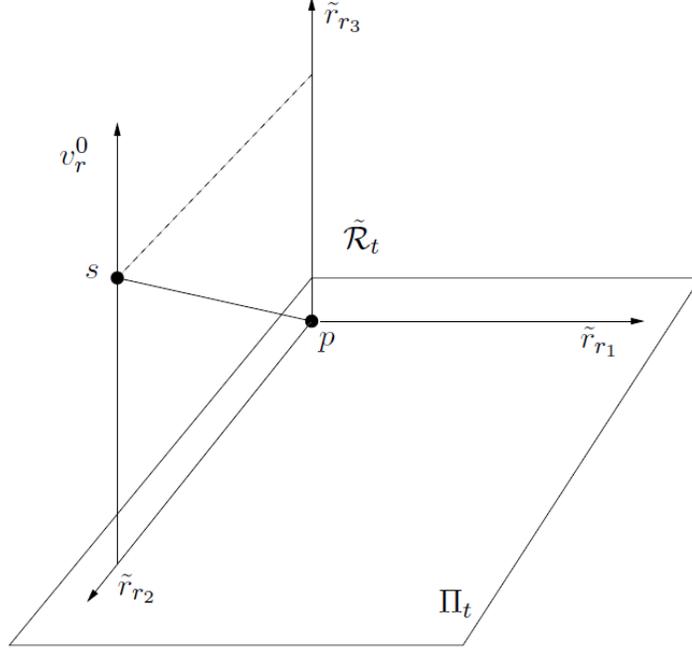


FIGURE 4 – Repère et plan de rencontre

2.1.2 Première dérivation de la probabilité de collision 2D

Les développements présentés dans cette section ont pour but de retrouver l'expression de la probabilité 2D telle qu'elle est définie dans la littérature avec une approche directe. Une approche différente reprenant la dérivation proposée dans [26] sera également donnée dans la suite de ce rapport.

Soit le repère de rencontre local $\tilde{\mathcal{R}}_0$ pour $t = t_0$. En notant, $t_1 = t_0$ et $t_2 = t_0 + T$, on va exprimer la probabilité de collision à l'aide du vecteur aléatoire x_r^0 exprimé dans ce repère. D'après l'Hypothèse 6, le mouvement relatif est rectiligne uniforme :

$$r_r(t) = r_r^0 + v_r^0 t \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (17)$$

Nous rappelons que, du fait que seule la position relative est incertaine durant la rencontre :

$$\mathcal{X}_T^0 = \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t \in [t_0, t_0 + T], r_r(t|x_r^0) \in \mathcal{X}_R\}, \quad (18)$$

où \mathcal{X}_R est la région interdite définie par la sphère de rayon R dans le domaine des positions relatives. Nous avons donc :

$$\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} = \iiint_{\mathcal{X}_T^0} \rho_I(r_r) dr_r. \quad (19)$$

Du fait de la géométrie particulière de \mathcal{X}_R et du mouvement relatif rectiligne, le volume d'intégration \mathcal{X}_T^0 peut se réécrire sous la forme d'un domaine tubulaire, appelé tube de collision [20] et représenté sur la Figure 5 :

$$\mathcal{X}_T^0 = \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \bar{B}_3(-tv_r^0, R). \quad (20)$$

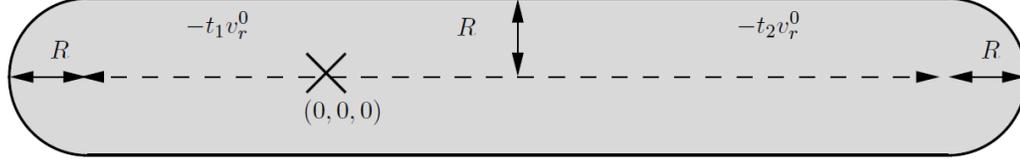


FIGURE 5 – Tube de collision définie pour $t_1 = t_0$ et $t_2 = t_0 + T$.

Quel que soit le repère initial dans lequel sont données les caractéristiques statistiques du vecteur relatif r_r , son caractère gaussien ainsi que l'indépendance entre r_p et r_s sont conservés par changement de base lors du passage dans le repère de rencontre local.

Ses caractéristiques, écrites dans cette base, sont données par :

$$\tilde{m}_{r_0} = \tilde{m}_{s_0} - \tilde{m}_{p_0}, \quad (21)$$

et

$$\tilde{P}_{r_0} = \tilde{P}_{p_0} + \tilde{P}_{s_0}. \quad (22)$$

Le calcul de la probabilité de collision se ramène donc à l'intégrale d'une loi multinormale de dimension 3 sur un domaine tubulaire. Formulée à l'aide de la fonction de densité, cela donne :

$$\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det(\tilde{P}_{r_0})}} \int_{\mathcal{X}_T^0} \exp\left(-\frac{1}{2}(r_r - \tilde{m}_{r_0})^T \tilde{P}_{r_0}^{-1} (r_r - \tilde{m}_{r_0})\right) dr_r. \quad (23)$$

La Figure 6 permet de visualiser les différents paramètres de cette intégrale. Sont représentés d'une part le domaine d'intégration (le tube de collision) et d'autre part ce que l'on appelle une n - σ ellipsoïde de la loi normale. Il s'agit d'une ligne de niveau particulière de la fonction de densité gaussienne : selon les valeurs de l'entier n , cette surface englobe un certain pourcentage des occurrences possibles de la variable aléatoire.

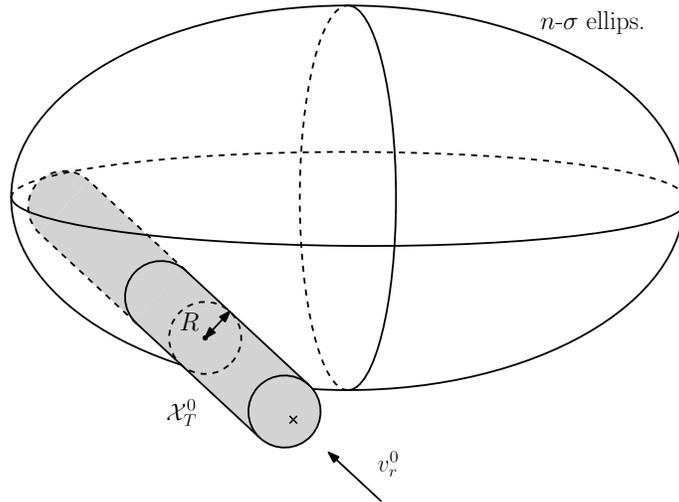


FIGURE 6 – Représentation des paramètres de l'intégrale 3-D

Une hypothèse simplificatrice additionnelle consiste à étendre à l'infini le tube de collision. Cela revient à considérer que $\mathcal{J} = \mathbb{R}$. En faisant cette approximation, on fait l'hypothèse que l'apport de

l'intégration sur la queue de la distribution gaussienne due à l'extension de l'intégration temporelle sera négligeable. Il s'agit d'une hypothèse conservatrice puisque l'on approche par valeur supérieure l'intégrale initiale. Cette approximation permet de se ramener à un problème 2-D. En effet :

$$\mathcal{X}_\infty^0 = \bar{B}_2(0, R) \times \mathbb{R}, \quad (24)$$

et donc \mathcal{X}_∞^0 est le cylindre circulaire droit de rayon R , d'axe \tilde{r}_{r_3} et de hauteur infinie. Dans sa définition, il ne fait pas intervenir la troisième coordonnée r_{r_3} . En conséquence, l'intégration sur ce volume se réduit à celle sur un disque de rayon R et centrée à l'origine de la densité de probabilité marginale sur les deux premières coordonnées de r_{r_0} dans le repère de rencontre local, notées $(\tilde{r}_{r_1}, \tilde{r}_{r_2})$. D'après les propriétés des lois normales [58], cette loi marginale est aussi une loi normale (cf. Figure 7) dont le vecteur moyenne $\tilde{m}_{r_{r_1}, r_{r_2}}$ est obtenu en prenant les deux premières coordonnées de $\tilde{m}_{r_{r_0}}$ et dont la matrice de covariance $\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}}$ est la sous-matrice 2×2 de $\tilde{P}_{r_{r_0}}$ constituée des deux premières lignes et colonnes.

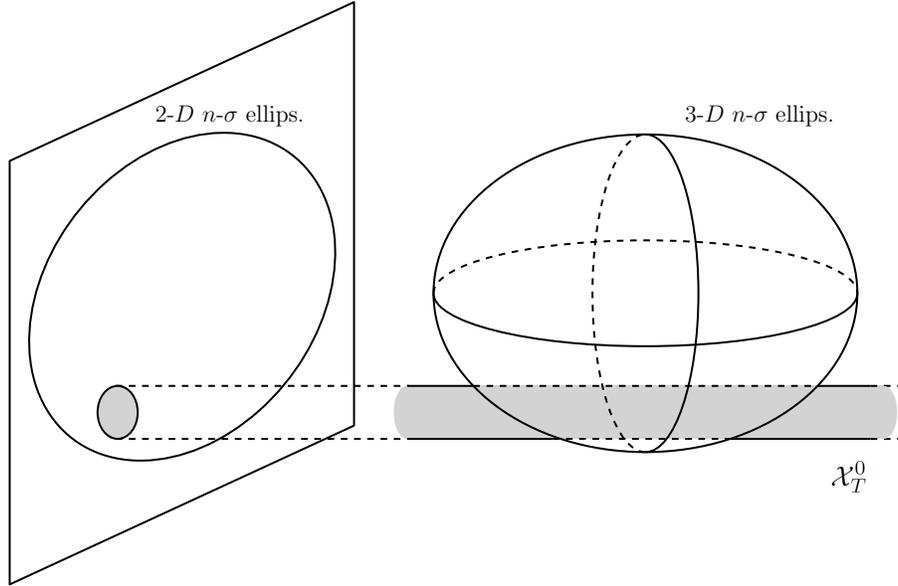


FIGURE 7 – Passage de la dimension 3 à la dimension 2

On obtient ainsi :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det(\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}})}} \iint_{\bar{B}_2(0, R)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} r_{r_1} \\ r_{r_2} \end{bmatrix} - \tilde{m}_{r_{r_1}, r_{r_2}} \right)^T \tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}}^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_{r_1} \\ r_{r_2} \end{bmatrix} - \tilde{m}_{r_{r_1}, r_{r_2}} \right)\right) dr_{r_1} dr_{r_2} \quad (25)$$

La définition même du repère de rencontre implique que $\tilde{m}_{r_{r_1}, r_{r_2}}^T = (\tilde{m}_{r_{r_1}}, 0)$, avec $\tilde{m}_{r_{r_1}}$ la distance de plus proche passage en moyenne. Quant à $\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}}$, s'agissant d'une matrice de covariance, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 & \text{cõr}(r_{r_1} r_{r_2}) \tilde{\sigma}_{r_{r_1}} \tilde{\sigma}_{r_{r_2}} \\ \text{cõr}(r_{r_1} r_{r_2}) \tilde{\sigma}_{r_{r_1}} \tilde{\sigma}_{r_{r_2}} & \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

où $\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}, \tilde{\sigma}_{r_{r_2}} > 0$ représentent les écarts types selon r_{r_1}, r_{r_2} et $\text{cõr}(r_{r_1} r_{r_2}) \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation linéaire.

La matrice $\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}}$ étant symétrique réelle, elle est toujours diagonalisable. Dans le but d'éliminer les termes croisés de la fonction gaussienne, on effectue un changement de variables vers la base propre de la matrice de covariance. On réalise ainsi une rotation permettant de s'aligner avec les axes principaux (voir Figure 8). On choisit l'angle, noté $-\tilde{\theta}$, qui permet d'avoir $\sigma_{r_{r_1}} \leq \sigma_{r_{r_2}}$. Plus précisément, il s'agit de la transformation suivante :

$$(\tilde{r}_{r_1}, \tilde{r}_{r_2}) \mapsto (r_{r_1}, r_{r_2}) = (\tilde{r}_{r_1} \cos(\tilde{\theta}) + \tilde{r}_{r_2} \sin(\tilde{\theta}), -\tilde{r}_{r_1} \sin(\tilde{\theta}) + \tilde{r}_{r_2} \cos(\tilde{\theta})), \quad (27)$$

avec :

$$\tilde{\theta} = \arctan \left(\frac{\tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2 - \tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2}{2\tilde{\text{c\`{o}r}}(r_{r_1} r_{r_2}) \tilde{\sigma}_{r_{r_1}} \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}} - \text{signe}(\tilde{\text{c\`{o}r}}(r_{r_1} r_{r_2})) \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2 - \tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2}{2\tilde{\text{c\`{o}r}}(r_{r_1} r_{r_2}) \tilde{\sigma}_{r_{r_1}} \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}} \right)^2} \right). \quad (28)$$

Si $\tilde{\text{c\`{o}r}}(r_{r_1} r_{r_2}) = 0$, la matrice $\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}}$ est en fait déjà diagonale et deux-sous cas sont possibles. Si $\tilde{\sigma}_{r_{r_1}} \leq \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}$, il n'y a pas besoin de rotation et $\tilde{\theta} = 0$; si $\tilde{\sigma}_{r_{r_1}} > \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}$, il est seulement nécessaire d'invertir les deux axes et donc $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$. Cet alignement avec les axes propres de la matrice de covariance permet d'aboutir à la formule suivante pour la probabilité de collision :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_{r_{r_1}}\sigma_{r_{r_2}}} \iint_{\tilde{B}_2(0,R)} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\left(\begin{bmatrix} r_{r_1} \\ r_{r_2} \end{bmatrix} - m_{r_{r_1} r_{r_2}} \right)^2}{\sigma_{r_{r_1}}^2} + \frac{\left(\begin{bmatrix} r_{r_1} \\ r_{r_2} \end{bmatrix} - m_{r_{r_1} r_{r_2}} \right)^2}{\sigma_{r_{r_2}}^2} \right) \right) dr_{r_1} dr_{r_2}, \quad (29)$$

où $\sigma_{r_{r_1}}$ et $\sigma_{r_{r_2}}$ sont les valeurs propres de $\tilde{P}_{r_{r_1}, r_{r_2}}$:

$$\sigma_{r_{r_1}} = \frac{\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 + \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2}{2} - \text{signe}(\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 - \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2) \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 - \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2}{2} \right)^2 + \tilde{\text{c\`{o}r}}(r_{r_1} r_{r_2})^2 \tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2}, \quad (30)$$

$$\sigma_{r_{r_2}} = \frac{\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 + \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2}{2} + \text{signe}(\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 - \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2) \sqrt{\left(\frac{\tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 - \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2}{2} \right)^2 + \tilde{\text{c\`{o}r}}(r_{r_1} r_{r_2})^2 \tilde{\sigma}_{r_{r_1}}^2 \tilde{\sigma}_{r_{r_2}}^2}. \quad (31)$$

Conformément à la rotation définie par (27), on a :

$$m_{r_{r_1} r_{r_2}} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\theta}) \tilde{m}_{r_{r_1}} \\ -\sin(\tilde{\theta}) \tilde{m}_{r_{r_1}} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Les différents paramètres de l'intégrale 2-D intervenant dans le calcul de \mathcal{P}_c sont représentés sur la Figure 8.

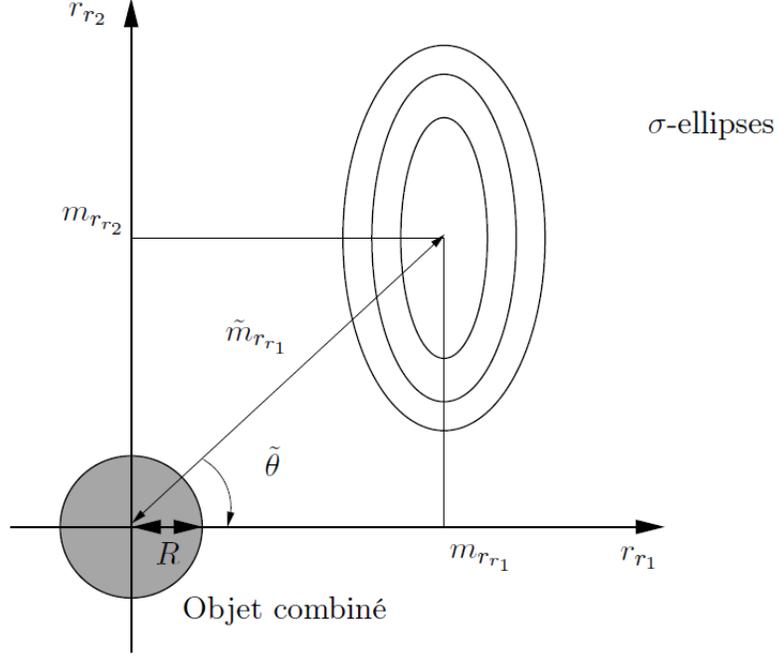


FIGURE 8 – Représentation des paramètres de l'intégrale 2-D

L'équation (29) définit la formule classique [20] pour la probabilité de collision en rapprochement rapide. La suite de la section s'attache à la question du calcul de cette quantité. Pour la suite de cette section qui s'intéresse aux différentes méthodes utilisées pour le calcul effectif et efficace de l'intégrale (29), une simplification des notations sera adoptée.

2.2 Quelques méthodes de calcul de la probabilité de collision pour les rapprochements rapides

Le problème générique de calcul de la probabilité de collision dans le cadre des rencontres rapides peut se définir de la manière suivante. Etant données deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes $x \sim \mathcal{N}(x_m, \sigma_x)$ et $y \sim \mathcal{N}(y_m, \sigma_y)$ conjointement distribuées (avec le choix sans perte de généralité, $\sigma_x \geq \sigma_y$ pour la suite de cette section), calculer l'intégrale suivante :

$$\mathcal{P}_c^{2D} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\tilde{B}_2(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_m)^2}{\sigma_y^2}\right)\right) dx dy, \quad (33)$$

Dans le cas spécifique des rapprochements rapides, plusieurs techniques de calcul de la probabilité de collision ont été élaborées. Les quatre principales méthodes de la littérature, dans l'ordre historique d'apparition, sont celles de Foster [34], Chan [19], Patera [59] et Alfano [2]. Elles ont déjà fait l'objet de plusieurs études comparatives [20, 7]. On peut les diviser en deux catégories. D'une part, les méthodes de Foster, Patera et Alfano sont construites sur un schéma d'intégration numérique adapté. En effet, les difficultés d'intégration numérique directe de l'intégrale de (29) sont mentionnées dans la référence [30]. D'autre part, celle de Chan se base sur une formule analytique pour la probabilité de collision, sous la forme d'une série à termes positifs. Toutefois, son obtention nécessite une hypothèse

simplificatrice supplémentaire par rapport au modèle de rapprochement rapide, ce qui en fait, dans le cas général, une méthode approchée.

De manière plus générale, cette quantité n'est rien d'autre que l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne en dimension 2 et le problème du calcul de (33) s'inscrit naturellement dans le cadre de la caractérisation des distributions de probabilité d'une fonction quadratique de variables normalement distribuées [43], [44]. Cette dernière problématique de l'analyse du contenu probabiliste d'un ellipsoïde centré ou non, sous une distribution normale a fait l'objet de nombreuses publications dans la communauté des statisticiens dans les années 60 [63], [57], [75], [30], [65], [43], [44]. Une bonne synthèse de ces travaux peut être consultée dans les monographies [41]. On peut retrouver en partie ces références dans le livre de Chan [20], en particulier dans le Chapitre 14 dédié au calcul de la probabilité de collision instantanée, mais il est étonnant de constater l'ignorance de la communauté spécialiste du calcul de probabilité issue du domaine spatial en la matière.

2.3 Une méthode semi-analytique par développement en série

Cette méthode qui a été proposée dans le cadre de la thèse de R. Serra [73] et publiée dans [74] consiste à calculer l'intégrale \mathcal{P}_c^{2D} de (33) à l'aide d'une série convergente à termes positifs. Elle se situe au croisement de deux théories. D'une part, la théorie des transformations intégrales (de Laplace en l'occurrence), qui permet d'obtenir des développements en série entière. D'autre part, la théorie des fonctions holonomes, qui représente l'ensemble des séries entières dont les suites correspondantes vérifient une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en la variable entière. La Section 2.3.1 introduit de manière synthétique les idées et les outils nécessaires à la mise en place de la méthode et de l'algorithme effectif qui sera présenté en suivant en même temps que la formulation sous forme de développement en série de R^2 de \mathcal{P}_c^{2D} . Les liens théoriques avec la formulation de Chan [20, Chapitre 5] et la formulation de [35] seront clairement établis.

Il est important de noter que cette méthode n'est pas exclusivement dédiée au cas de l'intégration d'une densité gaussienne bivariée sur un disque mais peut être étendue au cas de dimension n comme nous le verrons pour le calcul de la probabilité instantanée en 3 dimensions.

2.3.1 Principe de la méthode

Le but est de calculer une probabilité de collision qui a la forme d'une intégrale gaussienne multivariée sur une boule euclidienne (29) en dimension 2 pour les rencontres rapides. Comme il est indiqué ci-dessus, ce problème est un cas particulier d'une thématique plus générale où l'on s'intéresse à la caractérisation statistique de la distribution d'une fonction quadratique définie positive de N variables aléatoires conjointement normalement distribuées, centrées ou non centrées [43], [44]. Ce problème est équivalent à caractériser le contenu probabiliste d'une sphère non centrée sous une distribution normale multivariée centrée et d'écart-types fixés [65]. Par exemple, avec les notations de cette dernière référence, calculer (29) revient à calculer $H_{2,A,b}(t)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\frac{x_m}{\sigma_x} \\ -\frac{y_m}{\sigma_y} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

L'idée de base de la méthode proposée dans [74] consiste à calculer (29) à l'aide d'une série entière. Cette idée n'est pas complètement nouvelle puisque nous l'avons retrouvée dans les références [63] et [57] (série entière alternée pour le cas où les variables aléatoires suivent une loi normale réduite), [75] pour le cas non centré, [65] pour le cas centré mais avec une forme quadratique non homogène et où la probabilité est calculée comme un développement de distributions χ^2 ou χ^2 non centrale,

[43] et [44] enfin, qui synthétisent les résultats précédents dans le cas centré et non centré, tout en proposant une méthode générale de dérivation des représentations de la probabilité en diverses séries. La méthode développée ici est très semblable à l'approche générale développée par Kotz et ses co-auteurs et la généralise, tout en portant une attention particulière aux aspects de calcul numérique qui étaient un peu négligés par les références [43] et [44]. Elle a pour origine les travaux de [52] où est traité le calcul de plusieurs catégories d'intégrales gaussiennes définies sur un ensemble S (polyèdre convexe ou ellipsoïde) en dimension arbitraire. Nous résumons maintenant les principales phases et outils de la méthode générale proposée, avant de revenir sur les relations étroites avec la méthode de Kotz. Nous définissons la fonction densité de probabilité gaussienne bivariée par :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(x - x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - y_m)^2}{\sigma_y^2} \right) \right], \quad (35)$$

et la probabilité \mathcal{P}_c^{2D} est représentée comme une fonction de $R^2 = \xi$ qui est en fait la fonction de répartition de la variable aléatoire $\Xi = x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned} g(R^2) &= g(\xi) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{\overline{B}_2(0, R)} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(x - x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - y_m)^2}{\sigma_y^2} \right) \right] dx dy \\ &= \int_{\overline{B}_2(0, \sqrt{\xi})} G(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (36)$$

Du point de vue numérique, l'évaluation directe des termes de la série obtenue pour $g(\xi)$ peut être difficile. En effet, bien que le développement en série entière de $g(\xi)$ soit convergent, l'évaluation des sommes partielles en précision finie est affectée par le phénomène de compensation (cancellation phenomenon) [36, 24]. En effet, dans certains cas, la série est telle que des coefficients consécutifs de la série, de même ordre de grandeur, changent de signe et se compensent de telle sorte que leur somme, calculée en précision finie, ne contienne que peu de décimales significatives correctes. Un exemple très simple est le calcul de $\exp(-z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k!}$ pour $z > 0$ qui est développé dans [73]

et dans l'Annexe A. Afin d'empêcher cela, on réalise ce que l'on appelle un préconditionnement par une fonction \mathfrak{C} D-finie. Au lieu de développer directement la fonction g en série entière, on travaille sur la fonction $\mathfrak{C} \cdot g = \tilde{g}$. En choisissant judicieusement la fonction de préconditionnement \mathfrak{C} , celle-ci et $\mathfrak{C} \cdot g$ peuvent être évaluées numériquement efficacement. Un choix judicieux de la fonction de préconditionnement, basé sur une méthode présentée dans [36] est donné par $\mathfrak{C} : \xi \mapsto \exp(p\xi)$ pour différentes valeurs de p . Dans la suite, ce préconditionnement est choisi avec $p = \frac{1}{2\sigma_y^2}$ (justifié de manière plus complète dans [73] et dans l'Annexe A) pour le cas précis du calcul de la probabilité de collision en rencontre rapide puisqu'il permet de montrer facilement que les coefficients de la série de g seront positifs et permet également un traitement unifié dans le cas isotropique [20].

Le développement en série de $\mathfrak{C} \cdot g$ peut être obtenu en suivant les étapes suivantes :

1. Calculer la forme close de la transformée de Laplace (dont l'existence est assurée) $\mathcal{L}\tilde{g}(\lambda)$ de $\tilde{g}(\xi)$ avec $\xi = R^2$ (avec λ variable de Laplace).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\tilde{g}(\lambda) &= \frac{\exp \left(-(\lambda - p) \left(\frac{x_m^2}{2(\lambda - p)\sigma_x^2 + 1} + \frac{y_m^2}{2(\lambda - p)\sigma_y^2 + 1} \right) \right)}{(\lambda - p) \sqrt{2(\lambda - p)\sigma_x^2 + 1} \sqrt{2(\lambda - p)\sigma_y^2 + 1}}, \text{ pour } |\lambda| > p \\ &= \frac{\alpha_0 \exp \left(\frac{\omega_y}{\lambda} + \frac{\omega_x}{\lambda - p\phi} \right)}{\sqrt{\lambda(\lambda - p\phi)} (\lambda - p)}, \end{aligned} \quad (37)$$

où les notations suivantes ont été utilisées :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2\sigma_y^2}, & \phi &= 1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}, & \alpha_0 &= \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right) \\ \omega_x &= \frac{x_m^2}{4\sigma_x^4}, & \omega_y &= \frac{y_m^2}{4\sigma_y^4}. \end{aligned} \quad (38)$$

Il est à noter que $0 \leq \phi < 1$, $\omega_x \geq 0$, $\omega_y \geq 0$ et $\alpha_0 > 0$.

- 2- Développer en une série convergente la fonction complexe $\mathcal{L}\tilde{g}$ après analyse de ses singularités. Cette fonction a trois singularités : un pôle $\lambda = p$ et deux singularités essentielles $\lambda = 0$ et $\lambda = p\phi$ (cf. Figure 9).

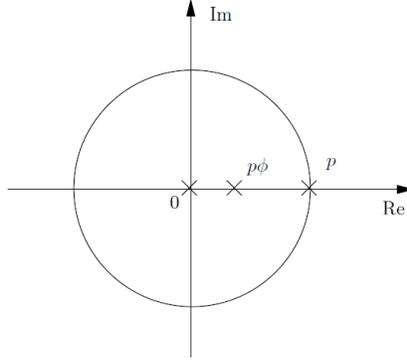


FIGURE 9 – Singularités de la fonction $\mathcal{L}\tilde{g}$ dans le plan complexe

La fonction $\mathcal{L}\tilde{g}$ est donc holonome pour $|\lambda| > p$ (au voisinage de l'infini). On va donc faire un développement de Laurent à l'infini et pour cela on pose :

$$h(\lambda) = \lambda^{-2} \mathcal{L}\tilde{g}(1/\lambda) = \frac{\alpha_0 \exp\left(\omega_y \lambda + \frac{\omega_x \lambda}{1-p\phi\lambda}\right)}{\sqrt{1-p\phi\lambda}(1-p\lambda)}, \quad (39)$$

La fonction h a 3 singularités : un pôle $\lambda = \frac{1}{p}$, une singularité essentielle à l'infini et une singularité essentielle en $\lambda = \frac{1}{p\phi}$ (cf. Figure 10). h est donc une fonction holonome pour

$|\lambda| < \frac{1}{p}$ et on peut donc faire son développement de Taylor en 0, $h(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$.

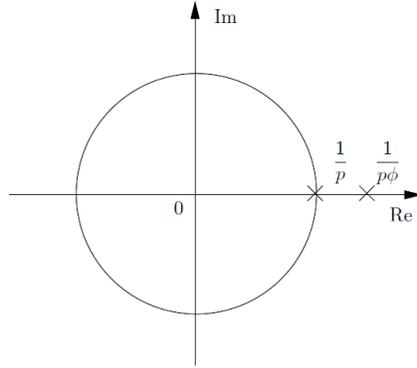


FIGURE 10 – Singularités de la fonction h dans le plan complexe

On obtient aisément le développement en série convergente de $\mathcal{L}\tilde{g}(1/\lambda)$ pour $|\lambda| < 1/p$ comme :

$$\mathcal{L}\tilde{g}(1/\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^{k+2}. \quad (40)$$

et le développement en série convergente à l'infini (pour $|\lambda| > 1/p$) de $\mathcal{L}\tilde{g}(\lambda)$ comme :

$$\mathcal{L}\tilde{g}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^{-(k+2)}. \quad (41)$$

- Obtenir une récurrence sur les coefficients α_k du développement précédent. Pour cela, on utilise le fait que la fonction h est une fonction D-finie. Les fonctions D-finies sont des fonctions satisfaisant une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux [86, 66]. De telles fonctions peuvent être développées en série entière dont les coefficients sont P-récursifs (satisfaisant une récurrence linéaire avec des termes polynomiaux [77]). Afin de manipuler les fonctions D-finies/séquences P-récurrentes, la boîte à outils Gfun de Maple (version 3.65, [67]) a été utilisée. L'équation différentielle dont la fonction h est solution est facilement obtenue comme l'équation du premier ordre :

$$h'(\lambda) = \left[\omega_y - \frac{p\phi}{2(p\phi\lambda - 1)} - \frac{p}{p\lambda - 1} + \frac{\omega_x}{(p\phi\lambda - 1)^2} \right] h(\lambda), \quad h(\lambda) = \alpha_0. \quad (42)$$

En notant que $h'(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} k\alpha_k \lambda^{k-1}$ et en remplaçant dans l'équation différentielle (42), par identification des coefficients, on en déduit la récurrence sur les coefficients α_k :

$$\begin{aligned} (k+4)\alpha_{k+4} = & -p^3\phi^2\omega_y\alpha_k + p^2\phi \left(p\phi \left(k + \frac{5}{2} \right) + 2\omega_y \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) \right) \alpha_{k+1} \\ & - p \left(p\phi \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) (2k+5) + \phi \left(2\omega_y + \frac{3p}{2} \right) + \omega_x + \omega_y \right) \alpha_{k+2} \\ & + \left(p(2\phi+1)(k+3) + p \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right) \alpha_{k+3} \end{aligned} \quad (43)$$

avec les conditions initiales :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right) \quad (44)$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left(p \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0}{2} \left(\left(p \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right)^2 + p^2 \left(\frac{\phi^2}{2} + 1 \right) + 2p\phi\omega_x \right),$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = \frac{\alpha_0}{6} & \left(\left(p \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right)^3 + 3 \left(p \left(\frac{\phi}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right) \left(p^2 \left(\frac{\phi^2}{2} + 1 \right) + 2p\phi\omega_x \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(p^3 \left(\frac{\phi^3}{2} + 1 \right) + 3p^2\phi^2\omega_x \right) \right). \end{aligned} \quad (45)$$

- Appliquer l'inverse de la transformée de Laplace (aussi connue comme la transformée de Borel) de la suite des coefficients de la série de $h(\lambda)$. Cela est justifié rigoureusement par des résultats d'analyse complexe [83] ou [82, Chap. 2.14] et permet d'obtenir un développement en série entière convergente de la fonction \tilde{g} .

$$\tilde{g}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \xi^k, \quad (46)$$

où

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_{k+1} = \frac{\alpha_k}{(k+1)!}, \quad (47)$$

$(\alpha_k)_{k \geq 0}$ sont définis par (43), (44) et $\beta_k > 0$, pour tout $k \geq 0$.

Finalement, la formule de la probabilité de collision dans le cas 2D aura la forme suivante :

$$\mathcal{P}_c^{2D} = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_y^2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)} = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_y^2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k, \quad (48)$$

où $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est la série positive obtenue par une récurrence linéaire définie ci-dessus.

La méthode générale présentée dans [43] et [44] présente de nombreux ingrédients communs avec celle proposée dans ce mémoire : utilisation de la transformée de Laplace pour obtenir un développement en série (entière alternée, de Laguerre et de distributions χ^2 ou χ^2 non centrale), application d'un résultat de convergence absolue de la série dans le plan de Laplace afin de permettre une inversion terme à terme. Toutefois, contrairement à notre méthode, les auteurs imposent un choix *a priori* de la forme de la série conduisant à un calcul numérique de ses coefficients pouvant s'avérer problématique. L'utilisation de la théorie des fonction holonomes et des fonctions entières de type exponentiel permettent d'obtenir une série entière à coefficients positifs dont l'évaluation numérique rigoureuse en précision finie en sera garantie. De plus, des bornes inférieures et supérieures analytiques peuvent être aisément déduites en fonction de la précision souhaitée. Ces différents points sont maintenant développés dans le cadre des rencontres rapides (dimension 2) et du calcul de la probabilité instantanée de collision (dimension 3).

2.3.2 Algorithme de calcul avec une précision garantie

De la section précédente, un algorithme pour calculer une approximation par valeur inférieure de la probabilité de collision peut facilement être construit. Il consiste à calculer par récurrence une somme partielle de la série entière puis à la diviser par le préconditionnement.

Algorithme 1 Calcul de la Probabilité de Collision avec N termes.

Entrée: Paramètres : $\sigma_x, \sigma_y, x_m, y_m$; Rayon de l'objet combiné : R ; Nombre de termes : N .

Sortie: $\tilde{\mathcal{P}}_c^{2D}$ – approximation de la série tronquée de \mathcal{P}_c^{2D} .

- 1: $p = \frac{1}{2\sigma_y^2}$; $\phi = 1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$; $\omega_x = \frac{x_m^2}{4\sigma_x^4}$; $\omega_y = \frac{y_m^2}{4\sigma_y^4}$; $\alpha_0 = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$;
- 2: $c_0 = \alpha_0 R^2$;
- 3: $c_1 = \frac{\alpha_0 R^4}{2} \left(p\left(\frac{\phi}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)$;
- 4: $c_2 = \frac{\alpha_0 R^6}{6} \left(\left(p\left(\frac{\phi}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)^2 + p^2\left(\frac{\phi^2}{2} + 1\right) + 2p\phi\omega_x\right)$;
- 5: $c_3 = \frac{\alpha_0 R^8}{144} \left(\left(p\left(\frac{\phi}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)^3 + 3\left(p\left(\frac{\phi}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)\left(p^2\left(\frac{\phi^2}{2} + 1\right) + 2p\phi\omega_x\right) + 2\left(p^3\left(\frac{\phi^3}{2} + 1\right) + 3p^2\phi^2\omega_x\right)\right)$;
- 6: **pour** $k \leftarrow 0$ à $N - 5$ **faire**
 - 7: $c_{k+4} = -\frac{R^8 p^3 \phi^2 \omega_y}{(k+2)(k+3)(k+4)^2(k+5)} c_k + \frac{R^6 p^2 \phi (p\phi(k+\frac{5}{2}) + 2\omega_y(\frac{\phi}{2} + 1))}{(k+3)(k+4)^2(k+5)} c_{k+1}$
 $- \frac{R^4 p (p\phi(\frac{\phi}{2} + 1)(2k+5) + \phi(2\omega_y + \frac{3p}{2}) + \omega_x + \omega_y)}{(k+4)^2(k+5)} c_{k+2}$
 $+ \frac{R^2 (p(2\phi+1)(k+3) + p(\frac{\phi}{2} + 1) + \omega_x + \omega_y)}{(k+4)(k+5)} c_{k+3}$
- 8: **fin pour**
- 9: $s \leftarrow 0$
- 10: **pour** $k \leftarrow 0$ à $N - 1$ **faire**
- 11: $s \leftarrow s + c_k$;
- 12: **fin pour**
- 13: $\tilde{\mathcal{P}}_c^{2D} \leftarrow \exp(-pR^2) s$;
- 14: **retourne** $\tilde{\mathcal{P}}_c^{2D}$.

Alors que l'Algorithme 1 fournit une borne inférieure de \mathcal{P}_c^{2D} , il serait également intéressant de disposer d'une borne supérieure pour l'erreur de troncature commise en calculant la somme partielle $\tilde{\mathcal{P}}_n^{2D} = \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^{n-1} c_k$. Le choix de l'ordre n de la troncature dépend fortement du compromis entre la complexité numérique propre au calcul et la précision du résultat obtenu. Ainsi, il est important de disposer d'estimés de l'erreur, précis et dépendants de l'ordre afin d'aider l'utilisateur à choisir le bon compromis. Définissons d'abord l'erreur de troncature d'ordre n :

$$\varepsilon_n = \mathcal{P}_c^{2D} - \tilde{\mathcal{P}}_n^{2D}(R^2), \quad (49)$$

où $\tilde{\mathcal{P}}_n^{2D} = \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} (R^2)^{k+1}$. L'objectif de la prochaine proposition est de donner des bornes précises sur ε_n . Comme il sera vu dans la suite, des bornes sur l'erreur de troncature permettent également un calcul *a priori* de l'ordre de troncature, quand une précision pré-définie sur la probabilité de collision est nécessaire. Les preuves des propositions présentées dans cette section peuvent être retrouvées dans l'annexe de la référence [74].

Proposition 1. *L'erreur de troncature peut être bornée par :*

$$l_n \leq \mathcal{P}_c^{2D} - \tilde{\mathcal{P}}_n^{2D}(R^2) \leq u_n, \quad (50)$$

où

$$l_n := \frac{\alpha_0 \exp(-pR^2)(pR^2)^{n+1}}{p(n+1)!} \quad (51)$$

et

$$u_n := \frac{\alpha_0 \exp\left(p\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)R^2\right) \left(p\left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)R^2\right)^{n+1}}{p\left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)(n+1)!}, \quad (52)$$

pour tout $n \geq 1$.

Ces bornes peuvent être utilisées pour le calcul de la probabilité de collision avec une précision garantie. Soit δ le seuil sur la probabilité pour l'exécution d'une manœuvre d'évitement de collision, par exemple $\delta = 0.001$ en pratique. Le test $\mathcal{P}_c^{2D} \leq \delta$ doit être fait de manière sûre, ce qui implique au moins que $\lceil -\log_{10} \delta \rceil$ chiffres doivent être garantis lors du calcul de \mathcal{P}_c^{2D} . En pratique, pour $\delta = 0.001$, 3 ou 4 chiffres garantis (après la virgule, donc en erreur absolue) devraient être suffisants. Dans la proposition suivante, une valeur suffisante pour n est donnée afin d'obtenir une précision souhaitée.

Proposition 2. *Soit*

$$N_1 = 2 \left\lceil epR^2 \left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \right\rceil, \quad (53)$$

$$N_2 = \left\lceil \log_2 \frac{\alpha_0 \exp\left(pR^2\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)\right)}{\delta p \sqrt{2\pi N_1} \left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)} \right\rceil, \quad (54)$$

et

$$n + 1 = \max\{N_1, N_2\}. \quad (55)$$

Alors, $u_n - l_n < \delta$.

Dans la preuve de la Proposition 1 donnée dans [74], la Proposition A.2 donne deux séries majorante/minorante $\bar{\varepsilon}_n$ et $\underline{\varepsilon}_n$ pour l'erreur de troncature ε_n . Celles-ci peuvent également être utilisées afin d'obtenir directement une borne supérieure/inférieure pour la probabilité \mathcal{P}_c^{2D} comme il est indiqué dans la proposition suivante.

Proposition 3. *Soit*

$$l_0 = \alpha_0 \frac{1 - \exp(-pR^2)}{p},$$

et

$$u_0 = \alpha_0 \frac{\exp\left(p\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)R^2\right) - \exp(-pR^2)}{p\left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)}.$$

Alors :

$$l_0 \leq \mathcal{P}_c \leq u_0. \quad (56)$$

Les formules pour l_0 et u_0 sont simples et en général suffisantes dans la majorité des cas pratiques. Elles fournissent un encadrement garanti pour la valeur réelle de la probabilité.

Les Propositions 3, 1 et 2 permettent le calcul d'un encadrement de la valeur exacte de la probabilité avec une erreur absolue garantie plus petite qu'un seuil fixé par δ . Cela est mis en œuvre dans l'Algorithme 2. L'avantage de cet algorithme est de permettre un calcul *a priori* du nombre suffisant n de termes à prendre en compte dans la série afin d'obtenir une précision requise. Cet algorithme appelle l'Algorithme 1 (ligne 10, Algorithme 2) afin d'obtenir la somme partielle de la série tronquée avec n termes c.-à-d., une approximation $\tilde{\mathcal{P}}_c^{2D}$ de la probabilité de collision. Les variables l_n et u_n (lignes 11, 12, Algorithme 2) fournissent des bornes inférieures et supérieures de l'erreur de troncature. On obtient ainsi un encadrement effectif de la vraie valeur de la probabilité aux lignes 13, 14 de l'Algorithme 2.

Algorithme 2 Calcul de la Probabilité de Collision avec une précision garantie.

Entrée: Paramètres : $\sigma_x, \sigma_y, x_m, y_m$; Rayon de l'objet combiné : R ; Seuil δ .

Sortie: $[\underline{\mathcal{P}}_c^{2D}, \overline{\mathcal{P}}_c^{2D}]$ tel que $\underline{\mathcal{P}}_c^{2D} \leq \mathcal{P}_c^{2D} \leq \overline{\mathcal{P}}_c^{2D}$ et $\overline{\mathcal{P}}_c^{2D} - \underline{\mathcal{P}}_c^{2D} \leq \delta$.

- 1: $p = \frac{1}{2\sigma_y^2}$; $\phi = 1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$; $\omega_x = \frac{x_m^2}{4\sigma_x^4}$; $\omega_y = \frac{y_m^2}{4\sigma_y^4}$; $\alpha_0 = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right)$;
 - 2: $l_0 = \alpha_0 \frac{1 - \exp(-pR^2)}{p}$;
 - 3: $u_0 = \alpha_0 \frac{\exp\left(p\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)R^2\right) - \exp(-pR^2)}{p\left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)}$;
 - 4: **si** $u_0 - l_0 \leq \delta$ **alors**
 - 5: **retourne** $[l_0, u_0]$;
 - 6: **sinon**
 - 7: $N_1 = 2 \left\lceil epR^2 \left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \right\rceil$;
 - 8: $N_2 = \left\lceil \log_2 \frac{\alpha_0 \exp\left(pR^2\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)\right)}{\delta p \sqrt{2\pi N_1} \left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)} \right\rceil$;
 - 9: $n = \max\{N_1, N_2\} - 1$
 - 10: $\tilde{\mathcal{P}}_c \leftarrow$ Algorithme 1 ($\sigma_x, \sigma_y, x_m, y_m, R, n$) ;
 - 11: $l_n = \frac{\alpha_0 \exp(-pR^2)(pR^2)^{n+1}}{p(n+1)!}$;
 - 12: $u_n = \frac{\alpha_0 \exp\left(p\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)R^2\right) \left(p\left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)R^2\right)^{n+1}}{p\left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)(n+1)!}$;
 - 13: $\underline{\mathcal{P}}_c^{2D} = \tilde{\mathcal{P}}_c^{2D} + l_n$;
 - 14: $\overline{\mathcal{P}}_c^{2D} = \tilde{\mathcal{P}}_c^{2D} + u_n$;
 - 15: **retourne** $[\underline{\mathcal{P}}_c^{2D}, \overline{\mathcal{P}}_c^{2D}]$.
 - 16: **fin si**
-

2.3.3 Liens avec la formulation de Chan

Un aspect théorique intéressant de la formule (48) est que, dans le cas isotrope c.-à-d. $\sigma_x = \sigma_y$, on retrouve la formule de Chan [20, Chapitre 4], comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4.

$$\mathcal{P}_c^{2D}|_{\sigma_x=\sigma_y} = \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \left(1 - \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^m \frac{(pR^2)^k}{k!}\right). \quad (57)$$

Preuve. Dans le cas où $\sigma_x = \sigma_y$, on a $\phi = 0$. Dès lors, la formule de récurrence vérifiée par la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se simplifie en :

$$(k+2)\alpha_{k+2} = -p(\omega_x + \omega_y)\alpha_k + (p(k+2) + \omega_x + \omega_y)\alpha_{k+1} \quad (58)$$

où α_0 est inchangé et $\alpha_1 = \alpha_0(p + \omega_x + \omega_y)$. La formule (58) se réécrit en :

$$(k+2)(\alpha_{k+2} - p\alpha_{k+1}) = (\omega_x + \omega_y)(\alpha_{k+1} - p\alpha_k), \quad (59)$$

ce qui donne par récurrence immédiate $\alpha_{k+1} - p\alpha_k = \frac{\alpha_0(\omega_x + \omega_y)^{k+1}}{(k+1)!}$, et donc :

$$\alpha_k = \alpha_0 p^k \sum_{m=0}^k \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!}. \quad (60)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(pR^2) \mathcal{P}_c^{2D}|_{\sigma_x=\sigma_y} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k R^{2(k+1)}}{(k+1)!} \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+1}}{(k+1)!}, \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \left(\exp(pR^2) - \sum_{k=0}^m \frac{(pR^2)^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient en multipliant par $\exp(-pR^2)$. \square

2.3.4 Liens avec la formulation de García-Pelayo et Hernando-Ayuso

Un développement en série de la formule (36) et reposant sur les polynômes de Hermite, a été donné récemment dans la référence [35] :

$$g(R^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\pi}{2^{2(k+1)}(k+1)(k!)^2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{H_{2(k-j)}(x_m/\sigma_x) H_{2j}(y_m/\sigma_y)}{\sigma_x^{2(k-j)} \sigma_y^{2j}} G(0,0) R^{2(k+1)}, \quad (61)$$

où H_j est le j ième polynôme de Hermite (convention probabiliste). Les auteurs de [35] ont prétendu que l'algorithme de calcul fondé sur ce développement est original et le plus rapide existant pour le calcul de la probabilité de collision. De plus, ils affirment que le calcul de deux termes de la série suffit dans tous les cas pratiques. Ces points ont été minutieusement démentis dans la note [13]. Il est ainsi montré que le développement en série (61) est exactement celui obtenu dans [74], mais sous une autre forme et sans le préconditionnement dont on a montré qu'il était nécessaire afin d'assurer

une évaluation numérique précise et efficace du développement. Nous rappelons brièvement les liens entre les coefficients des différentes formes de développement de (36). En reprenant la méthodologie de la référence [74] mais sans préconditionnement, nous obtenons le développement en série :

$$g(R^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k R^{2(k+1)}, \quad (62)$$

dont les coefficients r_k vérifient la récurrence :

$$(k+5)(k+4)^2(k+3)(k+2)r_{k+4} = [n_3 - kd_4]r_k + [n_2 - (k+1)d_3](k+2)r_{k+1} \\ + [n_1 - (k+2)d_2](k+3)(k+2)r_{k+2} \\ + [n_0 - (k+3)d_1](k+4)(k+3)(k+2)r_{k+3}. \quad (63)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} r_0 &= \pi G(0, 0), \\ r_1 &= \frac{\pi G(0, 0)}{2!} n_0, \\ r_2 &= \frac{\pi G(0, 0)}{2 \cdot 3!} [n_1 + n_0(n_0 - d_1)], \\ r_3 &= \frac{\pi G(0, 0)}{2 \cdot 3 \cdot 4!} [2n_2 - 2d_1n_1 + n_0(d_1(2d_1 - 3n_0) + n_0^2 - 2d_2 + 3n_1)], \end{aligned} \quad (64)$$

où

$$\begin{aligned} n_3 &= -q^4(1 - \phi)^2, & n_2 &= \omega_y q^2(1 - \phi)^2 + \omega_x q^2 - 3q^3(1 - \phi) \left(1 - \frac{\phi}{2}\right), \\ n_1 &= 2q(\omega_y(1 - \phi) + \omega_x) - q^2 \left(3 - 3\phi + \frac{\phi^2}{2}\right), & n_0 &= \omega_x + \omega_y - \frac{q}{2}(2 - \phi), \\ d_4 &= q^4(1 - \phi)^2, & d_3 &= 2q^3(1 - \phi)(2 - \phi), \\ d_2 &= q^2(\phi^2 - 6\phi + 6), & d_1 &= 2q(2 - \phi), \end{aligned} \quad (65)$$

et $q = \frac{1}{2\sigma_y^2}$. Dans la référence [74] (voir aussi [45, Propositions 1.1.10 and 1.6.3]), il est montré que g est une fonction entière (ou une fonction analytique réelle sur \mathbb{R}) et ainsi son développement en série entière en R^2 est unique et nous avons que :

$$r_k = \frac{4\pi}{2^{2(k+1)}(k+1)(k!)^2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{H_{2(k-j)}(x_m/\sigma_x) H_{2j}(y_m/\sigma_y)}{\sigma_x^{2(k-j)} \sigma_y^{2j}} G(0, 0). \quad (66)$$

Remarque 4. *L'égalité entre les développements (61) et (62) peut également être constatée après des calculs directs quoique fastidieux en montrant que les coefficients de (61) satisfont la récurrence (63) et les conditions initiales associées (64).*

La récurrence linéaire (63) obtenue pour le calcul des coefficients du développement de l'Equation (36) est intéressante par elle-même du fait qu'elle permet de construire un algorithme de calcul linéaire en le nombre de termes de la somme tronquée, alors que la formulation (61) induit l'utilisation d'un algorithme quadratique. De plus, cela permet de vérifier précisément que les coefficients r_k de cette série (61) ne sont pas tous positifs, ne permettant pas d'obtenir une borne inférieure pour la valeur exacte de la probabilité de collision par le calcul d'une somme partielle arbitraire d'ordre N . Cela implique que la formulation (61) peut présenter des instabilités numériques du fait

que le calcul en précision finie d'une somme partielle est sensible au phénomène d'annulation [36]. Cela signifie que la somme en précision finie de termes consécutifs, proches en magnitude mais de signes différents, contient très peu de chiffres significatifs corrects. Cela rend l'évaluation de la série entière inefficace pour de grandes valeurs de R^2 .

Finalement, nous sommes en désaccord également avec l'affirmation des auteurs concernant la formulation (61) qui stipule que « its first two terms alone are sufficient for the computation of the probability of collision ». Des exemples classiques extraits de la littérature [8] et des cas pratiques provenant de la base de données du CNES illustrent ce point particulier dans la référence [13].

2.4 Extension au calcul de la probabilité instantanée en 3 dimensions

Un des intérêts majeurs de la méthode de calcul de l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne dans \mathbb{R}^2 , présentée dans la section précédente, est qu'elle se généralise aux dimensions supérieures et en particulier à la dimension 3. On obtient alors une expression de la probabilité instantanée de collision sous la forme d'une série entière préconditionnée par un terme exponentiel (Théorème 1). La suite associée, définie par une formule de récurrence d'ordre 6, est positive. Les preuves sont très similaires au cas bi-dimensionnel et par conséquent, le lecteur intéressé pourra les consulter dans la référence [73].

En notant les variables aléatoires $x_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, 3$, on définit pour la suite les grandeurs suivantes : $p = \frac{1}{2\sigma_1^2}$, $\phi_2 = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, $\phi_3 = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}$, $\omega_1 = \frac{m_1^2}{4\sigma_1^4}$, $\omega_2 = \frac{m_2^2}{4\sigma_2^4}$, $\omega_3 = \frac{m_3^2}{4\sigma_3^4}$ avec la convention $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$.

Théorème 1.

$$\mathcal{P}_c^{3D} = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3}, \quad (67)$$

où Γ est la fonction Gamma [31] et la suite $(\alpha'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la formule de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{aligned} 2(k+6)\alpha'_{k+6} = & -2\omega_1 p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 \alpha'_k \\ & + (2\omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 + 6p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 + 4\omega_1 p^4 \phi_2^2 \phi_3 + 4\omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2 + 2p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 k) \alpha'_{k+1} \\ & + ((-4p^4 \phi_3^2 \phi_2 - 2p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 - 4p^4 \phi_2^2 \phi_3)k - 6p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 - 2\omega_1 p^3 \phi_2^2 - 4\omega_1 p^3 \phi_2^2 \phi_3 - 4\omega_1 p^3 \phi_3^2 \phi_2 - \\ & 15p^4 \phi_2^2 \phi_3 - 2\omega_1 p^3 \phi_3^2 - 2\omega_3 p^3 \phi_2^2 - 2\omega_2 p^3 \phi_3^2 - 15p^4 \phi_3^2 \phi_2 - 8\omega_1 p^3 \phi_3 \phi_2) \alpha'_{k+2} \\ & + ((8p^3 \phi_3 \phi_2 + 4p^3 \phi_2^2 \phi_3 + 4p^3 \phi_3^2 \phi_2 + 2p^3 \phi_2^2 + 2p^3 \phi_3^2)k + 9p^3 \phi_3^2 + 8\omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \\ & + 2\omega_1 p^2 \phi_2^2 + 9p^3 \phi_2^2 + 2\omega_3 p^2 \phi_2^2 + 2\omega_2 p^2 \phi_3^2 + 4\omega_1 p^2 \phi_3 + 2\omega_1 p^2 \phi_3^2 + 36p^3 \phi_3 \phi_2 + 15p^3 \phi_3^2 \phi_2 \\ & + 4\omega_1 p^2 \phi_2 + 4\omega_3 p^2 \phi_2 + 4\omega_2 p^2 \phi_3 + 15p^3 \phi_2^2 \phi_3) \alpha'_{k+3} \\ & + ((-4p^2 \phi_3 - 8p^2 \phi_3 \phi_2 - 2p^2 \phi_2^2 - 2p^2 \phi_3^2 - 4p^2 \phi_2)k - 2\omega_2 p - 4\omega_1 p \phi_2 - 4\omega_1 p \phi_3 \\ & - 4\omega_3 p \phi_2 - 4\omega_2 p \phi_3 - 21p^2 \phi_3 - 21p^2 \phi_2 - 2\omega_1 p - 2\omega_3 p - 9p^2 \phi_3^2 - 36p^2 \phi_3 \phi_2 - 9p^2 \phi_2^2) \alpha'_{k+4} \\ & + ((2p + 4p \phi_2 + 4p \phi_3)k + 12p + 2\omega_1 + 2\omega_3 + 21p \phi_3 + 2\omega_2 + 21p \phi_2) \alpha'_{k+5}, \end{aligned} \quad (68)$$

avec les conditions initiales :

$$\alpha'_0 = \frac{1}{\prod_{i=1}^3 \sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{\sigma_i^2}\right), \quad (69)$$

$$\alpha'_1 = \alpha'_0 p + \alpha'_0 \omega_1 + \alpha'_0 \omega_3 + 1/2 \alpha'_0 p \phi_3 + \alpha'_0 \omega_2 + 1/2 \alpha'_0 p \phi_2 \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_2 = & 1/2\alpha'_0\omega_1p\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_1p\phi_3 + 1/2\alpha'_0\omega_3p\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_2p\phi_3 + \\
& 1/4\alpha'_0p^2\phi_3\phi_2 + 3/2\omega_3\alpha'_0p\phi_3 + 3/2\omega_2\alpha'_0p\phi_2 + \alpha'_0p^2 \\
& + 1/2\alpha'_0\omega_1^2 + 1/2\alpha'_0\omega_3^2 + 1/2\alpha'_0\omega_2^2 + \alpha'_0\omega_1p \\
& + \alpha'_0\omega_2p + 1/2\alpha'_0p^2\phi_3 + 1/2\alpha'_0p^2\phi_2 + \omega_1\alpha'_0\omega_3 + \alpha'_0\omega_3p \\
& + 3/8\alpha'_0p^2\phi_3^2 + 3/8\alpha'_0p^2\phi_2^2 + \omega_1\alpha'_0\omega_2 + \omega_3\alpha'_0\omega_2
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_3 = & 1/4\alpha'_0\omega_1p^2\phi_3\phi_2 + 3/2\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/4\omega_3p^2\phi_2\alpha'_0\phi_3 + 3/2\omega_3p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_2p\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 3/4\omega_2p^2\phi_3\alpha'_0\phi_2 \\
& + 3/8\alpha'_0\omega_1p^2\phi_2^2 + 3/8\alpha'_0\omega_3p^2\phi_2^2 + 3/8\alpha'_0\omega_2p^2\phi_3^2 + 1/2\alpha'_0\omega_1p^2\phi_3 \\
& + 3/8\alpha'_0\omega_1p^2\phi_3^2 + 1/4\alpha'_0p^3\phi_3\phi_2 + 3/16\alpha'_0p^3\phi_3^2\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_1p^2\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_3p^2\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_2p^2\phi_3 \\
& + 3/16\alpha'_0p^3\phi_2^2\phi_3 + \omega_2p\alpha'_0\omega_1 + \omega_2p\alpha'_0\omega_3 + 3/2\omega_2p^2\alpha'_0\phi_2 + 1/4\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0 \\
& + 1/4\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0 + 1/4\omega_3^2p\phi_2\alpha'_0 + 1/4\omega_2^2p\phi_3\alpha'_0 + 3/2p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3 + \omega_1p\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{8}p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 \\
& + \frac{15}{8}p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 + 3/8\alpha'_0p^3\phi_3^2 + 3/8\alpha'_0p^3\phi_2^2 + \omega_2p^2\alpha'_0 \\
& + 1/2\omega_2^2p\alpha'_0 + 1/2p^3\phi_3\alpha'_0 + 1/2p^3\phi_2\alpha'_0 + \omega_1p^2\alpha'_0 + 1/2\omega_1^2p\alpha'_0 + \omega_3p^2\alpha'_0 + 1/2\omega_3^2p\alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16}p^3\phi_3^3\alpha'_0 + \frac{5}{16}p^3\phi_2^3\alpha'_0 + 1/2\omega_1\alpha'_0\omega_3^2 + 1/2\omega_1\alpha'_0\omega_2^2 + 1/2\omega_1^2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 1/2\omega_3\alpha'_0\omega_2^2 + 1/2\omega_3^2\alpha'_0\omega_2 + 1/2\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_3 + \omega_1\omega_3\alpha'_0\omega_2 \\
& + 5/4\omega_3^2\alpha'_0p\phi_3 + 5/4\omega_2^2\alpha'_0p\phi_2 + \alpha'_0p^3 + 1/6\alpha'_0\omega_1^3 + 1/6\alpha'_0\omega_3^3 + 1/6\alpha'_0\omega_2^3
\end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_4 = & \frac{5}{32}p^4\phi_2^3\phi_3\alpha'_0 + 3/4p^3\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{8}\omega_1p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 + \frac{9}{16}\omega_2p^3\phi_3^2\alpha'_0\phi_2 \\
& + 3/2\omega_1p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p^2\phi_3\alpha'_0\omega_2 + \frac{9}{16}\omega_3p^3\phi_2^2\alpha'_0\phi_3 + \frac{15}{8}\omega_3p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/8\omega_2p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_1 + \frac{15}{8}\omega_2p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 + 3/16\alpha'_0\omega_1p^3\phi_2^2\phi_3 \\
& + 3/16\alpha'_0\omega_1p^3\phi_3^2\phi_2 + 1/4\alpha'_0\omega_1p^3\phi_3\phi_2 + 1/8\omega_1^2p^2\phi_3\phi_2\alpha'_0 \\
& + 3/8\omega_1p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{8}\omega_1p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 + 3/8\alpha'_0\omega_1p^3\phi_2^2 + 3/16\alpha'_0p^4\phi_2^2\phi_3 \\
& + 3/8\alpha'_0\omega_1p^3\phi_3^2 + 3/8\alpha'_0\omega_3p^3\phi_2^2 + 3/8\alpha'_0\omega_2p^3\phi_3^2 + 3/16\alpha'_0p^4\phi_3^2\phi_2 + \frac{9}{64}\alpha'_0p^4\phi_3^2\phi_2^2 \\
& + \frac{15}{8}p^3\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 + 3/16\omega_1^2p^2\phi_2^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_1p^3\phi_2^3\alpha'_0 + \frac{15}{8}p^3\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/16\omega_3^2p^2\phi_2^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_3p^3\phi_2^3\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_2p^3\phi_3^3\alpha'_0 \\
& + 3/16\omega_2^2p^2\phi_3^2\alpha'_0 + 1/2\omega_1p^3\phi_3\alpha'_0 + 1/4\omega_1^2p^2\phi_3\alpha'_0 + 3/16\omega_1^2p^2\phi_3^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_1p^3\phi_3^3\alpha'_0 \\
& + 1/4p^4\phi_3\phi_2\alpha'_0 + \frac{5}{32}p^4\phi_3^3\phi_2\alpha'_0 + 1/2\omega_1p^3\phi_2\alpha'_0 + 1/4\omega_1^2p^2\phi_2\alpha'_0 \\
& + 1/2\omega_3p^3\phi_2\alpha'_0 + 1/4\omega_3^2p^2\phi_2\alpha'_0 + 1/2\omega_2p^3\phi_3\alpha'_0 + 1/4\omega_2^2p^2\phi_3\alpha'_0 + 3/8p^4\phi_3^2\alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16}p^4\phi_3^3\alpha'_0 + 3/8p^4\phi_2^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}p^4\phi_2^3\alpha'_0 + \omega_2p^3\alpha'_0 + 1/6\omega_2^3p\alpha'_0 + 1/2\omega_2^2p^2\alpha'_0 + 1/2p^4\phi_3\alpha'_0 \\
& + 1/2p^4\phi_2\alpha'_0 + \omega_1p^3\alpha'_0 + 1/6\omega_1^3p\alpha'_0 + 1/2\omega_1^2p^2\alpha'_0 + \omega_3p^3\alpha'_0 + 1/6\omega_3^3p\alpha'_0 + 1/2\omega_3^2p^2\alpha'_0 \\
& + \frac{35}{128}p^4\phi_3^4\alpha'_0 + \frac{35}{128}p^4\phi_2^4\alpha'_0 + 3/4\omega_1p^2\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 3/4\omega_1p^2\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/2\omega_1p\phi_2\omega_3\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_1p\phi_3\omega_3\alpha'_0\omega_2 + 9/4\omega_3p^2\phi_2\alpha'_0\omega_2\phi_3 + 3/4p^3\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_2 \\
& + \frac{15}{16}p^3\phi_3^2\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p^2\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 3/2\omega_1p^2\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_3p^2\phi_2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/2\omega_2p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{16}p^3\phi_2^2\phi_3\alpha'_0\omega_2 + \omega_2p\omega_1\alpha'_0\omega_3 + 1/4\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 5/4\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_2^2 + 1/4\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 3/4\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 5/4\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 1/4\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_2^2 + 3/4\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/4\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0\omega_2 + 5/8\omega_3^2p^2\phi_2\alpha'_0\phi_3 \\
& + 5/4\omega_3p\phi_2\alpha'_0\omega_2^2 + 3/4\omega_3^2p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 5/8\omega_2^2p^2\phi_3\alpha'_0\phi_2 + 5/4\omega_2p\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 3/4\omega_2^2p\phi_3\omega_3\alpha'_0 + 5/4\omega_2^2p^2\alpha'_0\phi_2 + 1/2\omega_2p\alpha'_0\omega_1^2 + 1/2\omega_2p\alpha'_0\omega_3^2 + \omega_2p^2\alpha'_0\omega_1 \\
& + 3/2\omega_2p^3\alpha'_0\phi_2 + \omega_2p^2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_2^2p\omega_1\alpha'_0 + 1/2\omega_2^2p\omega_3\alpha'_0 + 1/12\omega_1^3p\phi_2\alpha'_0 \\
& + 1/12\omega_1^3p\phi_3\alpha'_0 + 1/12\omega_3^3p\phi_2\alpha'_0 + 1/12\omega_2^3p\phi_3\alpha'_0 + 5/4p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 + 3/2p^3\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 1/2\omega_1^2p\alpha'_0\omega_3 + \omega_1p^2\alpha'_0\omega_3 + \frac{35}{16}p^3\phi_3^3\omega_3\alpha'_0 + \frac{35}{16}p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3^2 + \frac{35}{16}p^3\phi_2^3\omega_2\alpha'_0 \\
& + \frac{35}{16}p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2^2 + \alpha'_0p^4 + 1/24\alpha'_0\omega_1^4 + 1/24\alpha'_0\omega_3^4 + 1/24\alpha'_0\omega_2^4 + 1/4\omega_1^2\alpha'_0\omega_3^2 + 1/4\omega_1^2\alpha'_0\omega_2^2 \\
& + 1/6\omega_1^3\alpha'_0\omega_3 + 1/6\omega_1^3\alpha'_0\omega_2 + 1/6\omega_1\alpha'_0\omega_3^3 + 1/6\omega_1\alpha'_0\omega_2^3 + 1/4\omega_3^2\alpha'_0\omega_2^2 + 1/6\omega_3^3\alpha'_0\omega_2 \\
& + 1/6\omega_3\alpha'_0\omega_2^3 + 1/2\omega_1\omega_3\alpha'_0\omega_2^2 + 1/2\omega_1\omega_3^2\alpha'_0\omega_2 + 1/2\omega_1^2\omega_3\alpha'_0\omega_2 + \frac{7}{12}\omega_3^3\alpha'_0p\phi_3 + \frac{7}{12}\omega_2^3\alpha'_0p\phi_2
\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_5 = & 9/4\omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{9}{64} \alpha'_0 \omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 + 3/16 \alpha'_0 \omega_1 p^4 \phi_2^2 \phi_3 \\
& + 3/16 \alpha'_0 \omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2 + \frac{9}{64} \alpha'_0 p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 + 9/4 p^3 \phi_3 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + 3/2 \omega_1 p^2 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + 5/4 \omega_1 p \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/4 \omega_1 p \phi_2 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + 3/4 \omega_1^2 p \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{9}{16} \omega_1 p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{16} \omega_1 p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{15}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{9}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_1 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 3/4 \omega_1 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 5/8 \omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 5/8 \omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 3/8 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 3/8 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_1 p^2 \phi_2^2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{45}{16} \omega_3 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 \phi_3 + \frac{45}{16} \omega_2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 \phi_2 + \frac{15}{8} \omega_2 p^2 \phi_3^2 \omega_1 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 3/2 \omega_1 p^2 \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{45}{64} p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{45}{64} p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/8 \omega_1 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{8} \omega_1 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{3}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_1 p^4 \phi_2^3 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{3}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_1 p^4 \phi_3^3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{9}{16} p^4 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{16} p^4 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{15}{8} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 + 3/8 \omega_1 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_3 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{9}{16} \omega_2 p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 \phi_2 + \frac{15}{16} p^4 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 1/4 \omega_1 p^4 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 + 1/8 \omega_1^2 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{15}{128} p^5 \phi_3^3 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{15}{128} p^5 \phi_3^2 \phi_2^3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_1 p^4 \phi_2^2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_1^2 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} \omega_1 p^4 \phi_2^3 \alpha'_0 \\
& + 3/16 p^5 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{5}{32} p^5 \phi_2^3 \phi_3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_1 p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_1^2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} \omega_1 p^4 \phi_3^3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_3 p^4 \phi_2^2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_3^2 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16} \omega_3 p^4 \phi_2^3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_2 p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} \omega_2 p^4 \phi_3^3 \alpha'_0 + 3/16 \omega_2^2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 + 3/16 p^5 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{5}{32} p^5 \phi_3^3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^4 \phi_2^3 \omega_2 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{16} p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + \frac{15}{8} p^4 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{5}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_2^3 \alpha'_0 + 1/16 \omega_1^3 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_1 p^4 \phi_2^4 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_3^2 p^3 \phi_2^3 \alpha'_0 + 1/16 \omega_3^3 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{128} \omega_3 p^4 \phi_2^4 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_2^2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 + 1/16 \omega_2^3 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_2 p^4 \phi_3^4 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1 p^4 \phi_3 \alpha'_0 + 1/12 \omega_1^3 p^2 \phi_3 \alpha'_0 + 1/4 \omega_1^2 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{5}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 + 1/16 \omega_1^3 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_1 p^4 \phi_3^4 \alpha'_0 + 1/4 p^5 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{35}{256} p^5 \phi_3^4 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1 p^4 \phi_2 \alpha'_0 + 1/12 \omega_1^3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \\
& + 1/4 \omega_1^2 p^3 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_3 p^4 \phi_2 \alpha'_0 + 1/12 \omega_3^3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 + 1/4 \omega_3^2 p^3 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_2 p^4 \phi_3 \alpha'_0 + 1/12 \omega_2^3 p^2 \phi_3 \alpha'_0 + 1/4 \omega_2^2 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{256} p^5 \phi_2^4 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^4 \phi_3^3 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + \frac{1}{120} \alpha'_0 \omega_3^5 + \frac{1}{120} \alpha'_0 \omega_2^5 + \alpha'_0 p^5 + \frac{1}{120} \alpha'_0 \omega_1^5 + 1/24 \omega_1^3 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16} \omega_1 p^3 \phi_2^3 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{35}{16} \omega_1 p^3 \phi_2^3 \omega_2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_1 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + \frac{35}{16} \omega_1 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/16 \omega_1^2 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{16} \omega_1^2 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{15}{32} \omega_3 p^4 \phi_2^3 \alpha'_0 \phi_3 + \frac{15}{32} \omega_3^2 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \phi_3 + \frac{35}{16} \omega_3 p^3 \phi_2^3 \omega_2 \alpha'_0 + \frac{35}{16} \omega_3 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + \frac{15}{16} \omega_3^2 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{5}{16} \omega_2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 \omega_1 \\
& + \frac{15}{32} \omega_2 p^4 \phi_3^3 \alpha'_0 \phi_2 + \frac{35}{16} \omega_2 p^3 \phi_3^3 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{15}{32} \omega_2^2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \phi_2 + 3/16 \omega_2 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_1^2 + \frac{35}{16} \omega_2 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 3/16 \omega_2^2 p^2 \phi_3^2 \omega_1 \alpha'_0 \\
& + \frac{15}{16} \omega_2^2 p^2 \phi_3^2 \omega_3 \alpha'_0 + 5/4 \omega_1 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/4 \omega_1 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/2 \omega_1 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + 3/2 \omega_1 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 1/4 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{35}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^3 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{35}{16} \omega_1 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + \frac{15}{16} \omega_1^2 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 + 5/8 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 5/8 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 3/4 p^4 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 p^4 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{35}{32} p^4 \phi_3^3 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{35}{32} p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/4 \omega_1 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 5/4 \omega_1 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 3/2 \omega_1 p^3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 1/4 \omega_1^2 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 1/2 \omega_1 p^3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 3/4 \omega_1^2 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 5/4 \omega_3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/2 \omega_3 p^3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + 3/4 \omega_3^2 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 5/4 \omega_2 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^2 + 3/2 \omega_2 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + 3/4 \omega_2^2 p^2 \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{32} p^4 \phi_2^3 \phi_3 \omega_2 \alpha'_0 + \frac{35}{32} p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/8 p^5 \phi_2^2 \alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16} p^5 \phi_2^3 \alpha'_0 + \frac{35}{128} p^5 \phi_2^4 \alpha'_0 + 3/8 p^5 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} p^5 \phi_3^3 \alpha'_0 + \frac{35}{128} p^5 \phi_3^4 \alpha'_0 + 1/2 \omega_2^2 p^3 \alpha'_0 + 1/6 \omega_2^3 p^2 \alpha'_0 + \omega_2 p^4 \alpha'_0 \\
& + 1/24 \omega_2^4 p \alpha'_0 + 1/2 p^5 \phi_3 \alpha'_0 + 1/2 p^5 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1^2 p^3 \alpha'_0 + 1/6 \omega_1^3 p^2 \alpha'_0 + \omega_1 p^4 \alpha'_0 + 1/24 \omega_1^4 p \alpha'_0 + 1/2 \omega_3^2 p^3 \alpha'_0 + 1/6 \omega_3^3 p^2 \alpha'_0 \\
& + \omega_3 p^4 \alpha'_0 + 1/24 \omega_3^4 p \alpha'_0 + \frac{63}{256} p^5 \phi_3^5 \alpha'_0 + \frac{63}{256} p^5 \phi_2^5 \alpha'_0 + 1/24 \omega_1 \alpha'_0 \omega_3^4 + 1/24 \omega_1 \alpha'_0 \omega_2^4 + 1/12 \omega_1^3 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/12 \omega_1^3 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 1/24 \omega_1^4 \alpha'_0 \omega_3 + 1/24 \omega_1^4 \alpha'_0 \omega_2 + 1/12 \omega_1^2 \alpha'_0 \omega_3^3 + 1/12 \omega_1^2 \alpha'_0 \omega_2^3 + 1/24 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2^4 + 1/12 \omega_3^3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/24 \omega_3^4 \alpha'_0 \omega_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1/12\omega_3^2\alpha'_0\omega_2^3 + \frac{315}{128}p^4\phi_3^4\alpha'_0\omega_3 + \frac{105}{32}p^3\phi_3^3\omega_3^2\alpha'_0 + \frac{21}{16}p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3^3 + 1/2\omega_1^2p^2\alpha'_0\omega_3 \\
& \quad + \omega_1p^3\omega_3\alpha'_0 + 1/2\omega_1p^2\omega_3^2\alpha'_0 + 1/4\omega_1^2p\alpha'_0\omega_3^2 \\
& \quad + 1/6\omega_1^3p\alpha'_0\omega_3 + 1/6\omega_1p\alpha'_0\omega_3^3 + 1/2\omega_2^2p^2\alpha'_0\omega_1 \\
& \quad + 1/2\omega_2^2p^2\alpha'_0\omega_3 + 5/4\omega_2^2p^3\alpha'_0\phi_2 + 3/2\omega_2p^4\phi_2\alpha'_0 + \omega_2p^3\omega_1\alpha'_0 + 1/2\omega_2p^2\omega_1^2\alpha'_0 \\
& \quad + \omega_2p^3\omega_3\alpha'_0 + 1/2\omega_2p^2\omega_3^2\alpha'_0 + 1/6\omega_2^3p\omega_1\alpha'_0 + 1/4\omega_2^2p\omega_1^2\alpha'_0 \\
& \quad + 1/6\omega_2^3p\omega_3\alpha'_0 + 1/4\omega_2^2p\omega_3^2\alpha'_0 + \frac{7}{12}\omega_2^3p^2\alpha'_0\phi_2 + 1/6\omega_2p\alpha'_0\omega_1^3 \\
& + 1/6\omega_2p\alpha'_0\omega_3^3 + 1/48\omega_1^4p\phi_2\alpha'_0 + 1/48\omega_1^4p\phi_3\alpha'_0 + 1/48\omega_3^4p\phi_2\alpha'_0 + 1/48\omega_2^4p\phi_3\alpha'_0 + 3/2p^4\phi_3\omega_3\alpha'_0 + 5/4p^3\phi_3\omega_3^2\alpha'_0 \\
& \quad + \frac{7}{12}p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3^3 + \omega_2p^2\omega_1\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_2p\omega_1\alpha'_0\omega_3^2 + 1/2\omega_2p\omega_1^2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_2^2p\omega_1\omega_3\alpha'_0 + 1/8\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 5/8\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0\omega_2^2 + 1/12\omega_1^3p\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 1/4\omega_1^3p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 1/12\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_3^3 + \frac{7}{12}\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_2^3 + 5/8\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 \\
& \quad + 1/8\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0\omega_2^2 + 1/4\omega_1^3p\phi_3\alpha'_0\omega_3 \\
& + 1/12\omega_1^3p\phi_3\alpha'_0\omega_2 + \frac{7}{12}\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_3^3 + 1/12\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_2^3 + 5/8\omega_3^2p\phi_2\alpha'_0\omega_2^2 + 1/4\omega_3^3p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + \frac{7}{24}\omega_3^3p^2\phi_2\alpha'_0\phi_3 \\
& \quad + \frac{7}{12}\omega_3p\phi_2\alpha'_0\omega_2^3 + 1/4\omega_2^3p\phi_3\omega_3\alpha'_0 + 5/8\omega_2^2p\phi_3\omega_3^2\alpha'_0 + \frac{7}{24}\omega_2^3p^2\phi_3\alpha'_0\phi_2 + \frac{7}{12}\omega_2p\phi_3\alpha'_0\omega_3^3 + 3/4\omega_1p\phi_3\omega_3\alpha'_0\omega_2^2 \\
& + 5/4\omega_1p\phi_3\omega_3^2\alpha'_0\omega_2 + 3/4\omega_1^2p\phi_3\omega_3\alpha'_0\omega_2 + \frac{15}{8}\omega_3^2p^2\phi_2\omega_2\phi_3\alpha'_0 + \frac{15}{8}\omega_3p^2\phi_2\omega_2^2\phi_3\alpha'_0 + \frac{315}{128}p^4\phi_2^4\alpha'_0\omega_2 + \frac{105}{32}p^3\phi_2^3\omega_2^2\alpha'_0 \\
& \quad + \frac{21}{16}p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2^3 + 1/4\omega_1\omega_3^2\alpha'_0\omega_2^2 + 1/6\omega_1\omega_3^3\alpha'_0\omega_2 + 1/6\omega_1\omega_3\alpha'_0\omega_2^3 + 1/4\omega_1^2\omega_3\alpha'_0\omega_2^2 + 1/4\omega_1^2\omega_3^2\alpha'_0\omega_2 \\
& \quad + 1/6\omega_1^3\omega_3\alpha'_0\omega_2 + 3/16\omega_3^4\alpha'_0p\phi_3 + 3/16\omega_2^4\alpha'_0p\phi_2
\end{aligned} \tag{74}$$

Le principal intérêt de ce résultat réside dans la positivité des termes de la série puisque l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha'_k > 0$. On pourra retrouver les preuves ainsi que des compléments sur l'encadrement analytique de l'erreur de troncature, sur des bornes analytiques pour la probabilité ainsi que sur le calcul certifié de la probabilité de collision dans la référence [73].

3 Evaluation du risque pour les rencontres rapides avec incertitudes sur la vitesse

Le modèle des rencontres rapides et/ou linéaires est un modèle relativement restrictif dans le sens où de nombreuses hypothèses fortes (Hypothèses 3, 4, 5 et 6) le définissent. Le deuxième modèle de rencontre utilisé dans la littérature est celui des rencontres lentes et/ou rencontres non linéaires. On comprend facilement par la double opposition de termes rapide/lente et linéaire/non linéaire que la caractérisation des deux classes de rencontre peut être ambivalente et surtout qu'il serait nécessaire de faire une caractérisation des rencontres qui ne repose pas uniquement sur deux classes grossières mais qu'il existe plutôt une déclinaison de types de rencontres suivant les hypothèses retenues.

Un premier pas dans cette direction peut être fait en supprimant du cadre des rencontres rapides l'Hypothèse 3 qui considère que le vecteur de vitesse relative est déterministe tout en conservant les autres hypothèses et particulièrement l'hypothèse de mouvement relatif rectiligne lors de la rencontre (non linéaire/linéaire). Cette section est donc dédiée à l'élaboration d'une nouvelle méthode de calcul de la probabilité de collision dans ce nouveau cadre d'hypothèses. Pour cela, il sera nécessaire de disposer d'une méthode de calcul fiable et efficace de la probabilité de collision instantanée en d dimensions. Nous avons vu dans la section précédente que la méthode semi-analytique par développement en série entière était très efficace en général. Toutefois, cette méthode peut rencontrer des difficultés numériques sur certains exemples présentant des caractéristiques particulières impliquant l'ordre de grandeur respectif du rayon combiné R , des moyennes et des écarts-type définissant la densité gaussienne pour laquelle est calculée la probabilité de collision.

L'objectif des développements de la prochaine sous-section est donc double :

- Disposer d'une méthode alternative robuste et efficace pour le calcul de la probabilité instantanée en d dimensions (dont la probabilité \mathcal{P}_c^{2D} est un cas particulier) pour pallier les difficultés numériques de la méthode par série entière dans certains cas particuliers ;
- Utiliser cette méthode comme une brique de base pour des méthodes de calcul de probabilité de collision, définies dans un cadre de modélisation plus général (cf. la sous-section 3.2 et la Section 5).

3.1 Probabilité instantanée : une alternative semi-analytique par la méthode du point col

3.1.1 Analyse des limites du calcul par série entière

Nous avons rappelé dans la section précédente, une méthode systématique de calcul de la probabilité de collision dans le cadre des rencontres rapides (PoC 2D notée \mathcal{P}_c^{2D}) que nous avons ensuite étendue au calcul de la probabilité de collision instantanée en 3 dimensions, notée \mathcal{P}_c^{3D} . Cette méthode consiste à évaluer une somme partielle (d'ordre N fixé c.-à-d. comprenant N termes) de la série entière convergente en 0 de la fonction $g(\xi)$, donnée par l'Equation (36), pour $\xi = R^2$. Une première difficulté de cette évaluation en précision finie a pour origine le phénomène de compensation (changement de signe de coefficients consécutifs et de même ordre de grandeur). Cette difficulté a été traitée à l'aide de la méthode dénommée GMR d'après les initiales de ses auteurs (cf. Annexe A) qui repose sur le développement en série entière convergente et à termes positifs d'une fonction $\tilde{g} = \mathfrak{C} \cdot g$ qui n'est rien d'autre que la fonction g multipliée par une fonction de préconditionnement judicieusement choisie pour obtenir des coefficients positifs pour le développement de \tilde{g} .

Cette procédure se révèle très efficace dans la majorité des cas, comme nous l'avons montré dans les références [74] et [73], tant que les rapports $R^2/2\sigma_i^2$ ne sont pas trop grands. Afin de simplifier la discussion suivante et quitte à redimensionner les paramètres, nous supposons par la suite

que $R = 1$, et il suffira de considérer les quantités $p_i = 1/2\sigma_i^2$. Toutefois, certaines conjonctions, particulièrement en 3D, présentent malheureusement des p_i trop élevés pour que la méthode de calcul par série entière produise des résultats numériques pertinents en temps raisonnable. L'origine de ce problème d'évaluation efficace et fiable d'une somme partielle d'une série entière à coefficients positifs et convergente se trouve essentiellement dans le comportement des termes de la série pour lequel nous donnons une explication simplifiée dans ce qui suit.

Si l'on s'intéresse au comportement des coefficients α_k du développement de la fonction complexe $\mathcal{L}\tilde{g}(\lambda)$, il est possible d'utiliser le théorème de Cauchy-Hadamard [38, Théorème 2.2a, Chapitre 2] qui définit le rayon de convergence (lui-même conditionné par les singularités de la fonction $\mathcal{L}\tilde{g}$) de la série en fonction de ses coefficients, (appelée aussi formule d'Hadamard dans la référence [78, Théorème 2.5, Chapitre 1]). Dans notre cas, ce théorème relie la croissance des coefficients de la série entière avec le rayon de convergence, lui-même égal au minimum des modules des singularités. Ainsi, le comportement asymptotique des coefficients α_n va être équivalent à celui de p^n où $p = \max_i p_i = \max_i 1/(2\sigma_i^2)$ (p permet de définir la fonction de préconditionnement \mathfrak{C} dans la méthode GMR). Cela signifie que les coefficients c_n du développement de la fonction \tilde{g} après application de la transformée de Laplace inverse ont un comportement asymptotique équivalent au coefficient $p^n/n!$ qui serait le coefficient de la série entière de la fonction $x \mapsto \exp(px)$. Ainsi, la suite $(c_n)_n$ va converger mais ses termes vont commencer par croître jusqu'à ce que $n \sim p$, donnant une forme typique de cloche (cf. Figure 11), centrée autour de p et d'amplitude maximale approximative $\exp(p)$. Les termes de la série de la fonction g vont donc suivre cette évolution en cloche, d'autant plus haute et longue à franchir (environ p termes à calculer) que p est grand. Certaines conjonctions particulièrement défavorables mènent alors à des aberrations numériques inacceptables qui seront détaillées dans la sous-section 3.1.7 dédiée aux exemples numériques.

L'objectif de cette section est donc de proposer une méthode alternative à la méthode GMR, fondée sur la théorie des séries divergentes et des développements asymptotiques d'intégrales.

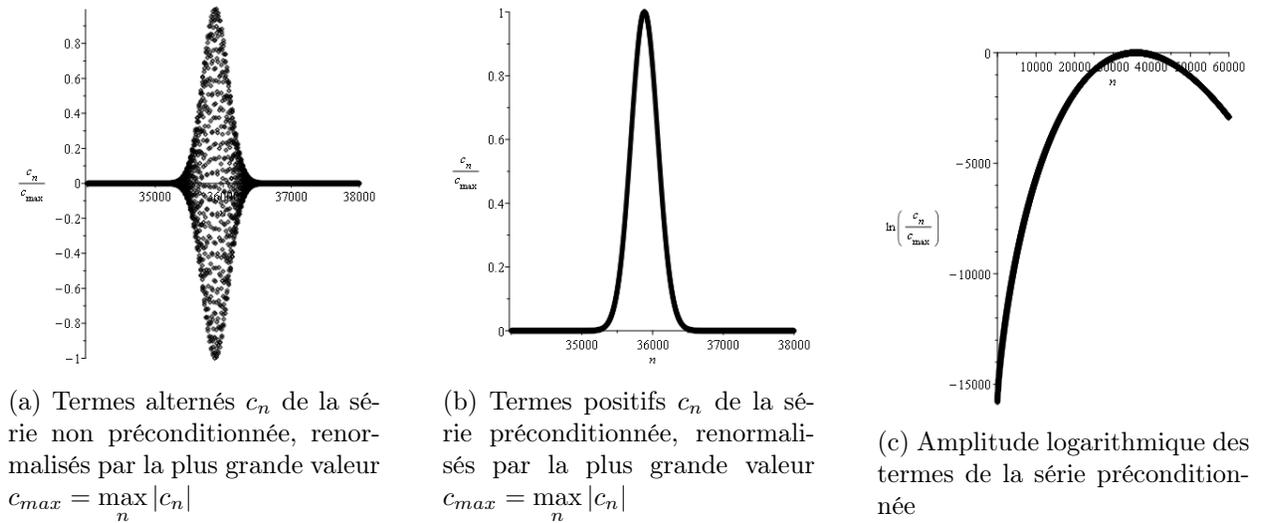


FIGURE 11 – Méthode de la série entière sur l'exemple 5 en 2D provenant de [8] renormalisé ($R = 1, m_1 = 0.2123, m_2 = -0.1222, \sigma_1 = 17.78, \sigma_2 = 0.003733$)

3.1.2 Principe du calcul de la probabilité de collision instantanée par séries divergentes

Dans cette section, le problème de calcul de la probabilité de collision instantanée est considéré. Sous les hypothèses usuelles de géométrie sphérique, d'incertitudes gaussiennes et par extension à la dimension d et changement de variables pour se placer dans la base des directions principales de l'ellipsoïde d'incertitude, le problème est donc de calculer l'intégrale suivante :

$$g(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sigma_i} \int \cdots \int_{\bar{B}_d(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right) dx_1 \cdots dx_d. \quad (75)$$

Le principe général de la méthode se décompose en trois étapes principales qui comportent elles-mêmes différents ingrédients techniques qui seront détaillés dans la suite.

- 1- Calcul sous forme close de la transformée de Laplace $\mathcal{L}g$ de la fonction g .
- 2- Expression de la fonction g comme une intégrale de Bromwich par la formule d'inversion de la transformée de Laplace.
- 3- Approximation de cette intégrale de Bromwich par une série divergente.

Chaque étape est détaillée dans les sous sections suivantes. Comme nous le verrons, l'étape 1 est une extension directe à la dimension d des calculs donnés dans la référence [73, Section 2.2.1, chapitre 2] alors que l'étape 2 sera relativement concise. Par contre, l'étape 3 comporte de nombreux résultats et approches nouvelles qui seront plus finement précisées.

3.1.3 Calcul de la transformée de Laplace de la fonction g

Cette étape est relativement directe et reprend les principes déjà utilisés dans la Section 2.3.1 (dont les détails sont donnés dans [73, Section 2.2.1, Chapitre 2] comme indiqué ci-dessus). Nous ne donnons donc que le résultat.

$$\mathcal{L}g(\lambda) = \frac{\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2}{2\sigma_i^2\lambda + 1}\right)}{\lambda \prod_{i=1}^d \sqrt{2\sigma_i^2\lambda + 1}}, \text{ pour } \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0. \quad (76)$$

Les singularités de la fonction $\mathcal{L}g$ sont un pôle en 0 et d singularités essentielles en $-p_i = -1/(2\sigma_i^2)$ pour $i = 1, \dots, d$.

3.1.4 Formule d'inversion de Laplace

La formule d'inversion de Laplace permet de retrouver la fonction d'origine g à partir de sa transformée $\mathcal{L}g$ [46, Théorème 7.2.1, Chapitre 7] :

$$g(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\xi\lambda} \mathcal{L}g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} \frac{\exp\left(\xi\lambda - \lambda \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2}{2\sigma_i^2\lambda + 1}\right)}{\lambda \prod_{i=1}^d \sqrt{2\sigma_i^2\lambda + 1}} d\lambda.$$

L'intégrale est prise le long d'un chemin vertical $t : \mathbb{R} \mapsto \lambda_0 + it$ coupant l'axe réel positif en $\lambda_0 > 0$, de telle sorte que les singularités de $\mathcal{L}g$ (à savoir 0 et les $-p_i < 0$) sont toutes situées dans le

demi-plan complexe à gauche de ce contour. Le théorème intégral de Cauchy [46, Théorème 4.3.1, Chapitre 4] garantit que la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de $\lambda_0 > 0$. Toutefois, nous verrons à la section suivante que son choix influe grandement sur la qualité numérique de la méthode d'approximation.

En posant,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \xi\lambda - \lambda \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2}{2\sigma_i^2\lambda + 1} - \log \lambda - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \log(2\sigma_i^2\lambda + 1) \\ &= \xi\lambda + \sum_{i=1}^d \left(\frac{m_i^2 p_i^2}{\lambda + p_i} - m_i^2 p_i \right) - \log \lambda + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (\log p_i - \log(\lambda + p_i)),\end{aligned}\tag{77}$$

on obtient une intégrale de la forme

$$g(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\varphi(\lambda)} d\lambda,\tag{78}$$

qui est une intégrale complexe dépendant des paramètres ξ , m_i et $p_i = 1/2\sigma_i^2$ et dont l'ordre de grandeur respectif peut causer les difficultés de calcul telles qu'elles sont décrites à la Section 3.1.1. Pour la suite, nous aurons besoin des dérivées successives de la fonction φ qui sont obtenues par :

$$\varphi'(\lambda) = \xi - \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2 p_i^2}{(\lambda + p_i)^2} - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda + p_i},$$

pour l'ordre 1 et :

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \left(n! \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2 p_i^2}{(\lambda + p_i)^{n+1}} + \frac{(n-1)!}{\lambda^n} + \frac{(n-1)!}{2} \sum_{i=1}^d \frac{1}{(\lambda + p_i)^n} \right), \quad n \geq 2,\tag{79}$$

pour les dérivées d'ordre n quelconque.

L'objectif est donc d'approximer l'intégrale à paramètres de Bromwich (78) par un développement asymptotique (une série divergente) de la fonction g . Du fait que cette intégrale dépend de plusieurs paramètres, les résultats théoriques exacts et forts de la littérature consacrée aux développements asymptotiques (cf. par exemple [39], [84], [79]) ne peuvent être retrouvés directement mais inspirent très largement le principe de la méthode heuristique proposée dans ce rapport et dont les principaux éléments sont détaillés dans la prochaine section.

3.1.5 Développement asymptotique de l'intégrale paramétrée

La nouvelle méthode que nous développons pour les situations pour lesquelles le calcul par série entière avec la méthode GMR est problématique repose sur la notion de *séries divergentes* couplée avec la *méthode du point col* qui est une généralisation de la célèbre *méthode de Laplace* pour l'approximation d'intégrales paramétrées d'un type particulier. Nous présentons brièvement le concept de série divergente ainsi que le principe de la méthode de Laplace pour ensuite présenter la méthode du point col.

Séries divergentes. Une série divergente pour une certaine fonction $f(z)$ est une suite de termes c_n , dépendant de z , telle que certaines des sommes partielles $c_0 + c_1 + \dots + c_N$ approximent bien

$f(z)$, en général lorsque $z \rightarrow \infty$. Comme son nom l'indique et contrairement aux séries entières, cette série ne converge pas. On emploiera ainsi le symbole « \sim » au lieu de « $=$ » :

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Autrement dit, à z donné, les sommes partielles divergent au delà d'un certain N alors que les sommes partielles jusqu'à cet ordre N s'étaient rapprochées de la valeur exacte $f(z)$. Par conséquent, la précision obtenue en tronquant à l'indice N optimal est dépendante de et limitée par la nature du problème¹.

Paradoxalement, cette divergence se révèle être parfois un atout. Puisque la série n'a pas pour contrainte de converger partout uniformément, ses quelques premiers termes peuvent suffire à donner une approximation suffisante de $f(z)$, là où la série entière nécessiterait plusieurs milliers voire millions de termes. Nous renvoyons à [16] et à l'Annexe B pour une exposition plus détaillée des séries divergentes avec des définitions formelles et l'exemple du développement asymptotique de la fonction d'erreur complémentaire erfc .

Méthode de Laplace pour l'approximation d'intégrales paramétrées. La méthode de Laplace (voir par exemple [84, Sec. II.1]) est un moyen simple d'approcher une intégrale à paramètre de la forme :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi_z(x)} dx, \quad (80)$$

quand le paramètre $z \rightarrow +\infty$ et pour une fonction continue $\varphi_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (a et b peuvent être infinis). Cette approximation repose sur l'observation faite par Laplace que la valeur de $f(z)$ pour $z \rightarrow +\infty$ dépend essentiellement du comportement de $\varphi_z(x)$ autour d'un maximum local x_0 sur \mathbb{R} . L'intégrale (80) est alors approximée par la formule ou approximation de Laplace :

$$f(z) \simeq e^{\varphi_z(x_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{\varphi_z''(x_0)}}. \quad (81)$$

Cette approximation peut être justifiée empiriquement assez facilement comme suit et sa dérivation rigoureuse utilise essentiellement le lemme de Watson (cf. [84, Sec. II.1] ou [79, Chapitre 3]). Pour retrouver l'idée derrière l'approximation (81), il suffit de remplacer la fonction $\varphi_z(x)$ dans l'intégrale par son développement de Taylor en $x = x_0$ tronqué à l'ordre 2 :

$$\varphi_z(x) \approx \varphi_z(x_0) + \frac{\varphi_z''(x_0)}{2} (x - x_0)^2, \quad \text{pour } |x - x_0| \ll 1. \quad (82)$$

On obtient ainsi :

$$f(z) \approx e^{\varphi_z(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\varphi_z''(x_0)}{2} (x-x_0)^2} = e^{\varphi_z(x_0)} \sqrt{\frac{-2\pi}{\varphi_z''(x_0)}}.$$

La dernière égalité de cette expression est parfaitement licite puisque $\varphi_z''(x_0)$ est négative (du fait que x_0 est un maximum, au moins local, de φ_z) et du fait de la définition de l'intégrale gaussienne. Cela revient donc à approcher φ_z par une parabole tournée vers le bas, qui épouse le graphe de φ_z en x_0 (cf. Figure 12a) et à approximer l'intégrande de $f(z)$ par la gaussienne la plus proche (cf. Figure 12b). L'approximation de Laplace donne en fait l'asymptotique dominante de $f(z)$ quand $z \rightarrow \infty$ (cf. Figure 12c). La méthode est maintenant illustrée par un exemple simple.

1. Des techniques plus sophistiquées, appelées *méthodes de resommation* et que nous n'aborderons pas ici, permettent dans certains cas d'améliorer cette précision.

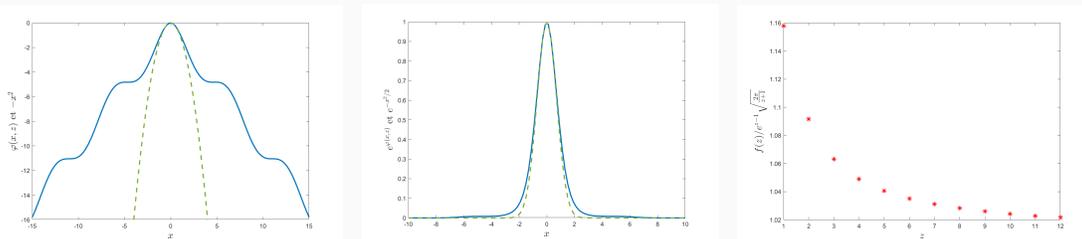
Exemple 1.

Nous utilisons la méthode de Laplace pour calculer une approximation de l'intégrale :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi_z(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z \cos(x) - \sqrt{1+x^2}} dx,$$

pour $z \rightarrow +\infty$. Le maximum de la fonction $\varphi_z(x) = z \cos(x) - \sqrt{1+x^2}$ sur \mathbb{R} est obtenu en $x_0 = 0$ et vaut $z - 1$. On obtient donc l'approximation :

$$f(z) \approx e^{z-1} \sqrt{\frac{2\pi}{z+1}}.$$



(a) Approximation quadratique (en vert) de φ_z (en bleu) en 0 (pour $z = 1$). (b) Approximation de $e^{\varphi_z(x)}$ (en bleu) par la gaussienne la plus proche (en vert), $z = 1$. (c) Quotient de la fonction f par son approximation en fonction de z .

FIGURE 12 – Méthode de Laplace pour $\varphi_z(x) = z \cos x - \sqrt{1+x^2}$.

Dans notre cas, la probabilité de collision instantanée s'exprime comme une intégrale curviligne dans le plan complexe dépendant des paramètres ξ , m_i et p_i pour $i = 1, \dots, d$. L'algorithme que nous proposons approxime cette intégrale en tronquant une série divergente, laquelle est obtenue par une méthode généralisant la méthode de Laplace aux intégrales curvilignes dans le plan complexe et connue comme la *méthode du point col* [84, Sec. II.4]. Pour le lecteur intéressé par les fondements mathématiques de cette méthode, les étapes clés que voici sont approfondies dans les paragraphes suivants :

1. **Développement de la fonction φ en série entière au voisinage de λ_0** : nous rappelons que la formule d'inversion de Laplace permet d'exprimer la probabilité comme intégrale curviligne dans le plan complexe :

$$g(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\varphi(\lambda)} d\lambda, \quad (83)$$

le long d'un chemin vertical $t : \mathbb{R} \mapsto \lambda_0 + it$ avec $\lambda_0 > 0$ situé sur l'axe réel positif. La contribution principale de l'intégrale étant déterminée par le comportement de l'intégrande autour de λ_0 , on développe φ en série entière au voisinage de λ_0 :

$$\varphi(\lambda) = a_0 + a_1(\lambda - \lambda_0) + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots + a_n(\lambda - \lambda_0)^n + \dots, \quad \text{avec } a_n = \frac{\varphi^{(n)}(\lambda_0)}{n!}. \quad (84)$$

Les coefficients a_n de cette série entière peuvent donc être calculés explicitement puisque nous disposons de dérivées successives de la fonction φ en (79). Les formules de ces coefficients sont donnés par la Table 1 de la section présentant l'algorithme final.

2. **Calcul numérique du point col λ_0 .** L'approximation des intégrales dans le plan complexe présente une difficulté supplémentaire par rapport aux intégrales réelles : les variations de la partie imaginaire de φ le long du chemin vertical $t : \mathbb{R} \mapsto \lambda_0 + it$ font osciller la partie réelle de l'intégrande $e^{\varphi(\lambda)}$. La méthode de Laplace consistant à l'approximer par une gaussienne se révèle ainsi mauvaise pour approcher la valeur de l'intégrale (cf. Figure 13a). La *méthode du point col* vient atténuer ce phénomène en choisissant λ_0 de manière judicieuse.

Puisque nous pouvons librement choisir $\lambda_0 > 0$ (théorème intégral de Cauchy), l'idée consiste à faire passer le chemin par un *point col*, c'est-à-dire un point λ_0 tel que $\varphi'(\lambda_0) = 0$. Les graphes des parties réelle u_φ et imaginaire v_φ de φ autour de λ_0 prennent alors la forme typique d'un « col de montagne » ou d'une « selle de cheval »² (voir les graphes de la Figure 14). Le chemin vertical $t : \mathbb{R} \mapsto \lambda_0 + it$ tracé en tirets violets est la droite tangente au *chemin de phase stationnaire* dont il sera question au paragraphe suivant, le long duquel la partie réelle u_φ décroît le plus rapidement autour de λ_0 , tandis que $v_\varphi = 0$. Ainsi, le phénomène oscillatoire de l'intégrande est atténué et la fonction est davantage assimilable à une gaussienne (cf. Figure 13b).

Pour finir, les Equations (77) et (79) impliquent que :

- $\varphi(\lambda) \sim -\log(\lambda) \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow 0^+$,
- $\varphi(\lambda) \sim \xi\lambda \rightarrow +\infty$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$,
- $\varphi''(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Nous en déduisons qu'il existe une unique solution de $\varphi'(\lambda_0) = 0$ sur l'axe réel positif (cf. Figure 15). Il est donc possible de calculer le point col λ_0 avec une méthode numérique adéquate.

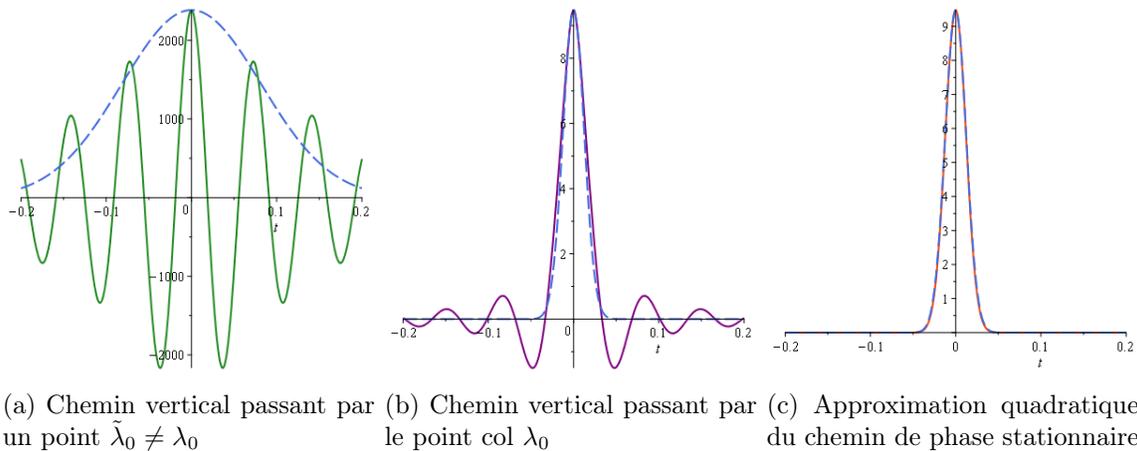
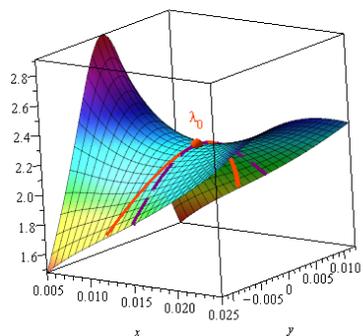
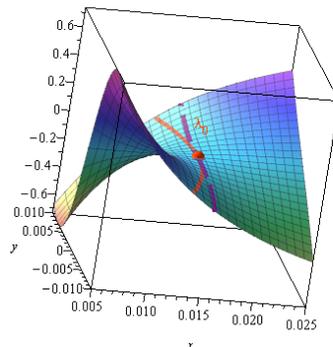


FIGURE 13 – Intégrande $e^{\varphi(\lambda)}$ le long de trois chemins différents et approximation gaussienne correspondante en tirets bleus (méthode de Laplace)

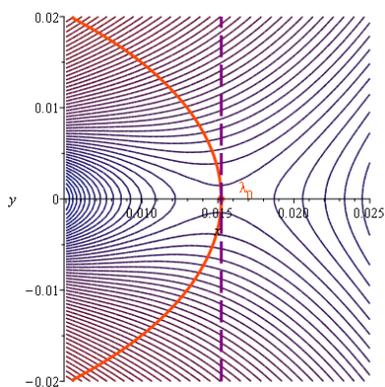
2. L'anglais utilise le terme de *saddle point*.



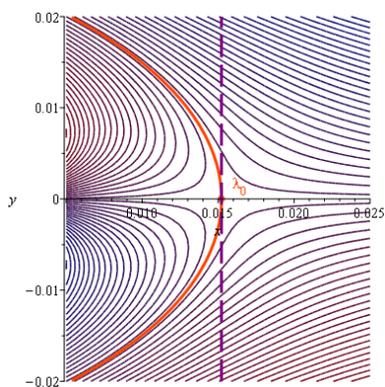
(a) Surface $(x, y) \mapsto u_\varphi(x + iy)$



(b) Surface $(x, y) \mapsto v_\varphi(x + iy)$



(c) Lignes de niveau de u_φ



(d) Lignes de niveau de v_φ

FIGURE 14 – Vues 2D et 3D des parties réelle u_φ et imaginaire v_φ de φ , avec le chemin vertical passant par le point col λ_0 (tirets violets) et le chemin de phase stationnaire (ligne orange continue)

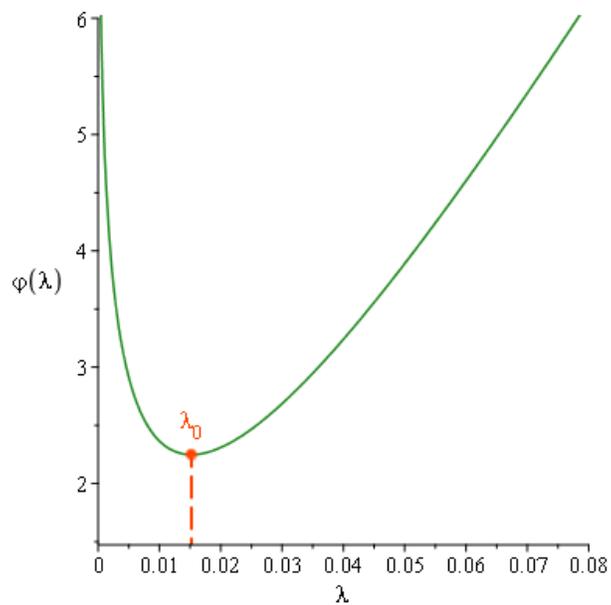


FIGURE 15 – Point col $\lambda_0 > 0$ solution de $\varphi'(\lambda_0) = 0$

3. **Inversion de série et chemin de phase stationnaire** : L'approximation de Laplace le long du chemin vertical passant par le point col λ_0 ne donne que le premier terme de la série divergente pour $g(\xi)$. Pour obtenir les termes suivants, nous calculons un changement de variable $w \mapsto \lambda(w)$ de la forme :

$$\lambda(w) = \lambda_0 + w + b_2 w^2 + \dots + b_n w^n + \dots, \quad (85)$$

de sorte à inverser la série formelle (84) de φ , c'est-à-dire que $\varphi(\lambda(w)) = a_0 + a_2 w^2$. Ce changement de variable agit comme une déformation du chemin d'intégration : lorsque $w = it$ pour $t \in \mathbb{R}$, $\lambda(it)$ parcourt un chemin passant par λ_0 et le long duquel $e^{\varphi(\lambda(it))} = e^{a_0 - a_2 t^2}$ est une « vraie » gaussienne, à valeurs réelles. On parle de *chemin de phase stationnaire*, visible sur les graphes de la Figure 14 (ligne continue orange). Le contour vertical d'origine est simplement la tangente (approximation de degré 1) de ce chemin en λ_0 . La parabole tangente en λ_0 (approximation de degré 2) fournit déjà une bien meilleure approximation, comme le montre la comparaison des Figures 13b et 13c.

On comprend dès lors l'intérêt de pouvoir calculer les quelques premiers termes b_n de ce changement de variable. Nous présentons un procédé récursif pour les obtenir de proche en proche :

- Pour calculer b_2 , on injecte le changement de variable (85) avec $b_n = 0$ pour $n \geq 3$ dans (84), puis on développe $\varphi(\lambda(w))$ jusqu'à l'ordre 3 en w :

$$\varphi(\lambda(w)) = a_0 + a_2 w^2 + (2a_2 b_2 + a_3) w^3 + O(w^4).$$

Le coefficient b_2 est alors choisi pour annuler le terme d'ordre 3 :

$$b_2 = -\frac{a_3}{2a_2}. \quad (86)$$

- On calcule ensuite b_3 . Pour cela, on remplace b_2 dans (85) par (86), on introduit une variable formelle b_3 et on développe $\varphi(\lambda(w))$ à l'ordre 4 dans l'optique d'annuler le dernier terme. On trouve :

$$b_3 = \frac{-4a_2 a_4 + 5a_3^2}{8a_2^2}.$$

- De manière générale, on calcule b_n après avoir calculé b_2, \dots, b_{n-1} . $\varphi(\lambda(w))$ est développée à l'ordre $n+1$ et b_n s'exprime à l'aide de a_2, a_3, \dots, a_{n+1} de sorte à annuler le terme de degré $n+1$ (il s'agit toujours d'une simple équation linéaire).

Le pseudo-code de ce procédé est donné par l'Algorithme 3. Nous proposons dans la Table 2 l'expression formelle des quelques premiers termes en fonction des coefficients a_n . Si l'on souhaite exécuter l'Algorithme 4 avec un ordre $N > 5$, les nouveaux termes b_n devront être calculés grâce à ce procédé.

4. **Coefficients c_n de la série divergente** : Le changement de variable $w \mapsto \lambda(w)$ que nous venons de calculer permet de réécrire l'intégrale (78) comme suit :

$$g(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\varphi(\lambda(w))} \lambda'(w) dw = \frac{e^{a_0}}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{a_2 w^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_{n+1} w^n dw. \quad (87)$$

Les intégrales de puissances impaires sont nulles par parité. Pour les puissances paires, on calcule :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{a_2 w^2} w^{2n} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a_2 t^2} (it)^{2n} i dt = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{\sqrt{\pi} 2^{n+1} a_2^{n+1/2}}.$$

Algorithme 3 COEFFICIENTSBN($N, (a_n)_{n=2}^N$)

Entrée: Coefficients a_n ($2 \leq n \leq N$) de la série formelle $\varphi(\lambda) = a_2\lambda^2 + \dots + a_N\lambda^N + \dots$ à inverser.
Sortie: Coefficients b_n de $\lambda(w) = b_1w + b_2w^2 + \dots + b_{N-1}w^{N-1}$ tels que $\varphi(\lambda(w)) = a_2w^2 + O(\lambda^{N+1})$.

- 1: $b_1 \leftarrow 1$.
 - 2: $\lambda(w) \leftarrow w$.
 - 3: **pour** $n = 2$ **to** $N - 1$ **faire**
 - 4: $\lambda(w) \leftarrow \lambda(w) + b_n w^n$. $\triangleright b_n$ variable formelle, affectée plus tard
 - 5: $c \leftarrow [w^{n+1}]\varphi(\lambda(w))$. \triangleright coefficient devant w^{n+1} dans $\varphi(\lambda(w))$
 - 6: $b_n \leftarrow$ solution de $c = 0$.
 - 7: **fin pour**
 - 8: **Renvoyer** b_1, \dots, b_{N-1} .
-

On obtient en fin de compte :

$$g(\xi) \sim \frac{e^{a_0}}{2\sqrt{\pi a_2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{avec} \quad c_n = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{(2a_2)^n} b_{2n+1}. \quad (88)$$

Remarque 5. De nouveau, nous utilisons le symbole « \sim » à la place de « $=$ » pour rappeler le caractère divergent de la série. Il ne s'agit en effet pas d'une égalité. La raison est que dans ces calculs, nous avons implicitement interverti les symboles \int et \sum pour passer de (87) à (88). Or la série entière pour $\lambda(w)$ ne converge pas uniformément pour tout $w \in \mathbb{C}$: cette interversion n'est donc pas licite. Cela explique que la série des c_n diverge.

3.1.6 Algorithme pour le calcul de la probabilité de collision instantanée par séries divergentes

Le contenu qui suit — pseudo-code de l'Algorithme 4 ainsi que les Tables 1, 2 et 3 pour les coefficients a_n , b_n et c_n utilisés dans les calculs — est auto-suffisant en vue de l'implémentation de la procédure.

Algorithme 4 PROBAINSTANT($d, R, (m_i)_{i=1}^d, (\sigma_i)_{i=1}^d, N$)

Entrée: dimension $d = 2$ ou 3 , rayon combiné R , moyennes m_i et écarts-types σ_i , nombre N de termes de la série divergente à calculer.

Sortie: Approximation $\tilde{\mathcal{P}}_c^{dD}$ de la probabilité de collision instantanée.

- 1: Calculer numériquement le point col $\lambda_0 > 0$, solution de l'équation :

$$a_1(\lambda_0) = 0,$$

avec a_1 donné par la Table 1.

- 2: Calculer les coefficients a_n de la Table 1 pour $0 \leq n \leq 2N$.
 - 3: Calculer les coefficients b_n de la Table 2 pour $0 \leq n \leq 2N - 1$, n impair.
 - 4: Calculer les coefficients c_n de la Table 3 pour $0 \leq n \leq N - 1$.
 - 5: **Renvoyer** $\tilde{\mathcal{P}}_c^{dD} \leftarrow \frac{e^{a_0}}{2\sqrt{\pi a_2}} (c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1})$.
-

$$\begin{aligned}
a_0 &= \xi \lambda_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2 p_i}{\lambda_0 + p_i} - \log \lambda_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \log \left(\frac{\lambda_0}{p_i} + 1 \right), \\
a_1 &= \xi - \sum_{i=1}^d \frac{m_i^2 p_i^2}{(\lambda_0 + p_i)^2} - \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{1}{\lambda_0 + p_i}, \\
a_n &= (-1)^n \left(\sum_{i=1}^d \frac{m_i^2 p_i^2}{(\lambda_0 + p_i)^{n+1}} + \frac{1}{n \lambda_0^n} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^d \frac{1}{(\lambda_0 + p_i)^n} \right), \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

TABLE 1 – Coefficients a_n en fonction de $\xi = R^2$, λ_0 , m_i et $p_i = 1/2\sigma_i^2$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1, \\
b_3 &= \frac{-4a_2 a_4 + 5a_3^2}{8a_2^2}, \\
b_5 &= \frac{-64a_2^3 a_6 + 224a_2^2 a_3 a_5 + 112a_2^2 a_4^2 - 504a_2 a_3^2 a_4 + 231a_3^4}{128a_2^4}, \\
b_7 &= \frac{1}{1024a_2^6} \left[-512a_2^5 a_8 + (2304a_3 a_7 + 2304a_4 a_6 + 1152a_5^2) a_2^4 + (-6336a_3^2 a_6 \right. \\
&\quad \left. - 12672a_3 a_4 a_5 - 2112a_4^3) a_2^3 + (13728a_3^3 a_5 + 20592a_3^2 a_4^2) a_2^2 - 25740a_2 a_3^4 a_4 + 7293a_3^6 \right], \\
b_9 &= \frac{1}{32768a_2^8} \left[-16384a_2^7 a_{10} + (90112a_3 a_9 + 90112a_4 a_8 + 90112a_5 a_7 + 45056a_6^2) a_2^6 \right. \\
&\quad \left. + (-292864a_3^2 a_8 + (-585728a_4 a_7 - 585728a_5 a_6) a_3 - 292864a_4 (a_4 a_6 + a_5^2)) a_2^5 \right. \\
&\quad \left. + (732160a_3^3 a_7 + (2196480a_4 a_6 + 1098240a_5^2) a_3^2 + 2196480a_3 a_4^2 a_5 + 183040a_4^4) a_2^4 \right. \\
&\quad \left. - 1555840a_3^2 (a_2^3 a_6 + 4a_3 a_4 a_5 + 2a_4^3) a_2^3 + (2956096a_3^5 a_5 + 7390240a_3^4 a_4^2) a_2^2 \right. \\
&\quad \left. - 5173168a_2 a_3^6 a_4 + 1062347a_3^8 \right].
\end{aligned}$$

TABLE 2 – Coefficients b_n du changement de variable, en fonction des coefficients a_n , nécessaires au calcul des cinq premiers termes c_n

$$c_0 = b_1, \quad c_1 = -\frac{3}{2} \frac{b_3}{a_2}, \quad c_2 = \frac{15}{4} \frac{b_5}{a_2^2}, \quad c_3 = -\frac{105}{8} \frac{b_7}{a_2^3}, \quad c_4 = \frac{945}{16} \frac{b_9}{a_2^4}.$$

TABLE 3 – Cinq premiers termes c_n de la série divergente

3.1.7 Exemples numériques

La méthode du point col a été testée avec succès sur tous les exemples donnés dans [8] qui n'entrent pas tous dans le cadre du modèle des rencontres rapides (seules les rencontres des cas 3 et 5 sont des rencontres rapides/linéaires) mais pour lesquels des valeurs de \mathcal{P}_c^{2D} ont été obtenues

par diverses méthodes dans [8] et [72]. Pour illustrer les difficultés que peut rencontrer la méthode par série entière, 3 exemples dérivés des données de certains exemples de [8] sont présentés dans la Table 4 où les paramètres (R : rayon du corps combiné, m : vecteur des moyennes et σ : vecteur des écarts-type) de l'intégrale 75 en 3D sont donnés. Une borne sur le nombre de termes nécessaires à la série entière pour que son évaluation atteigne une précision de 10^{-15} , obtenue explicitement à partir des séries majorantes, ainsi que le résultat obtenu avec la méthode du point col pour le calcul de l'intégrale 75 sont indiqués dans les deux dernières colonnes. Dans chacun des cas, la méthode par série entière donne NaN comme résultat sous MATLAB®.

	R	m	σ	Nbre. Termes	\mathcal{P}_c^{3D}
Test 1	6	$\begin{bmatrix} -18.4903 \\ -1.18463 \\ -0.237666 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13.1184 \\ 1.21828 \\ 0.0383343 \end{bmatrix}$	353252	0.133187
Test 2	4	$\begin{bmatrix} 145.817 \\ -3.4981 \\ 6.60162 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 124.374 \\ 0.417321 \\ 0.3216 \end{bmatrix}$	24521	$1.0 \cdot 10^{-27}$
Test 3	4	$\begin{bmatrix} -180.513 \\ 31.6892 \\ 2.43 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 128.25 \\ 0.754828 \\ 0.346039 \end{bmatrix}$	19228	$1.4 \cdot 10^{-304}$

TABLE 4 – Trois exemples numériques en défaut pour le calcul de \mathcal{P}_c^{3D} par la méthode de la série entière

3.2 Une méthode hybride pour les rencontres rapides avec incertitudes sur la vitesse

3.2.1 Principe de la méthode

Nous avons développé dans la sous-section 2.1.2 une approche directe pour retrouver l'expression de la probabilité 2D, dans le cadre d'une rencontre rapide, avec des vitesses déterministes. Une généralisation naturelle consiste à considérer le cas, un peu plus compliqué, de rencontres rapides avec des vitesses aléatoires et suivant une loi de distribution gaussienne. De façon similaire au cadre décrit auparavant, plusieurs hypothèses seront nécessaires pour la dérivation d'une procédure de calcul. Notamment, les deux vecteurs aléatoires x_p et x_s sont indépendants à tout instant de la rencontre et la géométrie de la trajectoire relative est rectiligne. Nous continuons à supposer que les Hypothèses 5 et 6 sont toujours valides.

Cependant, par rapport à une rencontre rapide classique, nous considérons un cadre plus général puisque la position ET la vitesse relative sont supposées être incertaines et modélisées par des vecteurs aléatoires. Nous allons donc reprendre l'Hypothèse 4 qui suppose que l'état relatif initial

$x_r^0 = [r_r^0, v_r^0] \in \mathbb{R}^6$ est un vecteur aléatoire gaussien.

En notant, $t_1 = t_0$ et $t_2 = t_0 + T$, on va exprimer la probabilité de collision à l'aide du vecteur aléatoire x_r^0 . D'après l'Hypothèse 6, le mouvement relatif est rectiligne uniforme :

$$r_r(t) = r_r^0 + v_r^0 t, \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (89)$$

Nous rappelons que les conditions initiales qui génèrent une collision sont données par \mathcal{X}_T^0 :

$$\mathcal{X}_T^0 = \{x_r^0 \in \mathbb{R}^6 \mid \exists t \in [t_0, t_0 + T], r_r(t|x_r^0) \in \mathcal{X}_R\}, \quad (90)$$

où \mathcal{X}_R est la région interdite définie par la sphère de rayon R dans le domaine des positions relatives. Nous avons donc :

$$\mathcal{P}_c = \int_{\mathcal{X}_T^0} \rho_I(x_r) dx_r. \quad (91)$$

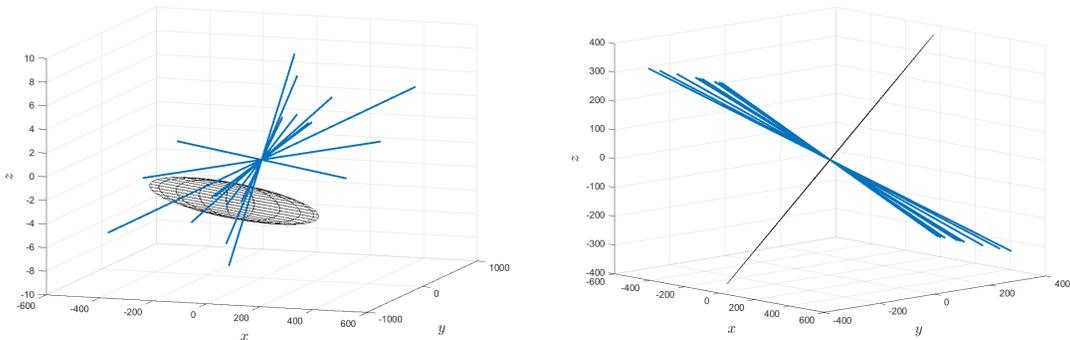
La géométrie particulière de \mathcal{X}_R et le fait que le mouvement relatif est rectiligne permettent de caractériser plus simplement le volume d'intégration $\mathcal{X}_T^0 \subseteq \mathbb{R}^6$. Tout d'abord, observons que pour chaque vitesse fixée $v_r^0 \in \mathbb{R}^3$, les positions $r_r^0 \in \mathbb{R}^3$, telles que $[r_r^0, v_r^0] \in \mathcal{X}_T^0$, se situent dans un tube de collision $\mathcal{X}_{T, v_r^0}^0 = \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \bar{B}_3(-tv_r^0, R)$. Cela permet de réécrire :

$$\mathcal{X}_T^0 = \{x_r^0 \in \mathbb{R}^6 \mid v_r^0 \in \mathbb{R}^3 \text{ et } r_r^0 \in \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \bar{B}_3(-tv_r^0, R)\}. \quad (92)$$

Tout comme dans le cadre d'une rencontre rapide classique, une hypothèse additionnelle, simplificatrice et conservatrice, consiste à étendre à l'infini ces tubes de collision. Cela revient à prendre en compte l'apport de l'intégration sur la distribution gaussienne due à l'extension de l'intégration temporelle et donc, cela implique de surestimer l'intégrale initiale. En utilisant cette approximation, pour chaque $v_r^0 \in \mathbb{R}^3$ fixée, les positions relatives initiales $r_r^0 \in \mathbb{R}^3$ qui génèrent une collision se trouvent à l'intérieur d'un cylindre circulaire $\text{Cyl}(R, v_r^0) \subseteq \mathbb{R}^3$ de rayon R , dont la direction est donné par le vecteur v_r^0 . En utilisant l'équation cartésienne du cylindre, nous avons :

$$\mathcal{X}_\infty^0 = \{x_r^0 \in \mathbb{R}^6 \mid v_r^0 \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \|v_r^0 \times r_r^0\|_2 \leq R \|v_r^0\|_2\}. \quad (93)$$

Deux illustrations différentes de cette géométrie sont données par une représentation de la projection de \mathcal{X}_T^0 sur l'espace tridimensionnel correspondant aux positions relatives, pour quelques vitesses, à la Figure 16 dans les 4 et 5 tirés de [8].



(a) Ellipsoïde à $5\text{-}\sigma$ de la densité gaussienne (en noir) et quelques tubes de collision générés par différents échantillons de vitesses (en bleu) - Cas 4 de [8].
(b) Ellipsoïde à $5\text{-}\sigma$ de la densité gaussienne (en noir) et quelques tubes de collision générés par différents échantillons de vitesses (en bleu) - Cas 5 de [8].

FIGURE 16 – Projection de \mathcal{X}_T^0 sur l'espace des positions relatives pour quelques vitesses.

Nous avons donc la formule suivante pour la probabilité de collision en 6 dimensions :

$$\mathcal{P}_c \simeq \int_{\mathcal{X}_\infty^0} \rho_I(x_r) dx_r = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\det(P_{x_{r_0}})}} \int_{\mathcal{X}_\infty^0} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_r - m_{x_{r_0}})^T P_{x_{r_0}}^{-1} (x_r - m_{x_{r_0}})\right) dx_r. \quad (94)$$

Il est ensuite nécessaire d'introduire une nouvelle hypothèse.

Hypothèse 7 (Décorrélation positions-vitesses relatives.).

Les corrélations positions-vitesses sont suffisamment petites pour être négligeables.

Sous cette hypothèse, l'intégrale précédente peut être décomposée de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_c \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det(P_{v_{r_0}})}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{1}{2}(v_r - m_{v_{r_0}})^T P_{v_{r_0}}^{-1} (v_r - m_{v_{r_0}})\right) \mathcal{P}_{2D}(v_r) dv_r, \quad (95)$$

où

$$\mathcal{P}_{2D}(v_r) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det(P_{r_{r_0}})}} \int_{\text{Cyl}(R, v_r)} \exp\left(-\frac{1}{2}(r_r - m_{r_{r_0}})^T P_{r_{r_0}}^{-1} (r_r - m_{r_{r_0}})\right) dr_r. \quad (96)$$

On observe donc que le calcul de l'intégrale gaussienne en 6 dimensions, sur le domaine \mathcal{X}_∞^0 , peut être ramené à un calcul d'une intégrale tridimensionnelle sur les vitesses, où l'intégrande s'exprime comme un produit entre la densité gaussienne des vitesses et une fonction $\mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_r)$ qui correspond exactement à la probabilité en rencontre rapide, pour une vitesse donnée v_r . Autrement dit,

$$\mathcal{P}_c \simeq \mathbb{E}(\mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_r)), \quad (97)$$

où, avec un abus de notation, $\mathbb{E}(\mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_r))$ note l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_r)$, où v_r est un vecteur aléatoire gaussien. Ainsi, pour estimer cette espérance, nous choisissons pour l'instant d'utiliser la méthode très simple, mais souvent utilisée en pratique, de la moyenne empirique par tirage (qui est un estimateur sans biais et convergent selon la loi des grands nombres). Plus précisément, comme indiqué dans l'Algorithme 5, les étapes de la méthode sont :

- tirer un nombre N d'échantillons v_{r_i} du vecteur aléatoire gaussien des vitesses ;
- pour chaque échantillon v_{r_i} , la valeur $\mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_{r_i})$ est calculée avec une des méthodes développées précédemment pour le calcul d'une rencontre rapide classique ;
- la moyenne $\tilde{\mathcal{P}}_c = \frac{1}{N} \sum_i^N \mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_{r_i})$ représente une approximation de la probabilité \mathcal{P}_c à calculer.

3.2.2 Résultats numériques

Cet algorithme a été testé sur les exemples proposés dans la référence [8] à l'exception du cas 12 dont la configuration physique (les deux objets à la même position moyenne durant toute la rencontre) ne permet pas de définir le repère de rencontre et donc d'utiliser la méthode hybride directement. Ces cas n'entrent pas *a priori* dans la catégorie dont les caractéristiques de rencontre sont particulièrement adaptées aux hypothèses retenues pour la méthode hybride. Toutefois, ce sont les seules à notre disposition qui sont suffisamment documentées et analysées. Nous ne présentons pas de nouveau les cas en détails puisque leur description et les données sont disponibles dans [8] et [72].

Les résultats numériques sont résumés dans le Tableau 5 où nous avons reproduit les résultats présentés par S. Alfano avec une méthode de Monte Carlo (M.C.) avec 100 millions de combinaisons),

Algorithme 5 PROBAVITESSEÉCHANTILLONNÉE2D($\mathcal{N}_3(m_{v_{r_0}}, P_{v_{r_0}}), \mathcal{N}_3(m_{r_{r_0}}, P_{r_{r_0}}), R, N$)

Entrée: rayon combiné R , moyennes $m_{v_{r_0}}, m_{r_{r_0}}$ et covariances $P_{v_{r_0}}, P_{r_{r_0}}$ des distributions gaussiennes des positions et vitesses relatives initiales, nombre N d'échantillons à considérer.

Sortie: Approximation $\tilde{\mathcal{P}}_c$ de la probabilité de collision.

- 1: Tirer N échantillons de vitesse $v_{ri}, i = 1, \dots, N$.
 - 2: Pour chaque v_{ri} , calculer le repère et le plan de rencontre comme décrits dans la Section 2 et passer en dimension 2.
 - 3: Calculer la valeur de $\mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_{ri})$ en utilisant la méthode 2D la plus adaptée :
Si le nombre de termes n dans l'Algorithme 2 (ligne 9) est plus grand que 8000, utiliser l'Algorithme 4.
 - 4: **Renvoyer** $\tilde{\mathcal{P}}_c = \frac{1}{N} \sum_i^N \mathcal{P}_{\text{Cyl}}(v_{ri})$.
-

la méthode des voxels (Vox.) [4], la méthode des cylindres adjacents (A.C.) [4], la méthode de Coppola (Cop.) codée par le CNES [72], la méthode de Coppola sans incertitude sur la vitesse (Cop. 2) dont les résultats nous ont été fournis par le CNES et la méthode du point de col présentée dans ce rapport pour l'évaluation de la probabilité 2D (Lin.). Concernant notre méthode, nous présentons les résultats dans les trois dernières colonnes. Pour chaque cas, nous avons fait tourner l'algorithme 10 fois avec 100000 échantillons pour le vecteur de vitesse relative. Nous avons alors sélectionné le minimum, le maximum et la moyenne de ces 10 essais.

	M.C. [8]	Vox. [4]	A.C. [4]	Cop. [72]	Cop. 2	Lin.	Min	Max	Moy.
Cas 1	0.2175	0.2215	0.2149	0.2168	0.1853	0.1468	0.2265	0.2278	0.2273
Cas 2	0.0157	0.0158	0.0164	0.0155	0.0143	0.0062	0.0132	0.0132	0.0132
Cas 3	0.1008	0.0998	0.1004	0.1003	0.1003	0.1004	0.1004	0.1004	0.1004
Cas 4	0.0731	0.0726	0.0241	0.07364	0.2231	0.0493	0.0503	0.0503	0.0503
Cas 5	0.0445	0.0446	0.0529	0.0445	0.4436	0.445	0.0445	0.0445	0.0445
Cas 6	0.0043	0.0044	0.0043	0.0043	0.0043	0.0040	0.0043	0.0043	0.0043
Cas 7	0.00016	0.00016	0.00016	0.00016	0.00017	0.00016	0.00011	0.00011	0.00011
Cas 8	0.0353	0.035	0.0296	0.0352	0.0364	0.037	0.0383	0.0383	0.0383
Cas 9	0.3651	0.3538	0.8768	0.355	0.3556	0.2902	0.3648	0.3656	0.3651
Cas 10	0.363	0.3538	0.8768	0.3641	0.2810	0.2902	0.3644	0.3653	0.3650
Cas 11	0.0033	0.0040	0.0000	0.0043	0.00483	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027

TABLE 5 – Résultats numériques des 11 conjonctions extraites de [8]

Nous faisons maintenant une première analyse de ces résultats :

- Les cas 1 et 2 sont identiques puisque ce sont deux rencontres de satellites géosynchrones, lentes (durée d'accumulation de la probabilité non négligeable et vitesse relative à la TCA faible, non linéaires) avec 2 zones d'accumulation très distinctes telles qu'elles sont indiquées par les courbes de la probabilité cumulative données dans la référence [8]. Les deux exemples diffèrent par le fait que le rayon de l'objet combiné est plus faible dans le cas 2 que dans le cas 1. Les résultats de la méthode hybride sont corrects et donnent le premier chiffre significatif dans les deux cas. Le résultat pour le cas 2 est un peu moins bon que dans le cas 1 mais nous

- n'avons pas d'explications particulières à ce stade de l'analyse.
- Les cas 3 (rencontre entre deux orbites géosynchrones) et 5 (rencontre entre deux satellites en orbite basse) sont deux rencontres que l'on peut qualifier de rapides (en termes de vitesse relative à la TCA et durée pour laquelle il y a accumulation de la probabilité) et linéaires (au sens de la trajectoire relative rectiligne autour de la TCA) et pour lesquels toutes les méthodes (même les méthodes développées exclusivement dans le cadre du modèle de rencontre rapide) donnent des résultats presque équivalents. On pourra raisonnablement exclure ces rencontres d'analyses ultérieures concernant les méthodes s'appliquant à un cadre plus général que le cadre des rencontres rapides.
 - Le cas 4 correspond à une rencontre lente, en termes de vitesse relative à la TCA ainsi qu'en termes de durée d'accumulation de la probabilité, entre deux satellites géosynchrones. Une particularité de cet exemple est donnée par le décalage de la TCA avec la plage d'accumulation de la probabilité puisque celle-ci démarre au moins 3000 secondes après la TCA. Hormis les méthodes des voxels et de Coppola, les autres méthodes ne sont pas très bonnes sur cet exemple puisqu'aucun chiffre significatif correct n'est obtenu si l'on prend la méthode de Monte Carlo comme référence. Même s'il est possible de voir une assez grande dispersion des vitesses relatives à la Figure 16a, il est difficile d'analyser précisément à ce stade de l'étude, la source de cette erreur qui peut être imputée à différentes hypothèses retenues (mouvement relatif rectilinéaire, décorrélation des vitesses et positions relatives...) pour la méthode hybride et qui sont en défaut ici.
 - Le cas 6 est une rencontre entre deux satellites en orbite basse avec une vitesse relative faible mais qui classe cet exemple à la limite des deux catégories définies respectivement par les rencontres rapides et les rencontres lentes. La durée d'accumulation de la probabilité est d'environ 100 s autour de la TCA. Toutes les méthodes sont en accord pour donner une valeur cohérente. Cet exemple peut également être considéré comme peu intéressant pour la suite.
 - Le cas 7 est un cas de rencontre entre deux satellites en orbite basse avec une vitesse relative faible à la TCA et une probabilité de collision à déterminer très faible (essentiellement pour éprouver les méthodes de Monte Carlo). La méthode hybride détermine un chiffre significatif (ce qui est largement suffisant pour déterminer qu'une manœuvre n'est pas nécessaire) en un temps très faible. L'ensemble des méthodes détermine ce chiffre significatif mais avec une complexité de calcul plus importante.
 - Le cas 8 est un cas de rencontre lente (très faible vitesse relative à la TCA et intervalle de temps d'accumulation de la probabilité relativement long (10000 s)) entre deux satellites en orbite moyenne. Il est à noter une courbure importante de la trajectoire relative moyenne. Nous retrouvons ici aussi un chiffre significatif comme presque toutes les méthodes à l'exception de la méthode des cylindres adjoints qui n'est pas aussi précise.
 - Les cas 9 et 10 sont commentés conjointement puisqu'ils sont identiques à la nuance près de la définition de l'intervalle de temps d'étude qui est allongé dans le cas 10 par rapport au cas 9. Il s'agit de rencontres de deux satellites en orbite fortement elliptique avec une vitesse relative faible à la TCA et une courbure importante de la trajectoire relative moyenne. La méthode hybride fonctionne plutôt bien sur ces deux exemples puisqu'elle donne deux à trois chiffres significatifs alors que les autres méthodes sont clairement moins efficaces, exceptée la méthode des voxels qui donne un chiffre significatif.
 - Enfin, le cas 11 représente une rencontre particulière puisqu'il s'agit de deux satellites en formation leader/follower qui se suivent et la TCA n'est donc pas définie à proprement parler avec une vitesse relative moyenne qui est nulle. Cette rencontre conduit très certainement à des rencontres multiples et l'hypothèse d'entrée unique dans le volume de rencontre utilisée

dans les travaux de Coppola n'est certainement pas vérifiée, impliquant ainsi une surestimation de la probabilité de collision par sa méthode. Dans [26], il est noté qu'en modifiant la méthode de Monte Carlo d'Alfano afin qu'elle compte les collisions sous la même hypothèse que pour la méthode de Coppola, il est possible d'avoir presque identité entre les deux résultats. Pour ce cas, aucune méthode n'est réellement satisfaisante même si la méthode hybride est quand même au niveau des autres.

En conclusion, même si ces exemples ne sont pas complètement adaptés pour éprouver l'efficacité de la méthode hybride, ils ont l'intérêt de montrer son potentiel et son efficacité due essentiellement à sa simplicité de mise en œuvre. En effet, l'avantage principal de cette méthode consiste en sa simplicité, car même si un échantillonnage gaussien est nécessaire en 3D sur les vitesses, elle reste très rapide et robuste. Ceci est principalement dû au développement de nos deux méthodes 2D alternatives. Nous observons, à travers les résultats numériques préliminaires présentés dans le Tableau 5 qu'elle rivalise globalement en termes de résultats avec des méthodes beaucoup plus complexes (comme la méthode des cylindres adjoints ou des voxels d'Alfano), si l'on recherche un ordre de grandeur de la probabilité de collision ou un chiffre significatif. Les résultats préliminaires suggèrent que cette méthode peut bien s'appliquer dans le cadre de certaines rencontres qui ont été analysées comme lentes dans la littérature. Une étude plus systématique et fondée sur des cas d'application bien ciblés doit être menée pour délimiter plus clairement son spectre d'application. Les origines de l'erreur commise sur les cas 4 et 11 doivent également être analysées plus précisément afin de proposer d'éventuels développements futurs permettant de la généraliser.

4 La méthode directe ou PoC 3D pour les rencontres lentes

4.1 Dérivation rigoureuse de la formule de Coppola dans le cadre de la théorie des mesures

L'objectif de cette section est double : Il s'agit, dans un premier temps, de dériver, de manière rigoureuse mathématiquement, la formule utilisée pour le calcul de la probabilité de collision dans le cadre théorique défini dans la référence [26]. La méthode de calcul de la probabilité de collision long-terme avec incertitude sur la vitesse relative proposée par V.T. Coppola est aussi appelée *méthode directe* [29]. Notre but est d'analyser cette solution (appelée également méthode 3D dans la littérature et identifiée comme PoC 3D) de manière rigoureuse et précise. Le second objectif est d'examiner la littérature dédiée à la PoC 3D, ses limitations et à de possibles extensions.

Nous supposons que le modèle dynamique étudié (sans précision sur quel vecteur d'état exact de l'objet combiné X_{**} est utilisé) $\dot{X}(t) = f(t, X(t))$ a une fonction d'évolution inversible $\varphi_{t_0}^t$, se comportant comme un C^1 -diffeomorphisme pour $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0}^t &: \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{12} \\ X^0 &\mapsto X(t|X^0), \end{aligned}$$

où $\varphi_{t_0}^t(\cdot)$ est la fonction $\varphi(t, t_0, \cdot)$ pour un certain $(t, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En supposant que la fonction $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ est invariante par translation temporelle, nous pourrions poser $t_0 = 0$ sans perte de généralité [37]. La famille de fonctions à deux paramètres satisfait :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{t_0}^t(X^0) = f(t, \varphi_{t_0}^t(X^0)).$$

Son inverse est donnée par :

$$(\varphi_{t_0}^t)^{-1} = \varphi_t^{t_0} : X(t|X^0) \mapsto X^0.$$

Lors de calculs impliquant les fonctions de densité et la formule de changement de variables, la *linéarisation locale de la fonction d'évolution* par rapport aux conditions initiales, notée $D\varphi_{t_0}^t(X^0) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ sera nécessaire. Ainsi, si \tilde{X}^0 est voisin de X^0 , alors :

$$\varphi_{t_0}^t(\tilde{X}^0) \approx \varphi_{t_0}^t(X^0) + D\varphi_{t_0}^t(X^0)(\tilde{X}^0 - X^0).$$

Il est à noter que la linéarisation locale de l'inverse de la fonction d'évolution $\varphi_t^{t_0}$ vérifie la relation :

$$D\varphi_t^{t_0}(\varphi_{t_0}^t(X^0)) = (D\varphi_{t_0}^t(X^0))^{-1},$$

puisque'en différenciant par rapport à X^0 , l'équation $\varphi_t^{t_0} \circ \varphi_{t_0}^t = \text{Id}_{\mathbb{R}^{12}}$, nous obtenons $D\varphi_t^{t_0}(\varphi_{t_0}^t(X^0)) \circ D\varphi_{t_0}^t(X^0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^{12}}$.

Exemple 2.

Avec l'hypothèse que la fonction d'évolution est linéaire, $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, la solution des équations dynamiques par la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$, est telle que

$$X(t|X^0) = \varphi_0^t(X^0) = \Phi(t, t_0)X^0,$$

c'est à dire, les conditions initiales sont propagées de la date t_0 au temps t par la matrice $\Phi(t, t_0)$. On a également $X^0 = \Phi(t, t_0)^{-1}X(t) = \Phi(t_0, t)X(t)$.

De plus, supposons qu'il existe une paramétrisation d'une partie ou du tout de la surface $\partial^c \mathcal{X}_R$ donnée par $P : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ et avec $P(s) = (p_1(s), \dots, p_n(s)) \in \partial^c \mathcal{X}_R$.

Exemple 3.

(a) (Cercle) Les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'un point sur le cercle de rayon R sont paramétrés sur le cercle par le changement de coordonnées :

$$(x, y)^T := P(\theta) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta))^T,$$

avec $\theta \in S = [0, 2\pi]$.

(b) (Sphère) Les coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ d'un point sur la sphère de rayon R sont paramétrés sur la sphère par le changement de coordonnées :

$$(x, y, z)^T := P(\theta, \phi) = (R \cos(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\phi))^T,$$

avec $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$ et $S = [0, 2\pi) \times [0, \pi]$.

(c) (Cas particulier de l'article de Coppola)

Pour $X_{rp} = (r_{r1}, r_{r2}, r_{r3}, v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}, r_{p1}, r_{p2}, r_{p3}, v_{p1}, v_{p2}, v_{p3})^T \in \mathbb{R}^{12}$ la surface $r_{r1}^2 + r_{r2}^2 + r_{r3}^2 = R^2$, est paramétré sur \mathbb{R}^{11} par le changement de coordonnées :

$$X_{rp} = (r_{r1}, r_{r2}, r_{r3}, v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}, r_{p1}, r_{p2}, r_{p3}, v_{p1}, v_{p2}, v_{p3})^T := P(\theta, \phi, v_{r1}, \dots, v_{p3}), \quad (98)$$

$$= (R \cos(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\phi), v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}, r_{p1}, r_{p2}, r_{p3}, v_{p1}, v_{p2}, v_{p3})^T \quad (99)$$

avec $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [0, \pi]$ et $S = [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^9$. Il est à noter que cette paramétrisation repose sur les coordonnées sphériques définies par la convention utilisée en Mathématique qui est différente (θ et ϕ sont intervertis) de celle utilisée de préférence en Physique ou de celle utilisée en Géographie [26] (rayon R , longitude φ et latitude $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (noté θ in [26])).

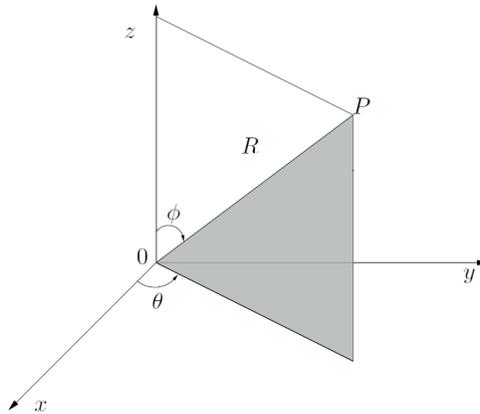


FIGURE 17 – Coordonnées sphériques pour la paramétrisation de la sphère.

La forme possiblement complexe et mal connue *a priori* de l'ensemble \mathcal{X}_T^{0tc} rend difficile d'obtenir la probabilité de collision en calculant directement une intégrale sur cet ensemble. Le principe de la

formule de Coppola est de calculer une intégrale équivalente sur l'ensemble des états de collision, par un changement de variables donné par la fonction $\psi : [t_0, t_0 + T] \times S \rightarrow \mathcal{X}_T^{0t_c}$, $\psi(t, s) = \varphi_t^{t_0}(P(s))$ (il faut noter que cette définition consiste en une composition partielle, puisque $\varphi_t^{t_0}$ dépend du premier argument t de ψ). Afin que cette substitution soit licite, comme indiqué dans le lemme suivant, il est nécessaire que ψ soit 1-1 (plus précisément, un C^1 -difféomorphisme). J'hypothèse suivante est suffisante pour la bijectivité de ψ .

Hypothèse 8 (Une seule entrée dans le volume de collision).

Pour chaque trajectoire amenant une collision, il n'y a qu'une seule entrée à travers (ou seulement une unique trajectoire tangente à) la région interdite \mathcal{X}_R pour tout $t \in (t_0, t_0 + T]$. On en déduit que le domaine de collision $\mathcal{X}_T^{0t_c}$ et la surface S sont définies respectivement par :

$$\mathcal{X}_T^{0t_c} = \{X^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists! t \in (t_0, t_0 + T], X(t|X^0) \in \partial\mathcal{X}_R \text{ et } v_r(t)^T r_r(t) \leq 0\}, \quad (100)$$

et

$$S = \{(\theta, \phi, v_r, r_p, v_p) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^9 : v_{r1} \cos(\theta) \sin(\phi) + v_{r2} \sin(\theta) \sin(\phi) + v_{r3} \cos(\phi) \leq 0\}. \quad (101)$$

Afin de calculer la partie de la probabilité de collision \mathcal{P}_c correspondant à $\mu_I(\mathcal{X}_T^{0t_c}) := \mu_0(\mathbb{R}^n)$, les développements suivants reposent sur le lemme suivant :

Lemme 1.

- (i) $\mu_F = ((\text{Id}_{\mathbb{R}} \times P) \circ \psi^{-1})_* \mu_0$;
- (ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_0 = \int_{\mathcal{X}_T^{0t_c}} \rho_I(X^0) d\lambda(X^0) = \int_{[t_0, t_0+T] \times S} (\rho_I \circ \psi)(t, s) |\det(J(\psi)(t, s))| d\lambda(t, s), \quad (102)$$

où $J(\psi)$ est la matrice jacobienne de la fonction ψ .

Preuve.

- (i) On remarque que puisque ψ est 1-1, chaque point qui amène à une collision, $X^0 \in \mathcal{X}_T^{0t_c} \subset \mathbb{R}^n$ est transporté par $(\text{Id}_{\mathbb{R}} \times P) \circ \psi^{-1}$ sur la surface $\partial^c \mathcal{X}_R$ à une certaine date $\tau(X^0) \in (t_0, t_0 + T]$ et réciproquement puisque :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_T^{0t_c} \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi^{-1}} & [t_0, t_0 + T] \times S \\ X^0 & \longmapsto & (\tau(X^0), s(X^0)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{R}} \times P} & & [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n, \\ & \longmapsto & (\tau(X^0), X(\tau(X^0)|X^0)). \end{array}$$

Ainsi, nous avons $h_\tau = ((\text{Id}_{\mathbb{R}} \times P) \circ \psi^{-1})$ et en appliquant le Théorème 5 de l'Annexe E,

$$\int_{[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^n} 1_{A \times B}(t, X) d\mu_F = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{A \times B} \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}} \times P) \circ \psi^{-1}(X^0) d\mu_0.$$

- (ii) On utilise la formule de changement de variables de Jacobi [71, Chapitre 15], puisque ψ est un C^1 -difféomorphisme. Il est à noter que cette formule est obtenue en appliquant (191) avec $X = [t_0, t_0 + T] \times S$, $Y = \mathcal{X}_T^{0t_c}$, $g(\psi) = \rho_I(\psi) |\det(J(\psi))|$, $\mu = \lambda$ et en remarquant que

$d(\psi_*\mu) = d(\psi_*\lambda) = |\det(J(\psi^{-1}))| d\lambda$ [71, Remarque 15.10]. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{[t_0, t_0+T] \times S} (\rho_I \circ \psi)(t, s) |\det(J(\psi)(t, s))| d\lambda(t, s) = \int_{\mathcal{X}_T^{0t}} \rho_I(X^0) |\det(J(\psi)(\psi^{-1}(X^0)))| d\psi_*\lambda(X^0) = \\ & \int_{\mathcal{X}_T^{0t}} \rho_I(X^0) |\det(J(\psi)(\psi^{-1}(X^0)))| |\det(J(\psi^{-1})(X^0))| d\lambda(X^0) = \\ & \int_{\mathcal{X}_T^{0t}} \rho_I(X^0) |\det(J(\psi)(\psi^{-1}(X^0)))| |\det(J(\psi)(\psi^{-1}(X^0)))|^{-1} d\lambda(X^0) = \\ & \int_{\mathcal{X}_T^{0t}} \rho_I(X^0) d\lambda(X^0) = \int_{\mathcal{X}_T^{0t}} d\mu(X^0). \end{aligned}$$

Noter que $J(\psi)(\psi^{-1}(X^0))J(\psi^{-1})(X^0) = I_n$. □

Exemple 4.

Si la fonction d'évolution est linéaire, la fonction ψ est maintenant définie par $\psi : [t_0, t_0 + T] \times S \rightarrow \mathcal{X}_T^{0t_c}$, $\psi(t, s) = \Phi(t, t_0)^{-1}P(s)$.

Remarque 6.

L'Hypothèse 8 est équivalente aux Hypothèses (A1) et (A2) proposées dans l'article de Coppola et rappelées ci-dessous.

(A1) Une seule traversée.

(A2) Les trajectoires doivent traverser.

Le calcul de la Jacobienne ψ est donné par :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) = -D\varphi_t^{t_0}(P(s))f(t, P(s)) \in \mathbb{R}^{12}.$$

Cela vient de la différenciation par rapport à t de l'égalité $P(s) = \varphi_{t_0}^t(\psi(t, s))$ en appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{t_0}^t(\psi(t, s))) \\ &= \frac{\partial \varphi_{t_0}^t}{\partial t}(\psi(t, s)) + D\varphi_{t_0}^t(\psi(t, s)) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) \\ &= f(t, \varphi_{t_0}^t(\psi(t, s))) + D\varphi_{t_0}^t(\psi(t, s)) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) \\ &= f(t, P(s)) + (D\varphi_t^{t_0}(P(s)))^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s). \end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(t, s) = D\varphi_t^{t_0}(P(s)) \frac{\partial P(s)}{\partial s} \in \mathbb{R}^{12 \times 11}.$$

Ainsi

$$J(\psi)(t, s) = D\varphi_t^{t_0}(P(s)) \begin{bmatrix} -f(t, P(s)) \\ \frac{\partial P(s)}{\partial s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}. \quad (103)$$

Exemple 5.

Dans le cas des dynamiques linéaires, ces calculs deviennent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Phi^{-1}(t, t_0) \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \Phi^{-1}(t, t_0) P(s) = -\Phi^{-1}(t, t_0) A(t) P(s),$$

puisque $\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = A(t) \Phi(t, t_0)$. De plus, nous avons

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \Phi(t, t_0)^{-1} \frac{\partial P(s)}{\partial s},$$

et (103) devient

$$J(\psi) = \Phi^{-1}(t, t_0) \left(-A(t)P(s) \mid \frac{\partial P(s)}{\partial s} \right).$$

La matrice jacobienne dans le cas spécifique étudié par Coppola (Exemple 3(c)), est obtenue comme :

$$\frac{\partial P(s)}{\partial s} = \left(\begin{array}{cc|c} -R \sin(\theta) \sin(\phi) & R \cos(\theta) \cos(\phi) & 0_{3,9} \\ R \cos(\theta) \sin(\phi) & R \sin(\theta) \cos(\phi) & \\ \hline 0 & -R \sin(\phi) & I_9 \end{array} \right).$$

Du fait des blocs de 0 dans cette matrice, il est seulement nécessaire de calculer les trois premières coordonnées du vecteur $f(t, P(s))$ afin d'obtenir le déterminant de $J(\psi)$, et puisque $f(t, \cdot)$ fixe les dynamiques, on obtient :

$$f(t, P(s)) = (v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}, \dot{v}_{r1}, \dot{v}_{r2}, \dot{v}_{r3}, v_{p1}, v_{p2}, \dot{v}_{p1}, \dot{v}_{p2}, \dot{v}_{p3})^T \in \mathbb{R}^{12}.$$

Cela donne :

$$\det(J(\psi)(t, s)) = \begin{vmatrix} -v_{r1} & -R \sin(\theta) \sin(\phi) & R \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -v_{r2} & R \cos(\theta) \sin(\phi) & R \sin(\theta) \cos(\phi) \\ -v_{r3} & 0 & -R \sin(\phi) \end{vmatrix} \det(D\varphi_t^{t_0}(P(s))),$$

qui revient à :

$$\begin{aligned} \det(J(\psi)) &= R^2 \sin(\phi) (\cos(\theta) \sin(\phi) v_{r1} + \sin(\phi) \sin(\theta) v_{r2} + \cos(\phi) v_{r3}) \det(D\varphi_t^{t_0}(P(s))) \\ &= R^2 \sin(\phi) v_r \cdot \hat{n} \det(D\varphi_t^{t_0}(P(s))), \end{aligned} \tag{104}$$

où $\hat{n} = [\cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\phi)]^T$ est le vecteur unitaire normal à la sphère.

Exemple 6.

Pour les dynamiques linéaires, on peut facilement déduire que :

$$\det(J(\psi)) = \begin{vmatrix} -v_{r1} & -R \sin(\theta) \sin(\phi) & R \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -v_{r2} & R \cos(\theta) \sin(\phi) & R \sin(\theta) \cos(\phi) \\ -v_{r3} & 0 & -R \sin(\phi) \end{vmatrix} \det(\Phi^{-1}(t, t_0)),$$

et finalement

$$\begin{aligned}\det(J(\psi)) &= R^2 \sin(\phi) (\cos(\theta) \sin(\phi) v_{r1} + \sin(\phi) \sin(\theta) v_{r2} + \cos(\phi) v_{r3}) \det(\Phi^{-1}(t, t_0)) \\ &= R^2 \sin(\phi) v_r \cdot \hat{n} \det(\Phi^{-1}(t, t_0)).\end{aligned}\tag{105}$$

Maintenant, puisque ψ est 1-1, il est possible d'appliquer l'Equation (102) et d'obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_0 = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho_I(\psi(t, \theta, \phi, v_r, r_p, v_p)) |\det(D\varphi_t^{t_0}(P(t, \theta, \phi, v_r, r_p, v_p)))| 1_{v_r \cdot \hat{n} \leq 0}(v_r) |R^2 \sin(\phi) v_r \cdot \hat{n}| dv_p dr_p dv_r d\phi d\theta dt \tag{106}$$

Exemple 7.

Pour les dynamiques linéaires, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_0 = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho_I(\psi(t, \theta, \phi, v_r, r_p, v_p)) |\det(\Phi^{-1}(t, t_0))| 1_{v_r \cdot \hat{n} \leq 0}(v_r) |R^2 \sin(\phi) v_r \cdot \hat{n}| dv_p dr_p dv_r d\phi d\theta dt \tag{107}$$

Lemme 2.

Soit un vecteur aléatoire donné par X suivant une densité de probabilité ρ_X et un autre vecteur aléatoire Y lié au vecteur X par l'équation $y = g(x)$, avec g bijective. La densité de probabilité ρ_Y pour Y est :

$$\rho_Y(y) = \rho_X(g^{-1}(y)) |\det(J(g^{-1})(y))|. \tag{108}$$

Preuve.

Soit $\mathbb{P}(Y \in S)$ la probabilité que Y prenne une valeur dans le sous-ensemble S , telle que :

$$\mathbb{P}(Y \in S) = \int_S \rho_Y(y) dy.$$

Puisque Y prend une valeur dans S chaque fois que X prend une valeur dans $g^{-1}(S)$, on a :

$$\mathbb{P}(Y \in S) = \int_{g^{-1}(S)} \rho_X(x) dx.$$

Maintenant, le changement de variables x en y donne :

$$\mathbb{P}(Y \in S) = \int_{g^{-1}(S)} \rho_X(x) dx = \int_S \rho_X(g^{-1}(y)) |\det(J(g^{-1})(y))| dy.$$

□

Dans notre cas, si g est la fonction d'évolution $\varphi_t^{t_0}$, et ρ_I la densité de probabilité de l'état initial aléatoire X^0 , on obtient la densité de probabilité $\rho_t(X)$ de l'état aléatoire X en un temps fixé et donné t à partir de l'Equation (108) :

$$\rho_t(X) = \rho_I(\varphi_t^{t_0}(X)) |\det(D\varphi_t^{t_0}(X))|. \tag{109}$$

Exemple 8.

Dans le cas linéaire, la fonction d'évolution est donnée par $X^0 \mapsto \Phi(t, t_0)X^0$ et donc, la densité de probabilité $\rho_t(X)$ de l'état aléatoire X en un temps fixé et donné t est donnée par :

$$\rho_t(X) = \rho_I(\Phi^{-1}(t, t_0)X) |\det(\Phi^{-1}(t, t_0))|. \quad (110)$$

Des Equations (109) et (106), on a :

$$\mathcal{P}_I(T) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_0 = \int_{t=t_0}^{t_0+T} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{v_r=-\infty}^{\infty} \int_{r_p=-\infty}^{\infty} \int_{v_p=-\infty}^{\infty} \rho_t(P(\theta, \phi, v_r, r_p, v_p)) 1_{v_r \cdot \hat{n} \leq 0}(v_r) |R^2 \sin(\phi) v_r \cdot \hat{n}| dv_p dr_p dv_r d\phi d\theta dt. \quad (111)$$

Remarque 7.

L'Equation (111) est similaire à la formule (15) de l'article de Coppola, à deux différences près. Premièrement, la paramétrisation en coordonnées sphériques est différente, mais cela n'affecte absolument pas le résultat. Deuxièmement, il y a un abus de notations dans la formule (15) de l'article de Coppola, concernant la fonction densité de probabilité $\rho_t(X)$ qui apparait en lieu et place de celle utilisée dans notre formulation $\rho_t(P(s))$. Plus précisément, cela signifie que ρ_t est la densité de probabilité du vecteur d'état aléatoire X en chaque temps fixé t , mais cette fonction devrait avoir comme argument $P(s)$ (après reparamétrisation).

Il y a également un léger abus de notations dans ce document en ce qui concerne la définition de la fonction densité de probabilité $\rho_t(P(s))$ comme il est indiqué dans le Lemme 2 puisque le vecteur aléatoire et l'argument de la fonction densité de probabilité coïncident.

Nous passons à l'hypothèse suivante faite dans [26] :

Hypothèse 9 (Indépendance des deux vecteurs aléatoires x_p et x_s).

Le modèle dynamique et la fonction densité de probabilité de chaque objet sont indépendants de ceux de l'autre objet.

En gardant à l'esprit l'abus de notations mentionné dans la Remarque 7 et si $\rho_{tps}(x_p, x_s)$, $\rho_{tp}(x_p)$, $\rho_{ts}(x_s)$ représentent respectivement les fonctions de densité conjointes des vecteurs aléatoires $X^T = [x_p^T \ x_s^T]$, x_p et x_s respectivement alors l'Hypothèse 9 signifie que :

$$\rho_{tps}(x_p, x_s) = \rho_{tp}(x_p)\rho_{ts}(x_s). \quad (112)$$

Cela implique que la densité $\rho_t(P(s)) = \rho_t(x_r(\theta, \phi, v_r), x_p)$ vérifie :

$$\rho_t(x_r, x_p) = \rho_{tps}(x_p, x_s) = \rho_{tp}(x_p)\rho_{ts}(x_p + x_r), \quad (113)$$

où $x_r = x_s - x_p$ est l'état relatif sur la sphère de rayon R . Cela peut être démontré en notant que $X_{rp} = \begin{bmatrix} x_r \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_6 & I_6 \\ I_6 & 0_{6,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix}$ et en appliquant le Lemme 2. Ainsi, l'Equation (106) devient :

$$\mathcal{P}_I(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\sin(\phi)| \int_{-\infty}^{\infty} R^2 |v_r \cdot \hat{n}| 1_{v_r \cdot \hat{n} \leq 0}(v_r) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{tp}(x_p)\rho_{ts}(x_p + x_r) dv_p dr_p dv_r d\phi d\theta dt \quad (114)$$

L'hypothèse suivante de [26] est liée à la nature gaussienne nature des deux fonctions densités des vecteurs aléatoires x_p et x_s .

Hypothèse 10 (Distributions gaussiennes.).

Les fonctions de densité de probabilité $\rho_{tp} \sim \mathcal{N}(m_p(t), P_p(t))$ et $\rho_{ts} \sim \mathcal{N}(m_s(t), P_s(t))$ restent gaussiennes en tout temps $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Il est ainsi possible de déduire que $x_r = x_s - x_p \sim \mathcal{N}(m_s(t) - m_p(t), \underbrace{P_p(t) + P_s(t)}_{P_r(t)})$.

Soient les matrices suivantes :

$$G^{-1} = P_p^{-1} + P_s^{-1}, \quad T = GP_s^{-1}, \quad (115)$$

où G est une matrice symétrique semidéfinie positive. Soit le vecteur aléatoire $w = x_p + Tx_r$. En se rappelant que :

$$\begin{aligned} \rho_{tp}(x_p) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^6} \sqrt{\det(P_p)}} e^{-\frac{1}{2}(x_p - m_p)^T P_p^{-1} (x_p - m_p)}, \\ \rho_{ts}(x_s) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^6} \sqrt{\det(P_s)}} e^{-\frac{1}{2}(x_s - m_s)^T P_s^{-1} (x_s - m_s)}, \end{aligned} \quad (116)$$

alors la relation

$$\rho_t(x_r, x_p) = \rho_{tp}(x_p) \rho_{ts}(x_p + x_r) = \rho_t(w, x_r) = \rho_{tw}(w) \rho_{tr}(x_r), \quad (117)$$

est obtenue après quelques manipulations algébriques pour lesquelles les identités suivantes sont utilisées :

$$\begin{aligned} TP_s T^T + (I_6 - T)P_p(I_6 - T)^T &= GT^T + G(I_6 - T)^T = G, \\ \det(P_p) \det(P_s) &= \det(P_p P_s) = \det(GP) = \det(G) \det(P), \end{aligned} \quad (118)$$

et :

$$\begin{aligned} \rho_{tw} &\sim \mathcal{N}(m_p(t) + T \underbrace{(m_s(t) - m_p(t))}_{m_r(t)}, G(t)), \\ \rho_{tr} &\sim \mathcal{N}(m_r(t), P_r(t)). \end{aligned} \quad (119)$$

L'Equation (117) montre que les vecteurs aléatoires $w = x_p + Tx_r$ et x_r sont indépendants. Ainsi, nous avons que :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I(T) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin(\phi)| \int_{-\infty}^{\infty} R^2 |v_r \cdot \hat{n}| \mathbf{1}_{v_r \cdot \hat{n} \leq 0}(v_r) \rho_{tr}(x_r) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{tw}(w) dw}_{=1} dv_r d\phi d\theta dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin(\phi)| \int_{-\infty}^{\infty} R^2 |v_r \cdot \hat{n}| \mathbf{1}_{v_r \cdot \hat{n} \leq 0}(v_r) \rho_{tr}(x_r(\theta, \phi, v_r)) dv_r d\phi d\theta dt. \end{aligned} \quad (120)$$

L'étape suivante consiste à partitionner le vecteur moyenne $m_r(t) = \begin{bmatrix} m_{r_r}(t) \\ m_{v_r}(t) \end{bmatrix}$ et la matrice de

covariance $P_r(t)$ comme $P_r(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$ conduisant à :

$$\begin{aligned} P_r^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} P_{11}^{-1}(t) + P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t)\Delta^{-1}(t)P_{12}^T(t)P_{11}^{-1}(t) & -P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t)\Delta^{-1}(t) \\ -\Delta^{-1}(t)P_{12}^T(t)P_{11}^{-1}(t) & \Delta^{-1}(t) \end{bmatrix}, \\ \Delta(t) &= P_{22}(t) - P_{12}^T(t)P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t). \end{aligned}$$

En conséquence, nous avons que :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(x_r - m_r)^T P_r^{-1}(x_r - m_r) &= -\frac{1}{2}(r_r - m_{r_r})^T P_{11}^{-1}(r_r - m_{r_r}) \dots \\
&= -\frac{1}{2}(\cdot)^T \Delta^{-1} \underbrace{\left(v_r - P_{12}^T P_{11}^{-1} r_r - (m_{v_r} - P_{12}^T P_{11}^{-1} m_{r_r}) \right)}_{v' - m'_{v'}}, \\
&= -\frac{1}{2}(r_r - m_{r_r})^T P_{11}^{-1}(r_r - m_{r_r}) - \frac{1}{2}(v' - m'_{v'})^T \Delta^{-1}(v' - m'_{v'}),
\end{aligned}$$

et $\rho_{tr}(x_r) = \rho_{tr}(r_r)\rho_{tv'}(v')$ avec :

$$\begin{aligned}
\rho_{tr} &\sim \mathcal{N}(m_{r_r}(t), P_{11}(t)), \\
\rho_{tv'} &\sim \mathcal{N}(m'_{v'}(t), \Delta(t)).
\end{aligned} \tag{121}$$

De plus, $|v_r \cdot \hat{n}| = |v'(t) \cdot \hat{n} + R\hat{n}^T P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t)\hat{n}| = |v'(t) \cdot \hat{n} + R\hat{n}^T P_{12}^T(t)P_{11}^{-1}(t)\hat{n}| = |v'(t) \cdot \hat{n} + \epsilon_0(\hat{n}, t)|$, où $\epsilon_0(\hat{n}, t) = R\hat{n}^T P_{12}^T(t)P_{11}^{-1}(t)\hat{n}$ et nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_I(T) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 |\sin(\phi)| \rho_{tr}(r_r) \cdot \\
&\quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |v'(t) \cdot \hat{n} + \epsilon_0(\hat{n}, t)| \mathbb{1}_{v'(t) \cdot \hat{n} + \epsilon_0(\hat{n}, t) \leq 0}(v') \rho_{tv'}(v') dv'}_{I(\hat{n}, t)} d\phi d\theta dt.
\end{aligned} \tag{122}$$

Le vecteur unitaire normal à la sphère \hat{n} est défini par $\hat{n} = [\cos(\theta) \sin(\phi) \quad \sin(\phi) \sin(\theta) \quad \cos(\phi)]^T$ et la matrice orthogonale \bar{T} donnée par :

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\phi) \end{bmatrix}, \tag{123}$$

est telle que $\vec{i} = [1 \quad 0 \quad 0]^T = \bar{T}\hat{n}$. Avec les notations :

$$\begin{aligned}
v''(t) &= \bar{T}v'(t) = \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}, \\
m''_{v'}(t) &= \bar{T}m'_{v'}(t) = \begin{bmatrix} m_\epsilon(t) \\ m_\zeta(t) \end{bmatrix}, \\
\bar{\Delta}(\theta, \phi, t) &= \bar{T}\Delta(t)\bar{T}^T = \begin{bmatrix} \sigma^2(\theta, \phi, t) & \bar{\Delta}_{12}(t) \\ \bar{\Delta}_{12}^T(t) & \bar{\Delta}_{22}(t) \end{bmatrix}, \\
\sigma^2(\theta, \phi, t) &= \hat{n}^T (P_{22}(t) - P_{12}^T(t)P_{11}(t)^{-1}P_{12}(t))\hat{n},
\end{aligned} \tag{124}$$

nous avons que $\rho_{tv'}(v') = \rho_{tv''}(v'')$ avec $v'' \sim \mathcal{N}(m''_{v'}(t), \bar{\Delta}(t))$ et des calculs algébriques directs conduisent à $\rho_{tv''}(v'') = \rho_{t\epsilon}(\epsilon)\rho_{t\zeta}(\zeta)$ avec :

$$\begin{aligned}
\epsilon &\sim \mathcal{N}(m_\epsilon, \sigma^2), \\
\zeta &= \zeta - \frac{\epsilon \bar{\Delta}_{12}^T}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}\left(m_\zeta - \frac{m_\epsilon \bar{\Delta}_{12}^T}{\sigma^2}, \bar{\Delta}_{22} - \frac{\bar{\Delta}_{12}^T \bar{\Delta}_{12}}{\sigma^2}\right).
\end{aligned}$$

Il est à noter que $m_\epsilon(\theta, \phi, t) = \hat{n}^T(m_{v_r} - P_{12}^T(t)P_{11}^{-1}(t)m_{r_r}) = \vec{i}^T m_v''(t)$. On en déduit que,

$$\begin{aligned}
I(\hat{n}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} |v'(t) \cdot \hat{n} + \epsilon_0(\hat{n}, t)| \mathbf{1}_{v'(t) \cdot \hat{n} + \epsilon_0(\hat{n}, t) \leq 0}(v') \rho_{tv'}(v') dv', \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\epsilon(t) + \epsilon_0(\hat{n}, t)| \mathbf{1}_{\epsilon + \epsilon_0(\hat{n}, t) \leq 0}(\epsilon) \rho_{tv''}(v'') d\bar{\zeta} d\epsilon, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\epsilon(t) + \epsilon_0(\hat{n}, t)| \mathbf{1}_{\epsilon + \epsilon_0(\hat{n}, t) \leq 0}(\epsilon) \rho_{t\epsilon}(\epsilon) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{t\bar{\zeta}}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}}_1 d\epsilon, \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{-\epsilon_0(\hat{n}, t)} (\epsilon(t) + \epsilon_0(\hat{n}, t)) e^{-\frac{(\epsilon - m_\epsilon)^2}{2\sigma^2}} d\epsilon,
\end{aligned} \tag{125}$$

puisque $v'(t) \cdot \hat{n} = v''(t) \cdot \bar{T}\hat{n} = v''(t) \cdot \vec{i}$. Finalement, en reprenant la définition de la fonction erreur :

$$\begin{aligned}
\text{erf} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,
\end{aligned} \tag{126}$$

l'intégrale $I(\hat{n}, t)$ peut être calculée comme :

$$I(\hat{n}, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\epsilon_0(\hat{n}, t) + m_\epsilon)^2}{2\sigma^2}} - \frac{(m_\epsilon + \epsilon_0(\hat{n}, t))}{2} \left[1 - \text{erf} \left(\frac{m_\epsilon + \epsilon_0(\hat{n}, t)}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right], \tag{127}$$

et la probabilité $\mathcal{P}_I(T)$ est finalement obtenue comme :

$$\mathcal{P}_I(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 |\sin(\phi)| \rho_{tr}(r_r(\theta, \phi)) I(\hat{n}, t) d\phi d\theta dt. \tag{128}$$

4.2 Dérivation de la formule classique en rencontre courte

La première hypothèse supplémentaire, nécessaire pour l'obtention de la formule 2D est l'hypothèse 3.

Cette hypothèse est clairement mathématiquement non réaliste puisque, même si le vecteur position relative en $t = t_0$, $r_r(t_0)$ est un vecteur aléatoire et le vecteur de vitesse relative en $t = t_0$, $v_r(t_0)$, est déterministe, le vecteur de vitesse relative en tout $t > t_0$ sera un vecteur aléatoire $v_r(t)$ du fait de l'interconnexion entre r_r et v_r (à moins que la fonction d'évolution $\varphi_{t_0}^t$ n'ait une structure particulière) dans les dynamiques relatives. Néanmoins, on peut espérer que l'incertitude propagée affectant le vecteur de vitesse relative sera suffisamment petite pour être considérée comme négligeable.

L'hypothèse 3 implique tout d'abord que la matrice $P_{12} = 0$. Cela implique que $\epsilon_0(\hat{n}, t) = 0$ et donc que $v_r = v'$ et $m_\epsilon = \hat{n} \cdot m_{v_r} = \hat{n} \cdot v_r$. A partir de l'Equation (127), nous obtenons que :

$$I(\hat{n}, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_\epsilon^2}{2\sigma^2}} - \frac{m_\epsilon}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{m_\epsilon}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]. \quad (129)$$

Si v_r est un vecteur déterministe, ϵ est une variable déterministe également puisque $\epsilon(t) = \hat{n} \cdot v'(t) = \hat{n} \cdot v_r(t)$ et sa variance $\sigma \rightarrow 0^+$. Dans l'Equation (129), nous avons :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} I(\hat{n}, t) = \begin{cases} -\hat{n} \cdot v_r & \text{si } \hat{n} \cdot v_r \leq 0 \\ 0 & \text{si } \hat{n} \cdot v_r > 0. \end{cases} \quad (130)$$

De l'Equation (128), la probabilité $\mathcal{P}_I(T)$ devient :

$$\mathcal{P}_I(T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin(\phi) \rho_{tr}(r_r(\theta, \phi)) 1_{\hat{n} \cdot v_r(t) \leq 0}(\theta, \phi, t) (\hat{n} \cdot v_r(t)) d\phi d\theta dt. \quad (131)$$

Afin d'enlever la fonction $1_{\hat{n} \cdot v_r(t) \leq 0}(\epsilon)$ dans l'intégrande de (131), on peut modifier les limites d'intégration de l'hémisphère où $\hat{n} \cdot v_r(t) \leq 0$. En choisissant des axes dépendants de τ pour les coordonnées sphériques pour lesquelles l'axe x est aligné avec le vecteur $v_r(\tau)$ où τ est la date de premier contact, nous obtenon la formule suivante :

$$\mathcal{P}_I(T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^\pi R^2 \sin(\phi) \rho_{tr}(r_r(\theta, \phi)) (\hat{n} \cdot v_r(t)) d\phi d\theta dt. \quad (132)$$

Il est important de noter que $r_r(\theta, \phi)$ dans (131) est exprimé dans la base originale alors que $r_r(\theta, \phi)$ est exprimé dans la nouvelle base pour laquelle l'axe x est aligné avec le vecteur $v_r(\tau)$. La géométrie du domaine hémisphérique d'intégration pour les rencontres obéissant aux Hypothèses 1-5 est illustré à la Figure 18.

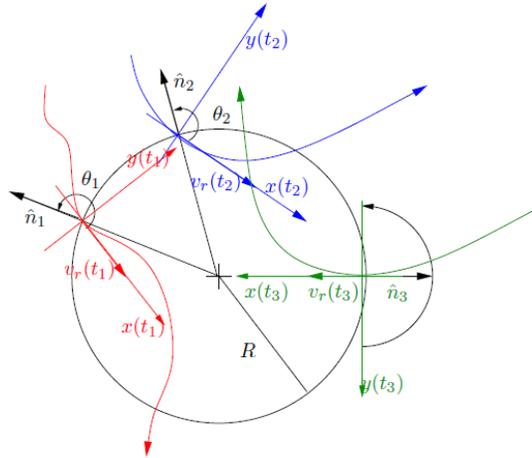


FIGURE 18 – Illustration en 2D de trois collisions en t_1 , t_2 et t_3 avec l'hémisphère d'intégration pour t_3 .

Comme il est clairement indiqué par la terminologie rencontre *court terme*, l'hypothèse suivante repose sur la courte durée supposée de la rencontre et rejoint l'hypothèse 6 de la Section 2.1.1. Il est important de noter que la formulation des différentes hypothèses données dans la littérature peut sensiblement différer entraînant ainsi des différences d'interprétations ainsi que des conséquences différentes sur leurs conséquences.

Hypothèse 11 (Durée de rencontre courte). .

L'intervalle de rencontre $[t_0, t_0 + T]$ est suffisamment petit pour que le mouvement relatif soit rectiligne.

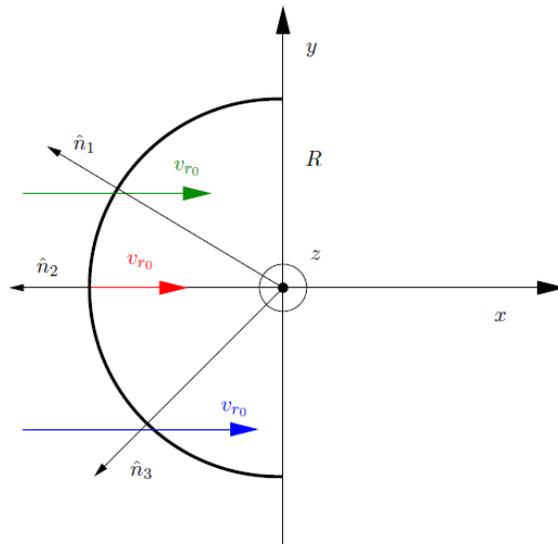


FIGURE 19 – Trois collisions dans le plan (x, y) avec une vitesse relative déterministe et rectiligne v_{r0} .

L'hypothèse 11 a un impact important sur la structure du champ de vecteurs relatif f_r qui doit satisfaire $f_r = [v_{r0} \ 0]^T$ quand il n'y a pas d'incertitude sur la vitesse relative. La solution d'état

relative est donc définie par :

$$\begin{aligned} r_r(t) &= v_{r_0}(t - t_0) + r_{r_0} \\ v_r(t) &= v_{r_0}, \end{aligned} \quad (133)$$

où v_{r_0} est un vecteur déterministe. On en déduit facilement que la trajectoire relative est caractérisée par un vecteur moyen $m_{r_r}(t) = E[r_r(t)] = m_{r_0} + v_{r_0}(t - t_0)$. Cela implique également que la trajectoire relative a une matrice de covariance constante $P_{11}(t) = E[(r_r(t) - m_{r_r}(t))(r_r(t) - m_{r_r}(t))^T] = P_{11}(t_0)$. On peut remarquer que la nature temps-invariante de la matrice de covariance du vecteur aléatoire $r_r(t)$ se déduit des hypothèses plutôt qu'elle ne constitue une partie *a priori* des hypothèses elles-mêmes comme cela est improprement présenté dans la référence [26].

En conservant à l'esprit que le repère de rencontre a été chois tel que $v_{r_0} = \|v_{r_0}\|\vec{i}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_{r_1}(t) &= m_{r_1}(0) + \|v_{r_0}\|(t - t_0) \\ m_{r_2}(t) &= m_{r_2}(0) \\ m_{r_3}(t) &= m_{r_3}(0). \end{aligned} \quad (134)$$

De plus, le produit scalaire présent dans (132) peut être littéralement calculé comme $\hat{n} \cdot v_r(t) = \hat{n} \cdot v_{r_0} = \|v_{r_0}\| \cos(\theta) \sin(\phi)$. En appliquant le Corollaire 1 à (132) avec $h : [0, \pi] \times [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow \overline{B}(0, R)$, $(\phi, \theta) \mapsto (r_{r_2}, r_{r_3})$, $\det(Dh(\phi, \theta)) = R^2 \sin^2(\phi) \cos(\theta)$ et $g = \rho_{tr}$, nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I(T) &= - \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^\pi \|v_{r_0}\| R^2 \sin^2(\phi) \cos(\theta) \rho_{tr}(r_r(\theta, \phi)) d\phi d\theta dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^\pi \|v_{r_0}\| \rho_{tr}(r_r(\theta, \phi)) |\det(Dh(\phi, \theta))| d\phi d\theta dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \iint_{\overline{B}(0, R)} \|v_{r_0}\| \rho_{tr}(r_r(r_{r_2}, r_{r_3})) dr_{r_2} dr_{r_3} dt, \end{aligned} \quad (135)$$

où $r_r(r_{r_2}, r_{r_3}) = [r_{r_1}(r_{r_2}, r_{r_3}) \quad r_{r_2} \quad r_{r_3}]^T$ et $r_{r_1}(r_{r_2}, r_{r_3}) = -\sqrt{R^2 - r_{r_2}^2 - r_{r_3}^2}$. L'Equation (135) est équivalente à l'Equation (28) dans [1] avec $T \rightarrow \infty$ and $t_0 \rightarrow -\infty$.

A ce stade, on sait que $r_r \sim \mathcal{N}(m_{r_r}, P_{11}(t_0))$. On en déduit que l'idée déjà utilisée précédemment avec P_r et consistant à construire une transformation linéaire L à partir de la partition de $P_{11}(t_0)$ peut être de nouveau appliquée. Avec la partition suivante de $P_{11}(t_0)$, la transformation linéaire L est donnée comme :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\varpi^T P_{r_{r_2} r_{r_3}}^{-1} \\ 0_{2,1} & I_2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad P_{11}(t_0) = \begin{bmatrix} \eta^2 & \varpi^T \\ \varpi & P_{r_{r_2} r_{r_3}} \end{bmatrix}.$$

En appliquant L au vecteur aléatoire $r_r - m_{r_r}$, nous obtenons :

$$L(r_r - m_{r_r}) = \left[\frac{r_{r_1} - \varpi^T P_{r_{r_2} r_{r_3}}^{-1} \begin{bmatrix} r_{r_2} \\ r_{r_3} \end{bmatrix} - \left(m_{r_1} - \varpi^T P_{r_{r_2} r_{r_3}}^{-1} \begin{bmatrix} m_{r_2} \\ m_{r_3} \end{bmatrix} \right)}{\begin{matrix} r_{r_2} - m_{r_2} \\ r_{r_3} - m_{r_3} \end{matrix}} \right] := \left[\frac{\bar{r}_{r_1} - \bar{m}_{r_1}}{\varsigma - m_\varsigma} \right].$$

Nous avons également :

$$L P_{11}(t_0) L^T = \begin{bmatrix} \eta^2 - \varpi^T P_{r_{r_2} r_{r_3}}^{-1} \varpi & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & P_{r_{r_2} r_{r_3}} \end{bmatrix} \quad (136)$$

et $\det(P_{11}(t_0)) = \eta^2 \varpi^T P_{r_{r_2} r_{r_3}}^{-1} \varpi \cdot \det(P_{r_{r_2} r_{r_3}})$. La densité normale ρ_{tr} peut alors être factorisée comme : $\rho_{tr}(r_r) = \rho_{t\bar{r}_{r_1}}(\bar{r}_{r_1})\rho_\zeta(\zeta)$ où :

$$\rho_{t\bar{r}_{r_1}} \sim \mathcal{N}(\bar{m}_{r_1}, \eta^2 - \varpi^T P_{r_{r_2} r_{r_3}}^{-1} \varpi), \quad \rho_\zeta \sim \mathcal{N}(m_\zeta, P_{r_{r_2} r_{r_3}}). \quad (137)$$

Il est à noter que la densité normale ρ_ζ ne dépend pas du temps puisque m_ζ (à partir de (134)) et $P_{r_{r_2} r_{r_3}}$ sont constantes. Alors, la probabilité $\mathcal{P}_I(T)$ devient :

$$\mathcal{P}_I(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \iint_{\bar{B}(0,R)} \|v_{r_0}\| \rho_{tr}(r_r) dr_{r_2} dr_{r_3} dt = \iint_{\bar{B}(0,R)} \rho_\zeta(\zeta) \int_{t_0}^{t_0+T} \|v_{r_0}\| \rho_{t\bar{r}_{r_1}}(\bar{r}_{r_1}(t)) dt d\zeta. \quad (138)$$

Dans la Formule (138), la variable r_{r_1} apparaissant dans \bar{r}_{r_1} doit vérifier $r_{r_1} = -\sqrt{R^2 - r_{r_2}^2 - r_{r_3}^2}$ afin de correspondre à l'hémisphère d'intégration décrit à la Figure 19. La dernière étape afin d'obtenir la formule classique de la probabilité de collision 2D (voir [20], [1] ou [74]) consiste en le changement de variables final $\chi = \bar{m}_{r_1} - \bar{r}_{r_1}$ appliqué à l'intégrale interne portant sur le temps et en l'extension des bornes temporelles d'intégration à l'infini.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \|v_{r_0}\| \rho_{t\bar{r}_{r_1}}(\bar{r}_{r_1}(t)) dt \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} \|v_{r_0}\| \rho_{t\bar{r}_{r_1}}(\bar{r}_{r_1}(t)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\chi(\chi) d\chi = 1, \quad (139)$$

où $\rho_\chi \sim \mathcal{N}(0, \eta^2 - \varpi^T P_{yz}^{-1} \varpi)$.

La dernière hypothèse relative aux limites d'intégration temporelle est connue comme *Time integrates out* et est qualifiée d'étrange dans [26]. Nous sommes d'accord avec ce qualificatif puisque la formulation même de cette hypothèse « l'intervalle temporel d'intégration est suffisamment long pour autoriser l'approximation de l'intégrale temporelle (139) par 1 mais pas trop long pour violer l'hypothèse de rencontre courte » semble contenir une contradiction en les termes. Finalement, la formule classique de la probabilité de collision 2D, l'intégrale double d'une densité gaussienne sur le disque de rayon R , est obtenue comme :

$$\mathcal{P}_I(T) = \frac{1}{2\pi \det(P_\zeta)} \iint_{\bar{B}(0,R)} \exp\left[-\frac{1}{2}(\zeta - m_\zeta)^T P_\zeta^{-1}(\zeta - m_\zeta)\right] d\zeta. \quad (140)$$

Remarque 8.

Il est important de mentionner que M.R. Akella et K.T. Alfriend [1] sont les premiers auteurs ayant donné les relations entre l'intégrale 2D de (140) et une intégrale 3D contenant la matrice de covariance de la position relative ainsi qu'une intégration temporelle masquée par l'intégration sur vecteur de vitesse relative (dont la direction est perpendiculaire au plan de rencontre). Cet article étend les résultats préliminaires donnés par Z.N. Khutorovsky [42] exprimant la probabilité de collision comme une fonction du temps sous l'hypothèse que la taille du primaire est beaucoup plus faible que l'incertitude de position du secondaire.

5 Une méthode alternative pour les rencontres lentes

5.1 Introduction

On rappelle dans un premier temps que la probabilité de collision est donnée comme suit :

$$\mathcal{P}_c([t_0, t_0 + T]) = \mathcal{P}_c(T, t_0) = \mathbb{P}(x_r^0 \in \mathcal{X}_T^0) = \mu_I(\mathcal{X}_T^0) = \int_{\mathcal{X}_T^0} d\mu_I, \quad (141)$$

où \mathcal{X}_T^0 est l'ensemble de toutes les conditions initiales relatives générant une collisions dans l'intervalle de temps $t \in [t_0, t_0 + T]$. Si la distribution de ces conditions initiales relatives est supposée être gaussienne de densité $\rho_I \sim \mathcal{N}(m_I, P_I)$ alors le calcul de la probabilité de collision $\mathcal{P}_c([t_0, t_0 + T])$ se ramène au calcul de l'intégrale :

$$\mathcal{P}_c([t_0, t_0 + T]) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(P_I)}} \int_{\mathcal{X}_T^0} e^{-\frac{1}{2}(x_r - m_I)^T P_I^{-1} (x_r - m_I)} dx_r. \quad (142)$$

Premièrement, il est nécessaire de caractériser plus précisément l'ensemble \mathcal{X}_T^0 sur lequel est faite l'intégration. En se souvenant des définitions données dans la Section 1 de ce rapport, une illustration simple des points formant cet ensemble est présenté à la Figure 20.

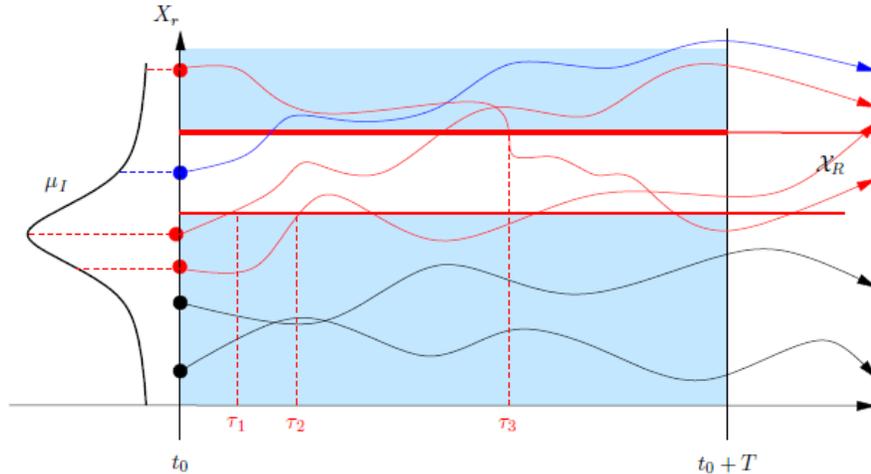


FIGURE 20 – Illustration en 1-D de la construction de \mathcal{X}_T^0 pour $t_{TCA} = t_0$ - points bleus : $\tau = t_{TCA}$, points rouges : $\tau > t_{TCA}$, points noirs : $\nexists \tau \in [t_0, t_0 + T] \mid x_r(\tau|x_r^0) \in \mathcal{X}_T^0$.

Ces points sont définis par $x_r^0 = \varphi_t^{t_0}(x_r(\tau|x_r^0))$ où $\varphi_t^{t_0}$ est la fonction d'évolution inverse des dynamiques relatives et τ est la première date de contact (c.-à-d. $x_r(\tau|x_r^0) \in \partial\mathcal{X}_R$). L'idée est donc de construire l'ensemble \mathcal{X}_T^0 en propageant dans le futur et dans le passé (s'il est nécessaire et suivant la date choisie $t_{TCA} \in [t_0, t_0 + t_{TCA}]$) tous les états relatifs $x_r(t|x_r^0)$ de l'ensemble \mathcal{X}_R pour chaque date $t \in [t_0, t_0 + t_{TCA}]$. La Figure 21 décrit un exemple de la construction de cet ensemble \mathcal{X}_T^0 pour une région interdite sphérique \mathcal{X}_R et des dynamiques relatives linéaires.

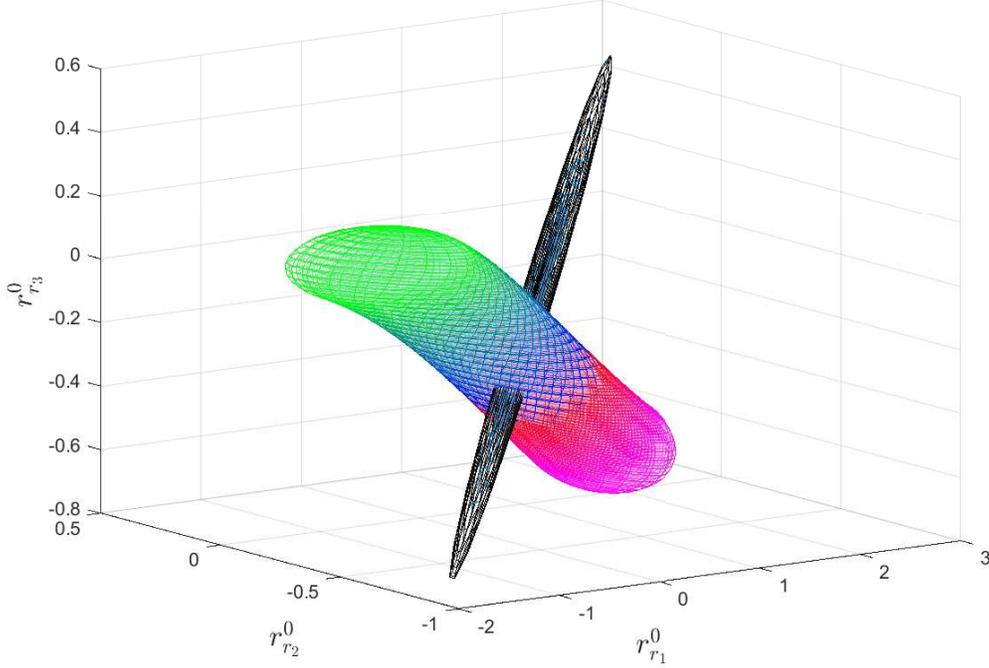


FIGURE 21 – Ellipsoïde à $4\text{-}\sigma$ de la densité gaussienne (en noir) et \mathcal{X}_T^0 à la TCA : rouge ($t_0 \leq t \leq t_{TCA}$) - bleu ($t = t_{TCA}$) - vert ($t_{TCA} < t \leq t_0 + T$).

En pratique, l'ensemble sur lequel doit être calculée l'intégration est très difficile à caractériser analytiquement, et différentes simplifications ont été faites dans la littérature comme cela a été évoqué dans les sections précédentes. Nous détaillons maintenant les simplifications nécessaires à la méthode alternative :

- La région interdite \mathcal{X}_R a une forme simple. Par exemple, dans le cas de deux objets, elle décrit le fait que la distance relative entre eux est plus faible qu'un certain rayon donné R . Il est alors supposé que \mathcal{X}_R est un ensemble semi-algébrique réel basique (décrit par une séquence finie d'inégalités polynomiales).
- Comme il a été vu précédemment, les dynamiques relatives sont usuellement simplifiées. Dans ce qui suit, nous considérons deux objets, dont la fonction d'évolution relative est linéaire et inversible et la solution de l'équation dynamique relative est connue par la donnée d'une certaine matrice de transition d'état $\Phi(\cdot, t_0) : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^6$, telle que :

$$x_r(t|x_r^0) = \Phi(t, t_0)x_r^0, \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T].$$

Dans ce cadre et en se fondant sur les deux hypothèses précédentes, nous proposons de calculer l'intégrale (142) en deux étapes principales :

1. **Représentation implicite du domaine d'intégration par un ensemble de sur-niveau polynomial.** Le domaine d'intégration \mathcal{X}_T^0 (voir l'Equation (10)) est approximé par un ensemble de sur-niveau polynomial (PSS) [28] (voir également [40, 51] pour des travaux similaires ainsi que [18, Chap. 3, p. 75] pour la définition d'un ensemble de sur-niveau (superlevel set)). Plus précisément, supposons que \mathcal{X}_T^0 peut être borné extérieurement pas un hyper-

rectangle $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{X}_T^0$, avec

$$\mathcal{B} = [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n, a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^n. \quad (143)$$

Définition 5 (Ensemble de sur-niveau polynomial).

Un ensemble de sur-niveau polynomial (PSS) pour \mathcal{X}_T^0 est défini par un polynôme $p_d \in \mathbb{R}[x]_d$, tel que :

$$\mathcal{X}_T^0 \subseteq \text{PSS}_{p_d} := \{x \in \mathcal{B} : p_d(x) \geq 1\}. \quad (144)$$

Noter que dans cette définition, la notation usuelle x pour l'indéterminée du polynôme est utilisée (de même que dans la Section 5.2 alors qu'elle sera notée x_r au besoin, pour l'état relatif). Nous espérons que le contexte sera suffisamment clair pour éviter toute confusion.

Le polynôme p_d définissant l'approximation PSS peut être vu comme une approximation de la fonction indicatrice $1_{\mathcal{X}_T^0}$ de l'ensemble \mathcal{X}_T^0 . Comme il est montré dans [28], de telles approximations peuvent être obtenues en résolvant un problème d'optimisation convexe dont les contraintes sont des inégalités matricielles linéaires (LMIs). De plus, quand le degré d'approximation d augmente, la séquence $(p_d)_{d \geq 1}$ converge en norme \mathcal{L}^1 , presque uniformément et presque partout vers la fonction indicatrice de l'ensemble \mathcal{X}_T^0 . Les approximations d'ensemble données par la méthode de [28] peuvent être vues comme une généralisation directe des approximations ellipsoïdales classiques, puisque si des approximations du second degré sont utilisées, nous retrouvons exactement les approches bien connues par optimisation SDP (voir par exemple [18, Chap. 8, pp. 410-414] et [17, Section 3.7]).

2. **Une quadrature d'ordre élevé pour les volumes implicitement défini par un ensemble de sur-niveau polynomial.** Pour p_d fixé, l'intégrale (142) est approximée par :

$$\mathcal{P}_c([t_0, t_0 + T]) \leq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(P_I)}} \int_{\text{PSS}_{p_d}} e^{-\frac{1}{2}(x_r - m_I)^T P_I^{-1} (x_r - m_I)} dx_r. \quad (145)$$

Plusieurs méthodes existent pour calculer l'intégrale d'une densité gaussienne multivariée (de dimension n), où le domaine d'intégration est implicitement défini par un polynôme [47, 40, 50]. Toutefois, une analyse correcte du compromis entre complexité et précision est plus difficile, plus spécifiquement dans notre cas puisque, en pratique, la dimension n est au moins égale à 3. Dans ce but, pour $n = 3$, un schéma d'intégration par une quadrature de Gauss adaptative, fondé sur le travail présenté dans [68] a été considéré. En convertissant la géométrie définie implicitement en le graphe d'une fonction niveau définie implicitement, il est possible d'obtenir un algorithme récursif sur le nombre de dimensions spatiales ne nécessitant que le calcul d'une racine en dimension 1 et une quadrature de Gauss en une seule dimension. Ce schéma de quadrature produit des poids strictement positifs et hérite de la précision d'ordre supérieur de la quadrature gaussienne. Pour $n = 6$, un échantillonnage classique de Monte-Carlo est utilisé, mais des méthodes plus sophistiquées sont également à l'étude.

Dans une série d'articles [22, 23], K. Chan a tenté de trouver une description adéquate du volume des états initiaux (à une date fixée t_0) conduisant à une collision durant l'intervalle de temps donné $[t_0, T + t_0]$. Il a ainsi compris que la sphère combinée (de rayon R) est transformée en un volume non sphérique à chaque instant t , résultant sur l'intervalle de temps, en une union de volumes non sphériques et non disjoints, dénommé "*derived ellipsoid*", puisque, pour des dynamiques relatives linéarisées sans incertitudes de vitesse, la sphère combinée est transformée en un ellipsoïde pour chaque t (voir la Section 5.3.2 pour plus de détails). Le volume complet obtenu sur l'intervalle de

temps complet, union de ces ellipsoïdes, est également appelé le *swept-volume*. Cette dénomination a principalement été utilisée dans le cas d'un mouvement relatif rectilinéaire, quand la sphère combinée transformée balaye un volume s'apparentant à un cylindre orienté le long de la direction de la vitesse relative.

Ainsi, pour des raisons de simplicité évidentes, l'ensemble \mathcal{X}_T^0 sera appelé *swept-volume*, même dans le cas général d'un mouvement relatif non rectilinéaire, quand ce volume est non convexe ou pour des dimensions plus élevées (quand par exemple, les positions et vitesses relatives sont incertaines et donc le volume est de dimension 6 et non nécessairement compact). Dans les travaux de Chan ainsi que plus récemment dans les travaux des auteurs de [81], un swept-volume défini par une union d'ellipsoïdes est caractérisé par son enveloppe. Celle-ci est calculée numériquement dans le cas à 3 dimensions, ou avec une méthode *ad-hoc*, avec de multiples et triviales simplifications pour les cas de dimensions plus faibles. Toutefois, une méthode générale reposant à la fois sur une caractérisation efficace du swept-volume (quand sa forme n'est pas trivialement réduite à un cylindre) et sur le calcul de l'intégrale d'une densité gaussienne sur ce volume n'existe pas dans la littérature à notre connaissance.

Il est à noter également qu'une classe de méthodes différentes, consistant à utiliser une autre stratégie pour traiter la complexité de la forme de l'ensemble \mathcal{X}_T^0 , peut constituer une alternative : au lieu de considérer l'image du corps combiné par l'inverse de la fonction d'évolution à un instant t_0 , il s'agit de propager l'incertitude initiale (on définit la mesure image de la mesure gaussienne en t_0 par la fonction d'évolution). Cela correspond grossièrement à faire un changement de variable dans l'intégrale (142). La propagation en avant de l'incertitude est utilisée dans la méthode de Coppola [26] ou dans la méthode des cylindres/parallépipèdes adjacents [6, 8]. Sans entrer dans les détails, il est important de noter que ces méthodes fonctionnent seulement si l'hypothèse de l'existence d'une bijection entre l'ensemble \mathcal{X}_T^0 et son image par la fonction d'évolution, durant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$. En particulier, cela implique que les rencontres répétées (quand t dans l'Equation (10) n'est pas unique) ne peuvent être traitées par ce biais.

La formulation proposée dans ce rapport, issue du cadre de l'optimisation polynomiale, possède l'avantage de fournir des descriptions approchées et sous forme close de l'ensemble des états de collision \mathcal{X}_T^0 , qui peuvent être effectivement utilisées pour les conjonctions à long terme et répétées. De fait, même une sur-approximation précise visuelle de \mathcal{X}_T^0 peut fournir des renseignements importants et pratiques sur le type des rencontres étudiées. Par exemple, une forme cylindrique droite pourrait confirmer la nature rapide de la rencontre. L'approximation PSS permet de représenter des formes fortement non convexes ainsi qu'elle facilite une analyse plus poussée des rencontres dites long terme. Le fait de disposer d'une approximation PSS de \mathcal{X}_T^0 confère également l'avantage supplémentaire de disposer d'une représentation implicite de *tous* les états de collision et en retour, de faciliter l'évaluation directe de l'intégrale (145), sans la nécessité d'introduire des hypothèses additionnelles sur la propagation de l'incertitude ou sur la nature répétée des rencontres. Cette méthode traite les cas pratiques sans avoir recours à l'Hypothèse 8 : *chaque trajectoire issue d'une condition initiale entre dans la région interdite à une date spécifique unique* et qui est nécessaire pour les méthodes précédentes comme celle de [26], ou celle des cylindres/parallépipèdes adjacents d'Alfano [6].

Dans un premier temps, nous rappelons la modélisation mathématique et la solution numérique présentées dans [28, 40, 51]. Dans un second temps, ces résultats doivent être adaptés à notre cadre d'étude qui vise l'approximation du *swept-volume*. Noter que, sans perte de généralité, $t_{TCA} = t_0$ dans la suite puisque les algorithmes proposés sont facilement modulables pour des cas différents où $t_0 < t_{TCA} < t_0 + T$.

5.2 Approximations PSS des ensembles semi-algébriques bornés

Soit l'ensemble semi-algébrique \mathcal{K} décrit par les polynômes réels multivariés $g_i \in \mathbb{R}[x]_{d_i}$:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (146)$$

et un ensemble enveloppant $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{K}$ comme dans l'Equation (143). Nous sommes intéressés par le calcul des coefficients de la séquence $(p_d)_{d \geq 1}$ de sur-approximations polynomiales $p_d \in \mathbb{R}[x]_d$, de la fonction indicatrice $1_{\mathcal{K}}$, dans le sens où l'ensemble polynomial de sur-niveau (PSS)

$$\text{PSS}_{p_d} := \{x \in \mathcal{B} : p_d(x) \geq 1\},$$

converge fortement vers \mathcal{K} quand $d \rightarrow \infty$.

5.2.1 Formulation par un problème d'optimisation polynomiale

Une telle séquence peut être trouvée en considérant le problème d'optimisation suivant, pour d fixé :

$$\begin{aligned} w_d^* = \quad & \inf_{p \in K[x]_d} \|p\|_1, \\ & \text{t.q. } p \geq 0 \text{ sur } \mathcal{B}, \\ & p \geq 1 \text{ sur } \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (147)$$

Afin d'être complet, il est à noter que le problème est très étroitement lié à celui du calcul du volume de l'ensemble semi-algébrique \mathcal{K} . Plus précisément, il est possible de considérer le problème suivant de programmation linéaire en dimension infinie, défini sur le cône des mesures positives :

$$\begin{aligned} v^* = \quad & \sup_{\mu_0, \hat{\mu}_0} \mu_0(\mathcal{B}), \\ & \mu_0 + \hat{\mu}_0 = \lambda_{\mathcal{B}}, \\ & \text{supp}(\mu_0) \subseteq \mathcal{K}, \\ & \text{t.q. } \text{supp}(\hat{\mu}_0) \subseteq \mathcal{B}, \\ & \mu_0, \hat{\mu}_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (148)$$

où $\lambda_A = \text{vol}(A)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble $A \subset \mathcal{B}$. Une interprétation en est que l'on recherche à maximiser la masse de la mesure positive μ_0 dont le support est inclus dans \mathcal{K} et qui est dominée par la mesure de Lebesgue $\lambda_{\mathcal{B}}$ sur \mathcal{B} . Cela se traduit en une contrainte égalité en introduisant la variable d'écart $\hat{\mu}_0$ telle que $\mu_0 + \hat{\mu}_0 = \lambda_{\mathcal{B}}$. La deuxième et troisième contraintes assurent que le support des mesures respectives est dans le domaine admissible \mathcal{K} et \mathcal{B} respectivement. Les dernières contraintes imposent que μ_0 et $\hat{\mu}_0$ sont des mesures non négatives (voir [11] pour des développements similaires et des détails supplémentaires).

Il est démontré dans [28, 40] que le supremum du Problème (148) est atteint et que $v^* = \text{vol}(\mathcal{K})$. De plus, l'infimum du Problème (147) est atteint en un polynôme $p_d^* \in \mathbb{R}[x]_d$, avec $\text{PSS}_{p_d^*} \supseteq \mathcal{K}$, $w_{d+1}^* \leq w_d^*$ et $\lim_{d \rightarrow \infty} w_d^* = \text{vol}(\mathcal{K})$.

5.2.2 Une hiérarchie LMI pour le calcul de PSS

Dans cette section, les détails élémentaires concernant le calcul numérique de la solution du Problème (147) (ou de son Problème dual (148)) sont rappelés. Ce matériel est plus ou moins standard dans le domaine de *l'optimisation polynomiale* [49].

Le but de la résolution du Problème (147), est de déterminer un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]_d$ tel que :

- p est positif sur \mathcal{B} ,

- $p - 1$ est positif sur \mathcal{K} .

Afin d'obtenir un problème traitable numériquement, la positivité est assurée en imposant au polynôme d'être une somme de carrés (Sum Of Squares - SOS). $\Sigma^2[x] \subset \mathbb{R}[x]$ et $\Sigma^2[x]_{2k} \subset \mathbb{R}[x]_{2k}$, sont respectivement les notations pour le cône convexe des polynômes réels qui sont SOS et son sous-cône des polynômes SOS de degré au plus $2k$. En utilisant la Positivstellensatz de Putinar [48, 62, 49], le Problème (147) devient :

$$\begin{aligned}
w^*_{2\ell,d} &= \inf_{p \in \mathbb{R}[x]_d} \int_{\mathcal{B}} p(x) dx, \\
&\text{t.q.} \\
&\left. \begin{aligned}
p - \sigma_{0,\mathcal{B}} - \sum_{1 \leq j \leq n} (x_j - a_j)(b_j - x_j) \sigma_{j,\mathcal{B}} &= 0 \\
\sigma_{0,\mathcal{B}} &\in \Sigma^2[x]_{2\ell}, \\
\sigma_{j,\mathcal{B}} &\in \Sigma^2[x]_{2(\ell-1)}, \quad \forall j = 1, \dots, n,
\end{aligned} \right\} p \geq 0 \text{ sur } \mathcal{B} \\
&\left. \begin{aligned}
p - \sigma_{0,\mathcal{K}} - \sum_{1 \leq j \leq m} g_j \sigma_{j,\mathcal{K}} &= 1 \\
\sigma_{0,\mathcal{K}} &\in \Sigma^2[x]_{2\ell}, \\
\sigma_{j,\mathcal{K}} &\in \Sigma^2[x]_{2(\ell - \lceil d_j/2 \rceil)}, \quad \forall j = 1, \dots, m,
\end{aligned} \right\} p \geq 1 \text{ sur } \mathcal{K},
\end{aligned} \tag{149}$$

si $\ell \in \mathbb{N}$ est fixé.

Le Problème (149) peut être maintenant résolu de manière efficace :

- la fonction objectif $\int_{\mathcal{B}} p(x) dx = \sum_{0 \leq |i| \leq d} p_i \int_{\mathcal{B}} x^i dx$ est une fonction linéaire des coefficients p_i du polynôme p , alors que les intégrales concernées et définies sur la boîte \mathcal{B} peuvent être effectivement calculées et sont les moments de degré au plus d de la mesure de Lebesgue sur \mathcal{B} .
- Les contraintes peuvent être formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). C'est une stratégie classique et plusieurs outils logiciels sont disponibles afin de modéliser les problèmes de cette forme (voir par exemple la boîte à outil Matlab® YALMIP [54]).
- Cela revient à résoudre un problème SDP (tant que les degrés d et ℓ sont fixés).

Il peut être démontré que pour $\ell \rightarrow \infty$, la valeur optimale du Problème (149) converge vers w_d^* et de plus que, pour tout $2\ell \geq d$, la solution $p_{2\ell,d}^*$ du Problème (149) satisfait les contraintes du Problème (147) c.-à-d., $\text{PSS}_{p_{2\ell,d}^*}$ est une approximation PSS de \mathcal{K} .

Remarque 9 (Résolution numérique et améliorations possibles).

Pour chaque d et ℓ fixés, le Problème (149) peut être écrit comme un programme SDP, qui est un problème d'optimisation convexe conique pouvant être résolu efficacement (en un temps polynomial en ses entrées) avec une précision arbitraire fixée. Des solveurs numériques tels que Mosek [56] sont ainsi dédiés à la résolution de ces problèmes. Toutefois, quand la hiérarchie complète de relaxations est résolue c.-à-d., d augmente à chaque étape, la convergence observée est lente. Cela est principalement dû au phénomène de Gibbs, puisque le polynôme $p_{2\ell,d}^$ approxime la fonction indicatrice discontinue $1_{\mathcal{K}}$. Les travaux dans [40, 51] proposent des améliorations sur ce point et la mise en œuvre pratique de la méthode peut être modifiée en conséquence.*

Décrivons maintenant comment calculer des approximations PSS du *swept-volume*.

5.3 Les approximations PSS du swept-volume en dynamique relative

Nous rappelons que le swept-volume est défini comme l'ensemble de *toutes les conditions initiales* $x_r^0 \in \mathbb{R}^n$ qui conduisent à au moins une collision durant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$. Quand deux objets sont en jeu et si la solution de la dynamique relative est connue à travers la donnée de la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$, on obtient :

- Les positions et vitesses relatives sont données à n'importe quelle date t par $x_r(t|x_r^0) = \Phi(t, t_0)x_r^0$, avec $x_r^0 \in \mathbb{R}^6$;
- La région de collision est définie simplement par $\mathcal{X}_R := \{r_r \in \mathbb{R}^3 : R^2 - r_r^T r_r \geq 0\}$;

Ainsi, l'Equation (10) définissant le swept-volume \mathcal{X}_T^0 devient :

$$\mathcal{X}_T^0 = \left\{ x_r^0 \in \mathbb{R}^6 : \exists t \in [t_0, t_0 + T] \text{ t.q. } R^2 - x_r^{0T} \Phi(t, t_0)^T I_{11} \Phi(t, t_0) x_r^0 \geq 0 \right\}, \quad (150)$$

où la matrice $I_{11} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est définie par $I_{11} := \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nécessaire ici du fait que seules les positions (3 premières coordonnées de $x_r(t|x_r^0)$) à chaque date t sont contraintes à appartenir à \mathcal{X}_R .

La principale idée est de décrire le *swept-volume* \mathcal{X}_T^0 par des contraintes semi-algébriques qui peuvent être ensuite approximées par la PSS, comme nous l'avons montré dans la Section 5.2. Puisque \mathcal{X}_R est un ensemble semi-algébrique basique, plusieurs options sont possibles afin de rester dans ce cadre de travail : (1) obtenir une matrice de transition polynomiale *approchée* $\Phi(t, t_0)$ – une approximation univariée en la variable t , ce qui signifie que $x_r(t|x_r^0)$ est un vecteur de polynômes en les variables t, x_r^0 ; ou (2) considérer une discrétisation suffisamment fine de taille N , $\tau_N := \{t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq \dots \leq t_0 + T\}$. Cela implique que $x_r(t_i|x_r^0)$ est linéaire en x_r^0 pour chaque valeur fixée t_i de la grille. Seule la seconde option est présentée dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité d'implémentation.

5.3.1 Les approximations PSS des discrétisations du swept-volume

Lors de la discrétisation temporelle, un sous-ensemble $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{X}_T^0$ de contrainte correspondant à chaque t_i est donné par :

$$\mathcal{K}_i := \{x_r^0 \in \mathbb{R}^6 : R^2 - x_r^{0T} \Phi(t_i, t_0)^T I_{11} \Phi(t_i, t_0) x_r^0 \geq 0\}. \quad (151)$$

Cette discrétisation fournit une description approchée de \mathcal{X}_T^0 comme une union d'ensembles semi-algébriques basiques :

$$\bigcup_{i=1, \dots, N} \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{X}_T^0. \quad (152)$$

Les ensembles \mathcal{K}_i se caractérisent par le fait qu'ils ne sont, en général, ni disjoints ni compacts.

Le fait qu'ils ne soient pas disjoints n'est pas, en soi, un problème pour la méthode PSS. Il est d'ailleurs important d'insister sur le fait que l'hypothèse *d'une seule traversée* c.-à-d., il n'existe qu'un seul t_i correspondant à chaque x_r^0 conduisant à une collision, n'est pas nécessaire pour cette méthode.

Toutefois, le fait que les ensembles \mathcal{K}_i ne sont pas nécessairement compacts doit être traité en tant que tel.

Calcul de la boîte \mathcal{B} . Une solution directe consiste à utiliser le fait que l'approximation PSS calculée pour $\bigcup_{i=1, \dots, N} \mathcal{K}_i$ va constituer le volume d'intégration de la densité gaussienne multivariée.

Ainsi et en fonction des nécessités numériques, on peut choisir un ellipsoïde à h - σ défini par la matrice de covariance P_I (par exemple $h = 8.5$ en pratique) et borné par un hyper-rectangle \mathcal{B} . De fait, chacun des ensembles $\bar{\mathcal{K}}_i = \mathcal{K}_i \cap \mathcal{B}$ pour $i = 1, \dots, N$ est compact.

Approximation PSS pour le swept-volume en 6 dimensions. Le problème d'optimisation à résoudre est ainsi le suivant :

Problème 2 (Calcul de l'approximation PSS pour le swept-volume).

Soient l'ensemble semi-algébrique $\bar{\mathcal{K}} = \bigcup_{i=1, \dots, N} \bar{\mathcal{K}}_i$ constitué comme l'union des N ensembles semi-algébriques basiques compacts $\bar{\mathcal{K}}_i$, un hyper-rectangle donné $\mathcal{B} \supseteq \bar{\mathcal{K}}$ et un degré fixé d . Il s'agit de résoudre le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} w_{d, \bar{\mathcal{K}}}^* &= \inf_{p \in K[x_r^0]_d} \|p\|_1, \\ & p \geq 0 \text{ sur } \mathcal{B}, \\ \text{t.q.} & p \geq 1 \text{ sur } \bar{\mathcal{K}}_1, \\ & \dots, \\ & p \geq 1 \text{ sur } \bar{\mathcal{K}}_N. \end{aligned} \tag{153}$$

Les principaux résultats théoriques établissant les propriétés de ce problème d'optimisation sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 2.

L'infimum du Problème (153) est atteint pour un polynôme $p_{d, \bar{\mathcal{K}}}^* \in \mathbb{R}[x_r^0]_d$. De plus, $\text{PSS}_{p_{d, \bar{\mathcal{K}}}^*} \supseteq \bar{\mathcal{K}}$, $w_{d+1, \bar{\mathcal{K}}}^* \leq w_{d, \bar{\mathcal{K}}}^*$ et $\lim_{d \rightarrow \infty} w_{d, \bar{\mathcal{K}}}^* = \text{vol}(\bar{\mathcal{K}})$.

Preuve. La preuve est similaire à celle donnée dans [28, Thm. 2]. Il est à noter également qu'une preuve similaire, se fondant sur le problème dual (154) défini dans l'espace des mesures positives, se trouve dans [51].

$$\begin{aligned} v_{d, \bar{\mathcal{K}}}^* &= \sup_{\mu_1, \dots, \mu_N} \sum_{i=1}^N \mu_i(\mathcal{B}), \\ & \sum_{i=1}^N \mu_i \leq \lambda_{\mathcal{B}}, \\ \text{t.q.} & \text{supp}(\mu_i) \subseteq \bar{\mathcal{K}}_i, i = 1, \dots, N \\ & \mu_i \geq 0, i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{154}$$

□

Formulation comme un problème SOS. Nous procédons de manière similaire à ce qui a été fait dans la Section 5.2.2. Concernant les contraintes définissant les ensembles $\bar{\mathcal{K}}_i$:

$$\bar{\mathcal{K}}_i := \{x_r^0 \in \mathbb{R}^6 : g_i(x_r^0) \geq 0, g_{j, \mathcal{B}} \geq 0, j = 1, \dots, 6\}, i = 1, \dots, N, \tag{155}$$

où le polynôme g_i est obtenu à partir de l'Equation (151),

$$g_i(x_r^0) := R^2 - x_r^{0T} \Phi(t_i, t_0)^T I_{11} \Phi(t_i, t_0) x_r^0, i = 1, \dots, N, \tag{156}$$

et les $g_{j, \mathcal{B}}$ définissent les contraintes formant l'hyper-rectangle \mathcal{B} ,

$$g_{j, \mathcal{B}}(x_r^0) := (x_{rj}^0 - a_j)(b_j - x_{rj}^0), j = 1, \dots, 6. \tag{157}$$

Il s'en suit que le Problème (153) peut être numériquement résolu par la formulation SOS suivante :

$$\begin{aligned}
w^*_{2\ell,d,\bar{\mathcal{K}}} &= \inf_{p \in \mathbb{R}[x_r^0]_d} \int_{\mathcal{B}} p(x_r^0) dx_r^0, \\
&\text{t.q.} \\
&\left. \begin{aligned}
p - \sigma_{0,\mathcal{B}} - \sum_{1 \leq j \leq 6} g_{j,\mathcal{B}} \sigma_{j,\mathcal{B}} &= 0 \\
\sigma_{0,\mathcal{B}} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2\ell}, \\
\sigma_{j,\mathcal{B}} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \quad \forall j = 1, \dots, 6,
\end{aligned} \right\} p \geq 0 \text{ sur } \mathcal{B} \\
&\dots \\
&\left. \begin{aligned}
p - \sigma_{0,\mathcal{K}_1} - g_1 \sigma_{1,\mathcal{K}_1} - \sum_{1 \leq j \leq 6} g_{j,\mathcal{B}} \sigma_{1,j,\mathcal{B}} &= 1 \\
\sigma_{0,\mathcal{K}_1} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2\ell}, \\
\sigma_{1,\mathcal{K}_1} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \\
\sigma_{1,j,\mathcal{B}} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \quad \forall j = 1, \dots, 6,
\end{aligned} \right\} p \geq 1 \text{ sur } \bar{\mathcal{K}}_1, \\
&\dots \\
&\left. \begin{aligned}
p - \sigma_{0,\mathcal{K}_N} - g_N \sigma_{N,\mathcal{K}_N} - \sum_{1 \leq j \leq 6} g_{j,\mathcal{B}} \sigma_{N,j,\mathcal{B}} &= 1 \\
\sigma_{0,\mathcal{K}_N} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2\ell}, \\
\sigma_{N,\mathcal{K}_N} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \\
\sigma_{N,j,\mathcal{B}} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \quad \forall j = 1, \dots, 6,
\end{aligned} \right\} p \geq 1 \text{ sur } \bar{\mathcal{K}}_N.
\end{aligned} \tag{158}$$

Proposition 5 (Convergence de la hiérarchie LMI).

Pour chaque $d \in \mathbb{N}$ fixé, la valeur optimale du Problème (158) converge vers $w^*_{d,\bar{\mathcal{K}}}$ quand $\ell \rightarrow \infty$. De plus, pour tout $2\ell \geq d$, la solution $p^*_{2\ell,d,\bar{\mathcal{K}}}$ du Problème (149) est une solution réalisable du Problème (153) c.-à-d., $\text{PSS}_{p^*_{2\ell,d,\bar{\mathcal{K}}}}$ est une approximation PSS de $\bar{\mathcal{K}}$.

Preuve. La preuve est donnée dans [51]. □

Avant d'entrer dans les détails de l'implémentation du Problème (158), il est intéressant de discuter d'une simplification importante en pratique qui suppose que l'incertitude affectant la vitesse relative peut être négligée sur l'intervalle de temps de la rencontre $[t_0, t_0 + T]$.

5.3.2 Cas sans incertitude sur la vitesse

Se placer dans le cas où l'on néglige les incertitudes affectant la vitesse relative implique de faire les simplifications suivantes :

- L'intégrale de l'Equation (142) est une intégrale en 3 dimensions.
- Le swept-volume \mathcal{X}_T^0 ne concerne que les positions relatives puisque les vitesses relatives sont supposées être exactement connues. En conséquence, des calculs directs permettent d'obtenir les caractérisations suivantes du swept-volume.

Proposition 6 (Swept-volume pour une dynamique relative linéaire et pas d'incertitude sur la vitesse relative).

Soit le vecteur d'état relatif $x_r^0 \in \mathbb{R}^6$ défini par $x_r^0 := (r_r^{0T}, v_r^{0T})^T$, où $v_r^0 \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur donné déterministe. Soit la matrice de transition d'état de la dynamique relative $\Phi(t, t_0)$ donnée par blocs par $\Phi := \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}$. On suppose que $\Phi_{11}(t, t_0)$ est inversible pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Le swept-volume comprenant toutes les positions relatives $r_r^0 \in \mathbb{R}^3$, conduisant à une collision sur l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$, est décrit par une union d'ellipsoïdes,

$$\mathcal{X}_{rT}^0 = \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \mathcal{E}_{t, t_0},$$

avec

$$\mathcal{E}_{t, t_0} := \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : R^2 - (r_r^0 - c(t, t_0))^T Q(t, t_0)^{-1} (r_r^0 - c(t, t_0)) \geq 0\}, \quad (159)$$

où

$$\begin{aligned} c(t, t_0) &= -\Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t, t_0) v_r^0, \\ Q(t, t_0) &= \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{11}(t, t_0)^{-T}. \end{aligned} \quad (160)$$

Preuve. Il suffit d'introduire les termes déterministes connus dans l'Equation (150). \square

Remarque 10 (Le swept-volume comme ensemble compact).

Si la matrice $\Phi_{11}(t, t_0)$ est inversible pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, chaque ellipsoïde \mathcal{E}_{t, t_0} est propre ($Q(t, t_0)$ est une matrice de rang plein) et leur union est donc un ensemble compact. Dans le cas contraire, le swept-volume peut toujours être décrit par l'union de formes quadratiques propres non nécessaires.

Avoir la compacité du swept-volume est un avantage dans le sens qu'il est directement borné sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à des intersections supplémentaires avec un h - σ -ellipsoïde de la distribution gaussienne.

Proposition 7 (Calcul direct de la boîte enveloppante).

On suppose que $\Phi_{11}(t, t_0)$ est inversible pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$. Alors, l'ensemble \mathcal{X}_{rT}^0 de la Proposition 6 est inclus dans la boîte $\mathcal{B}_r^0 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_r^0 = \left[\min_{t \in [t_0, t_0 + T]} (c(t, t_0) - \delta(t, t_0)), \max_{t \in [t_0, t_0 + T]} (c(t, t_0) + \delta(t, t_0)) \right], \quad (161)$$

où $\delta(t, t_0)$, est le vecteur composé des racines carrées des éléments diagonaux de la matrice $\frac{1}{R^2} Q(t, t_0)$ et les min et max sont définis composante par composante.

Preuve. Chaque ellipsoïde de l'Equation (159) peut être vu comme une transformation affine de la boule unité. Ainsi, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, on obtient :

$$r_r^0(t, t_0) - c(t, t_0) = \frac{1}{R} \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} y, \text{ avec } y \in \mathbb{R}^3, \|y\|_2 \leq 1,$$

d'où l'on calcule un encadrement composante par composante en prenant la norme 2 de chaque ligne de la matrice $\frac{1}{R} \Phi_{11}(t, t_0)^{-1}$. \square

Dans ce cadre simplifié, l'Algorithme 6 décrit comment calculer une approximation PSS pour le swept-volume. Sa construction est directement obtenue des Propositions 6, 7 et 5.

Pour le cas général en dimension 6, un algorithme identique peut être construit. Il consiste à résoudre le Problème 158, en y ajoutant la nécessité de disposer en entrée d'une boîte compacte de sur-approximation. Comme il a été déjà mentionné, elle peut être construite à partir des ensembles de niveau de la covariance de la distribution gaussienne dans l'Equation (142).

Algorithme 6 PSSAPPROX3D($\tau_N, \Phi(t, t_0), v_r^0, R, d, l$)

Entrée: grille temporelle τ_N , $\Phi(t, t_0)$ avec le bloc (1, 1) inversible pour $t \in \tau_N$, vecteur vitesse initiale relative $v_r^0 \in \mathbb{R}^3$, rayon R , degrés $2\ell \geq d$, $d \geq 1$.

Sortie: $p_d \in \mathbb{R}[x]_d$ est une approximation PSS de l'ensemble de collision discrétisé c.-à-d.,

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : p_d(x) \geq 1\} \supseteq \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in \tau_N, \text{ t.q. } x_r^0 = [r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T, \\ x_r^{0T} \Phi(t, t_0)^T I_{11} \Phi(t, t_0) x_r^0 \leq R^2\}.$$

▷ Définir des ellipsoïdes $\mathcal{E}_{t_i, t_0} := \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : R^2 - (r_r^0 - c(t_i, t_0))^T Q(t_i, t_0)^{-1} (r_r^0 - c(t_i, t_0)) \geq 0\}$

1: $c(t_i, t_0) \leftarrow -\Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t_i, t_0) v_r^0$, pour $t_i \in \tau_N$;

2: $Q(t_i, t_0) \leftarrow \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-T}$, pour $t_i \in \tau_N$;

▷ Trouver une boîte $\mathcal{B}_r := \{x \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b\}$

3: $\delta(t_i, t_0) \leftarrow \sqrt{\text{diag}(\frac{1}{R^2} Q(t_i, t_0))}$, pour $t_i \in \tau_N$;

4: $[a, b] \leftarrow \left[\min_{t_i \in \tau_N} (c(t_i, t_0) - \delta(t_i, t_0)), \max_{t_i \in \tau_N} (c(t_i, t_0) + \delta(t_i, t_0)) \right]$;

▷ Résoudre le problème d'optimisation

5: $g_{t_i} \leftarrow R^2 - (x - c(t_i, t_0))^T Q(t_i, t_0)^{-1} (x - c(t_i, t_0))$ pour $t_i \in \tau_N$;

6: $g_{j, \mathcal{B}_r^0} \leftarrow (x_j - a_j)(b_j - x_j)$, pour $j = 1, 2, 3$;

$$w_{*2\ell, d} = \min_{p \in \mathbb{R}[x]_d} \int_{\mathcal{B}_r^0} p(x) dx, \quad \text{t.q.} \quad \left. \begin{aligned} p - \sigma_{0, \mathcal{B}_r^0} - \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{j, \mathcal{B}_r^0} \sigma_{j, \mathcal{B}_r^0} &= 0 \\ \sigma_{0, \mathcal{B}_r^0} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2\ell}, \\ \sigma_{j, \mathcal{B}_r^0} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} p \geq 0 \text{ sur } \mathcal{B}_r^0 \quad (162)$$

$$\left. \begin{aligned} p - \sigma_{0, t_i} - g_{t_i} \sigma_{1, t_i} &= 1 \\ \sigma_{0, t_i} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2\ell}, \\ \sigma_{1, t_i} &\in \Sigma^2[x_r^0]_{2(\ell-1)}, \end{aligned} \right\} p \geq 1 \text{ sur chaque ellipsoïde } \mathcal{E}_{t_i, t_0}, \text{ pour } t_i \in \tau_N.$$

7: **retourne** $p_{2\ell, d}^* = \text{Argmin}$ (162)

5.4 Intégration d'une gaussienne sur un volume implicitement défini par un polynôme

Il a déjà été mentionné dans la Section 5.2.1 que le problème consistant à déterminer une approximation PSS est étroitement relié à celui du calcul du volume d'un ensemble semi-algébrique. En fait, le Problème 148 (et de manière identique le Problème 154) peut être modifié afin que sa valeur optimale soit le volume calculé par rapport à la mesure gaussienne initiale notée μ_0 dans l'Equation (142), plutôt que par rapport à la mesure de Lebesgue classique (cf. [51]) :

$$v_{\text{Gauss}}^* = \sup_{\mu_0, \hat{\mu}_0} \mu_0(\mathcal{K}), \quad \begin{aligned} \mu_0 + \hat{\mu}_0 &= \mu_g, \\ \text{t.q. } \text{supp}(\mu_0) &\subseteq \mathcal{K}, \\ \mu_0, \hat{\mu}_0 &\geq 0. \end{aligned} \quad (163)$$

En comparaison du Problème 148, cette formulation demande le calcul des moments de la mesure gaussienne, alors que seuls les moments de la mesure de Lebesgue sur un hyper-rectangle donné

étaient nécessaires précédemment. En pratique, des problèmes numériques plus aigus sont rencontrés quand on s'attaque directement à la résolution du Problème 163 en lieu et place de la résolution du Problème 148. Il a donc été décidé de garder la résolution du Problème 154 pour le calcul d'une approximation PSS pour ensuite utiliser d'autres méthodes de calcul de la restriction de la densité gaussienne à l'approximation PSS obtenue.

Deux stratégies ont été développées jusqu'à présent :

- **Le cas 3D** : une fois l'Algorithme 6 exécuté, le polynôme obtenu $p_{2\ell,d}^*$ fournit une représentation implicite du volume approximé. Ceci est utilisé comme une entrée de [68, Algorithme 3], qui détermine automatiquement une quadrature numérique précise d'ordre élevé pour l'évaluation des intégrales sur des volumes dont la géométrie est définie implicitement par un ensemble de niveau fixé d'une fonction lisse $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dans notre cas, nous avons $\phi = p_{2\ell,d}^*$.
- **Le cas 6D** : de manière similaire, après la résolution du Problème 158 pour un $p_{2\ell,d}^*$ optimal, l'intégrale d'une distribution gaussienne sur le volume PSS $_{p_{2\ell,d}^*}$ est évaluée par une méthode

de tirage de Monte Carlo qui revient à l'évaluation de $\frac{\sum_{i=1}^{N_s} 1_{\text{PSS}_{p_{2\ell,d}^*}}(X_{s,i})}{N_s}$. Cela consiste à simplement tester si $p_{2\ell,d}^*(X_{s,i}) \geq 1$ pour chaque échantillon $X_{s,i}$.

5.5 Implémentation numérique détaillée

Pour le cas 6D, qui est plus général, un certain nombre de détails d'implémentation sont donnés dans les Algorithmes 7, 8 et 9. Spécifiquement, toutes les contraintes sont mises à l'échelle dans le cube unité $[-1, 1]^6$, dans les Algorithmes 7 et 8, assurant ainsi une qualité numérique bien meilleure des résultats numériques. Cette étape, certes fastidieuse mais nécessaire, est donnée pour disposer d'une solution complète. Une preuve de correction est donnée ci-dessous.

Algorithme 7 FINDPOSBOUNDBOX($\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R$)

Entrée: grille temporelle τ_N , $\Phi(t, t_0)$ avec les blocs (1, 1) et (1, 2) inversibles pour $t \in \tau_N$, un vecteur vitesse relative moyenne initiale donné $m_{v_r}^0 \in \mathbb{R}^3$ et une matrice $Q_{v_r}^0$ pour l'ellipsoïde à 6- σ , un rayon R .

Sortie: $[a_r^0, b_r^0] := \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : a \leq r_r^0 \leq b\} \supseteq \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in \tau_N, \text{t.q.}$

$$x_r^0 := [r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T \in \mathbb{R}^6, (v_r^0 - m_{v_r}^0)^T Q_{v_r}^{0^{-1}} (v_r^0 - m_{v_r}^0) \leq 1, \\ x_r^{0T} \Phi(t, t_0)^T I_{11} \Phi(t, t_0) x_r^0 \leq R^2\}.$$

- 1: $c(t_i, t_0) \leftarrow -\Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t_i, t_0) m_{v_r}^0$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 2: $Q(t_i, t_0) \leftarrow \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1T}$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 3: $\delta_1(t_i, t_0) \leftarrow \sqrt{\text{diag2vec}(\frac{1}{R^2} Q(t_i, t_0))}$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 4: **si** $Q_{v_r}^0 \neq 0$ **alors**
 - 5: $q(t_i, t_0) \leftarrow \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t_i, t_0) Q_{v_r}^0 \Phi_{12}(t_i, t_0)^T \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-T}$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 6: $\delta_2(t_i, t_0) \leftarrow \sqrt{\text{diag2vec}(q(t_i, t_0))}$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 7: **sinon**
 - 8: $q(t_i, t_0) \leftarrow 0$;
 - 9: $\delta_2(t_i, t_0) \leftarrow 0$;
 - 10: **fin si**
 - 11: $[a_r^0, b_r^0] \leftarrow \left[\min_{t_i \in \tau_N} (c(t_i, t_0) - \delta_1(t_i, t_0) - \delta_2(t_i, t_0)), \max_{t_i \in \tau_N} (c(t_i, t_0) + \delta_1(t_i, t_0) + \delta_2(t_i, t_0)) \right]$;
 - 12: **retourne** $[a_r^0, b_r^0]$.
-

Algorithme 8 SCALECONSTRAINSUNITCUBE($\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R$)

Entrée: grille temporelle τ_N , $\Phi(t, t_0)$ avec les blocs (1, 1) et (1, 2) inversibles pour $t \in \tau_N$, un vecteur vitesse relative moyenne initiale donné $m_{v_r}^0 \in \mathbb{R}^3$ et une matrice $Q_{v_r}^0$ pour l'ellipsoïde à $6\text{-}\sigma$, un rayon R .

Sortie: Des contraintes polynomiales pour l'ensemble $\{x_r^0 = [r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T \in \mathbb{R}^6 : \exists t \in \tau_N, \text{t.q.}$

$x_r^{0T} \Phi(t, t_0)^T I_{11} \Phi(t, t_0) x_r^0 \leq R^2, (v_r^0 - m_{v_r}^0)^T Q_{v_r}^{0-1} (v_r^0 - m_{v_r}^0) \leq 1\}$ mis à l'échelle dans l'hypercube unité $[-1, 1]^6$.

- ▷ Trouver une boîte pour les positions $[a_r^0, b_r^0] := \{r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : a \leq r_r^0 \leq b\}$
 - 1: $[a_r^0, b_r^0] \leftarrow \text{FINDPOSBoundingBox}(\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R)$;
 - ▷ Mettre à l'échelle les variables $[r_r^0; v_r^0]$ vers $[-1; 1]^3 \times [-1; 1]^3$
 - 2: $c(t_i, t_0) \leftarrow -\Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t_i, t_0) m_{v_r}^0$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 3: $Q(t_i, t_0) \leftarrow \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-T}$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 4: $\tilde{c}(t_i, t_0) \leftarrow \text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right)^{-1} \left(c(t_i, t_0) - \frac{b_r^0 + a_r^0}{2} \right)$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 5: $\tilde{Q}(t_i, t_0) \leftarrow \frac{1}{R^2} \text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right)^{-1} Q(t_i, t_0) \text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right)^{-1}$, pour $t_i \in \tau_N$;
 - 6: **si** $Q_{v_r}^0 \neq 0$ **alors**
 - 7: $\delta_3 \leftarrow \sqrt{\text{diag2vec}(Q_{v_r}^0)}$;
 - 8: $[a_v^0, b_v^0] \leftarrow [-\delta_3, \delta_3]$;
 - 9: $\Delta(t_i, t_0) \leftarrow -\text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right)^{-1} \Phi_{11}(t_i, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t_i, t_0) \text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right)$;
 - 10: $\tilde{Q}_{v_r}^0 \leftarrow \text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right) Q_{v_r}^0 \text{vec2diag} \left(\frac{b_v^0 - a_v^0}{2} \right)$;
 - 11: **sinon**
 - 12: $\Delta(t_i, t_0) \leftarrow 0$;
 - 13: **fin si**
 - ▷ Définir les contraintes polynomiales
 - ▷ Contraintes de position
 - 14: $g_{t_i} \leftarrow 1 - (\tilde{r}_r^0 - \tilde{c}(t_i, t_0) - \Delta(t_i, t_0) \tilde{v}_r^0)^T \tilde{Q}(t_i, t_0)^{-1} (\tilde{r}_r^0 - \tilde{c}(t_i, t_0) - \Delta(t_i, t_0) \tilde{v}_r^0)$ pour $t_i \in \tau_N$;
 - 15: **si** $Q_{v_r}^0 \neq 0$ **alors**
 - ▷ Contraintes de vitesse
 - 16: $h_{v_r, 0} \leftarrow 1 - \tilde{v}_r^{0T} \tilde{Q}_{v_r}^{0-1} \tilde{v}_r^0$;
 - 17: **sinon**
 - 18: $h_{v_r, 0} \leftarrow 0$;
 - 19: **fin si**
 - 20: **retourne** $\{g_{t_i} \geq 0, t_i \in \tau_N\}, \{h_{v_r, 0} \geq 0\}$
-

Algorithme 9 PSSAPPROX6D($\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R, d, l$)

Entrée: grille temporelle τ_N , $\Phi(t, t_0)$ avec les blocs (1, 1) et (1, 2) inversibles pour $t \in \tau_N$, un vecteur vitesse relative moyenne initiale donné $m_{v_r}^0 \in \mathbb{R}^3$ et une matrice $Q_{v_r}^0$ pour l'ellipsoïde à 6- σ , un rayon R , des degrés $2l \geq d$, $d \geq 1$.

Sortie: $p_d \in \mathbb{R}[x]_d$ est une approximation PSS de l'ensemble de collision discrétisé c.-à-d.,

$$\{x \in \mathbb{R}^6 : p_d(x) \geq 1\} \supseteq \{x_r^0 = [r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T \in \mathbb{R}^6 : \exists t \in \tau_N, \text{t.q.} \\ x_r^{0T} \Phi(t, t_0)^T I_{11} \Phi(t, t_0) x_r^0 \leq R^2, (v_r^0 - m_{v_r}^0)^T Q_{v_r}^{0-1} (v_r^0 - m_{v_r}^0) \leq 1\}.$$

- ▷ Mettre à l'échelle les variables $[r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T$ vers $[-1; 1]^3 \times [-1; 1]^3$
- 1: $\{g_{t_i} \geq 0, t_i \in \tau_N\}, \{h_{v_r}^0 \geq 0\} \leftarrow \text{SCALECONSTRAINSUNITCUBE}(\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R)$
- ▷ Résoudre le problème d'optimisation
- 2: **si** $Q_{v_r}^0 = 0$ **alors**
- 3: $g_{r0,j} \leftarrow 1 - \tilde{r}_{r,j}^{0^2}$, pour $j = 1, 2, 3$;

$$w_{*2l,d} = \min_{p \in \mathbb{R}[\tilde{r}_r^0]_d} \int_{[-1;1]^3} p(\tilde{r}_r^0) d\tilde{r}_r^0, \\ \text{t.q.} \left. \begin{aligned} p - \sigma_{r0,0} - \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{r0,j} \sigma_{r0,j} &= 0 \\ \sigma_{r0,0} &\in \Sigma^2[\tilde{r}_r^0]_{2l}, \\ \sigma_{r0,j} &\in \Sigma^2[\tilde{r}_r^0]_{2(l-1)}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} p \geq 0 \text{ sur } [-1; 1]^3 \\ \left. \begin{aligned} p - \sigma_{t_i,0} - g_{t_i} \sigma_{t_i,1} &= 1 \\ \sigma_{t_i,0} &\in \Sigma^2[\tilde{r}_r^0]_{2l}, \\ \sigma_{t_i,1} &\in \Sigma^2[\tilde{r}_r^0]_{2(l-1)}, \end{aligned} \right\} p \geq 1 \text{ sur chaque ensemble } \{\tilde{r}_r^0 \in \mathbb{R}^3 : g_{t_i}(\tilde{r}_r^0) \geq 0\}, \text{ pour } t_i \in \tau_N. \quad (164)$$

- 4: **retourne** $p_{2l,d}^* = \text{Argmin}$ (164)
- 5: **sinon**
- 6: $g_{r0,j} \leftarrow 1 - \tilde{r}_{r,j}^{0^2}$, et $g_{v0,j} \leftarrow 1 - \tilde{v}_{v,j}^{0^2}$, pour $j = 1, 2, 3$;

$$w_{*2l,d} = \min_{p \in \mathbb{R}[\tilde{x}_r^0]_d} \int_{[-1;1]^6} p(\tilde{x}_r^0) d\tilde{x}_r^0, \\ \text{t.q.} \left. \begin{aligned} p - \sigma_0 - \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{r0,j} \sigma_{r0,j} - \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{v0,j} \sigma_{v0,j} &= 0 \\ \sigma_0 &\in \Sigma^2[\tilde{x}_r^0]_{2l}, \\ \sigma_{r0,j}, \sigma_{v0,j} &\in \Sigma^2[\tilde{x}_r^0]_{2(l-1)}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} p \geq 0 \text{ sur } [-1; 1]^6 \quad (165) \\ \left. \begin{aligned} p - \sigma_{t_i,0} - g_{t_i} \sigma_{t_i,1} - h_{v_r}^0 \sigma_{v0,t_i} &= 1 \\ \sigma_{t_i,0} &\in \Sigma^2[\tilde{x}_r^0]_{2l}, \\ \sigma_{t_i,1}, \sigma_{v0,t_i} &\in \Sigma^2[\tilde{x}_r^0]_{2(l-1)}, \end{aligned} \right\} p \geq 1 \text{ sur chaque ensemble } \{\tilde{x}_r^0 \in \mathbb{R}^6 : g_{t_i}(\tilde{x}_r^0) \geq 0, h_{v_r}^0(\tilde{x}_r^0) \geq 0\}, \text{ pour } t_i \in \tau_N.$$

- 7: **retourne** $p_{2l,d}^* = \text{Argmin}$ (165)
 - 8: **fin si**
-

Proposition 8. L'Algorithme 9 est correct.

Preuve. Le cas 3D dont la correction a été prouvée plus haut est obtenu comme un cas particulier pour lequel la matrice $Q_{v_r}^0$ est mise à 0. Dans le cas général, les vitesses sont incertaines et il est nécessaire d'utiliser l'ellipsoïde de covariance à 6- σ afin d'obtenir un ensemble de contraintes

compact. Nous avons ainsi $(v_r^0 - m_{v_r}^0)^T Q_{v_r}^{0^{-1}} (v_r^0 - m_{v_r}^0) \leq 1$. De plus, l'Equation (159) devient, pour chaque t fixé :

$$\hat{\mathcal{E}}_{t,t_0} := \left\{ r_r^0 \in \mathbb{R}^3 : R^2 - (r_r^0 - c_{v_0}(t, t_0))^T Q(t, t_0)^{-1} (r_r^0 - c_{v_0}(t, t_0)) \geq 0, \right. \\ \left. 1 - (v_r^0 - m_{v_r}^0)^T Q_{v_r}^{0^{-1}} (v_r^0 - m_{v_r}^0) \geq 0 \right\}, \quad (166)$$

où

$$\begin{aligned} c_{v_0}(t, t_0) &= -\Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t, t_0) v_r^0, \\ Q(t, t_0) &= \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{11}(t, t_0)^{-T}. \end{aligned} \quad (167)$$

Si de plus, la matrice $\Phi_{12}(t, t_0)$ est de rang plein, l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}_{t,t_0}$ peut être inclus dans la boîte retournée par l'Algorithme 7, du fait que chaque ellipsoïde peut être vu comme l'image de la boule unité par une transformation affine. Spécifiquement, cette transformation est définie par :

$$v_r^0 = A_{v_0} u_{v_0} + m_{v_r}^0, \text{ avec } \|u_{v_0}\|_2 \leq 1, \text{ et } A_{v_0} A_{v_0}^T = Q_{v_r}^0, \quad (168)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} c_{v_0}(t, t_0) &= -\Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t, t_0) m_{v_r}^0 \\ &\quad - \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t, t_0) A_{v_0} u_{v_0}, \text{ avec } \|u_{v_0}\|_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (169)$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} r_r^0(t|t_0) &= \frac{1}{R} \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} u_{r_0} \\ &\quad - \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t, t_0) m_{v_r}^0 \\ &\quad - \Phi_{11}(t, t_0)^{-1} \Phi_{12}(t, t_0) A_{v_0} u_{v_0}, \text{ avec } \|u_{v_0}\|_2 \leq 1, \|u_{r_0}\|_2 \leq 1, \end{aligned} \quad (170)$$

qui correspond à la borne souhaitée. Ensuite, la mise à l'échelle des variables $[r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T$ vers la boîte $[-1; 1]^6$ est importante pour la qualité numérique des résultats, bien que cela ne soit pas nécessaire d'un point de vue théorique. En substituant la formule de mise à l'échelle $\tilde{x} = \frac{2x}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}$, appliquée composante par composante, dans les équations ci-dessus, les équations définies aux lignes 4, 5, 9, 10 de l'Algorithme 8 sont obtenues. Elles se traduisent directement en contraintes polynomiales aux lignes 14 et 16 de l'Algorithme 8. Ces contraintes s'appliquent maintenant aux variables mises à l'échelle $\tilde{x}_r^0 = [\tilde{r}_r^{0T} \ \tilde{v}_r^{0T}]^T \in [-1; 1]^6$. En suivant les développements théoriques de la Section 5.3.1, les Problèmes 165 ou 164 fournissent une solution pour l'approximation PSS de l'ensemble d'entrée. \square

5.6 Une méthode alternative efficace par tirage aléatoire brute-force

En développant la méthode précédente, nous avons aussi conçu un algorithme de vérification des résultats obtenus, qui s'avère être efficace et facile à implanter en pratique et que nous décrivons ci-dessous. Cet algorithme est basé sur la même idée de représenter le *swept-volume* comme une union d'ensembles $\bigcup_{i=1, \dots, N} \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{X}_T^0$ obtenus avec une discrétisation sur le temps :

$$\mathcal{K}_i := \{x_r^0 \in \mathbb{R}^6 : R^2 - x_r^{0T} \Phi(t_i, t_0)^T I_{11} \Phi(t_i, t_0) x_r^0 \geq 0\}. \quad (171)$$

Cette description approchée de \mathcal{X}_T^0 permet de tester très simplement qu'une condition initiale $x_r^0 \in \mathbb{R}^6$ réalise au moins une collision dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$: au moins une des inégalités décrivant les \mathcal{K}_i doit être satisfaite pour cette condition initiale. Cette observation a permis de construire l'Algorithme 10.

Algorithme 10 BRUTEFORCEVOLUME**TEST**($\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R, M, P_I$)

Entrée: Une grille temporelle τ_N , $\Phi(t, t_0)$ avec les blocs (1, 1) et (1, 2) inversibles pour $t \in \tau_N$, un vecteur vitesse relative moyenne initiale donné $m_{v_r}^0 \in \mathbb{R}^3$ et une matrice $Q_{v_r}^0$ pour l'ellipsoïde à 6σ , un rayon R , un nombre d'échantillons à générer M à partir de la distribution gaussienne dont la covariance est donnée par P_I .

Sortie: approximation de la probabilité de collision en utilisant un échantillonnage gaussien et la définition de l'ensemble de collision discretisé, $\{x_r^0 = [r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T \in \mathbb{R}^6 : \exists t \in \tau_N, \text{t.q. } x_r^{0T} \Phi(t, t_0)^T I_{11} \Phi(t, t_0) x_r^0 \leq R^2, (v_r^0 - m_{v_r}^0)^T Q_{v_r}^{0^{-1}} (v_r^0 - m_{v_r}^0) \leq 1\}$.

▷ Mettre à l'échelle les variables $[r_r^{0T} \ v_r^{0T}]^T$ vers $[-1; 1]^3 \times [-1; 1]^3$
1: $\{g_{t_i} \geq 0, t_i \in \tau_N\}, \{h_{v_r}^0 \geq 0\} \leftarrow \text{SCALECONSTRAINSUNITCUBE}(\tau_N, \Phi(t, t_0), m_{v_r}^0, Q_{v_r}^0, R)$
▷ Générer et tester les M échantillons gaussiens
2: Générer $(x_r^0)_{j=1, \dots, M} \in \mathbb{R}^6$ échantillons gaussiens à partir de la covariance P_I ;
3: **pour** $j = 1, \dots, M$ **faire**
4: **si** $x_{r_j}^0 \in [-1; 1]^6$ **alors**
5: S'il existe $i = 1, \dots, N$ tel que $g_{t_i}(x_{r_j}^0) \geq 0$ et $h_{v_r}^0(x_{r_j}^0) \geq 0$, alors $C \leftarrow C + 1$;
6: **fin si**
7: **fin pour**
8: **retourne** C/M

5.7 Sur le choix de la méthode la plus adaptée - Quelques exemples

Nous avons présenté plusieurs méthodes qui peuvent être utilisées avec différents compromis afférents. Pour faire un choix pertinent, nous proposons plusieurs routines de base qui peuvent être utilisées, afin de distinguer dans quel cadre se situer et quel algorithme utiliser pour une rencontre donnée. Cette démarche sera illustrée à l'aide de plusieurs cas d'étude de l'article de S. Alfano [8]. Nous rappelons que ceux-ci ont été déjà utilisés pour illustrer la méthode hybride pour les rencontres rapides avec incertitudes sur la vitesse.

5.7.1 Cas test 7

Commençons avec l'exemple 7 d'Alfano. Pour cet exemple, nous allons regarder l'influence de l'incertitude sur la vitesse à la TCA. Pour cela, une solution est de propager la distribution (donc la moyenne et la covariance de la gaussienne initiale) et de tracer la courbe de la probabilité instantanée dans deux cas : (1) on considère qu'il n'y a pas d'incertitude sur la vitesse à la TCA (seul le bloc supérieur gauche de la matrice de covariance est non-nul) ; (2) on ne néglige pas l'incertitude sur la vitesse (la matrice de covariance est pleine). On observe sur la Figure 22b, que les résultats du calcul de la probabilité instantanée sur l'intervalle de temps considéré dans les deux cas, sont très similaires. Même si cette observation ne constitue pas directement une preuve, cela permet quand même, avec un coût très faible, puisque la probabilité instantanée peut être calculée de façon rapide et fiable avec nos méthodes, d'incliner vers l'utilisation d'une méthode qui néglige la contribution de l'incertitude sur les vitesses. A partir de là, comme la vitesse relative à la TCA est relativement faible (0.19 m/s) deux options sont possibles :

- Calculer numériquement la courbure de la trajectoire relative moyenne autour de la TCA et jusqu'à la sortie de l'ellipsoïde $n\sigma$ -d'incertitude sur les positions à la TCA. Si cette trajectoire est très proche d'une droite (seuil à définir en étudiant des cas pratiques), alors utiliser la méthode 2D avec échantillonnage sur la vitesse relative, car le swept-volume est très proche d'un cylindre et donc une telle l'approximation est justifiée ;

- Si une méthode de rencontre lente est souhaitable (soit pour vérification, soit parce que la courbure ne peut être négligée), alors la méthode de Coppola ou les alternatives présentées dans ce rapport (PSS ou bien brute-force, qui prennent en compte les rencontres multiples) peuvent être utilisées. Pour l'exemple 7 d'Alfano, en prenant 10^6 échantillons pour la méthode brute-force, nous obtenons une probabilité de collision égale à 0.000158, alors qu'avec la méthode PSS (sans incertitude sur la vitesse), la probabilité de collision calculée est de 0.000165.

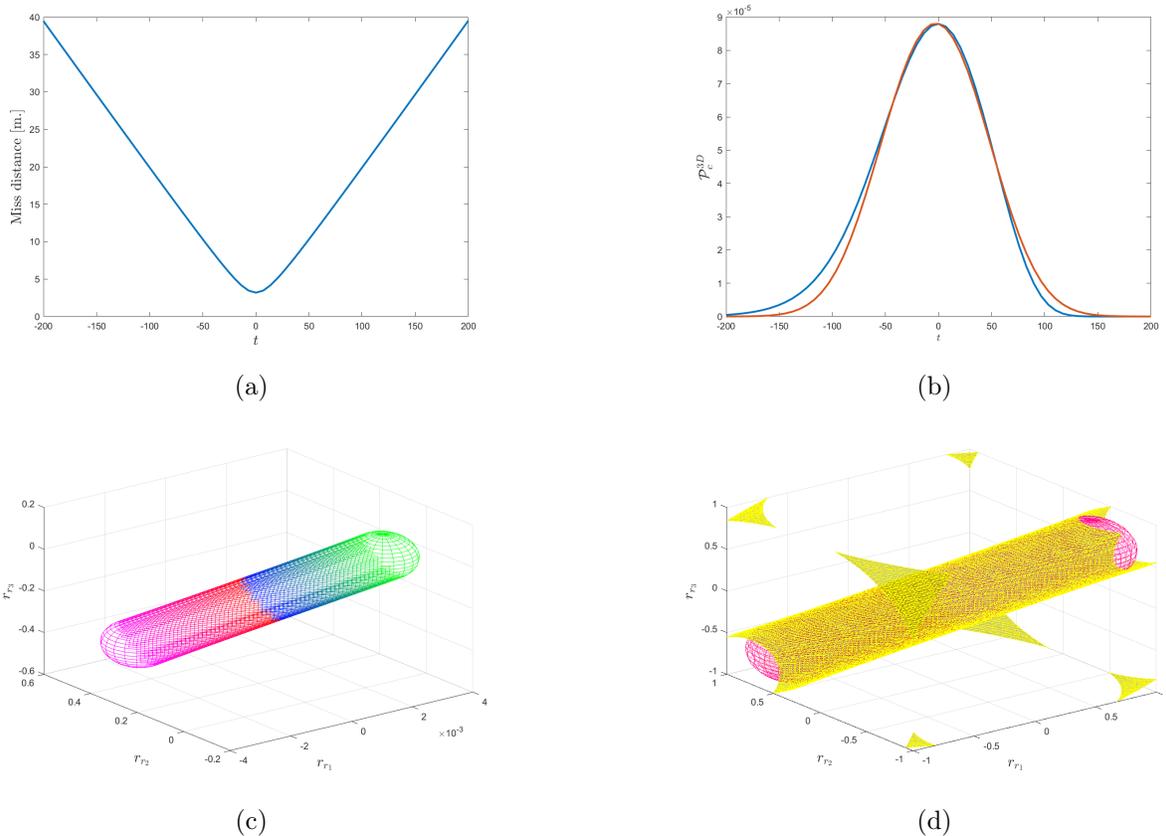


FIGURE 22 – (a) Miss distance (en m) (b) Probabilité de collision instantanée avec (en bleu) ou sans incertitude (en rouge) sur la vitesse à la TCA (c) Forme 3D du Swept-volume (pas d'incertitude sur la vitesse) (d) Approximation PSS de degré $d = 4$.

5.7.2 Cas test 9

Considérons maintenant les rencontres où l'incertitude sur la vitesse a une importance plus significative. De façon similaire à l'analyse précédente, même si la vitesse est incertaine, la trajectoire relative obtenue en fixant la vitesse pour une valeur probable peut rester rectiligne dans de nombreux cas. Cela peut s'interpréter de la façon suivante : pour chaque vitesse fixée, le swept-volume 3D généré est proche d'un cylindre, qui change de direction pour chaque vitesse, comme nous l'avons décrit dans une section précédente. Pour ce cas de figure, l'algorithme d'évaluation du risque pour les rencontres rapides avec incertitudes sur la vitesse (méthode hybride) peut très bien s'appliquer.

Notamment, pour l'exemple 9 d'Alfano, cette situation est très bien représentée. On observe à la Figure 23 que la courbe de probabilité instantanée calculée en faisant une propagation de la covariance avec incertitudes sur la vitesse à la TCA est différente de celle calculée en considérant

qu'il n'y a pas d'incertitudes sur la vitesse à la TCA. Cela veut donc dire que certaines collisions sont réalisées seulement quand la vitesse initiale relative à la TCA n'a pas la valeur moyenne. Ce fait est confirmé aussi par le résultat de la méthode PSS 3D dont la paramétrisation est la suivante.

- L'intervalle de temps de la rencontre (en secondes) est $t \in [-10800; 4320]$, avec la TCA donnée par $t_0 = 0$. Les positions et vitesses relatives moyennes sont connues en t_0 , de même que les caractéristiques de la distribution gaussienne définissant l'incertitude. La miss distance obtenue par une propagation exacte des dynamiques képlériennes est représentée en fonction du temps à la Figure 23(a).
- La matrice de transition d'état $\Phi(\cdot, t_0)$ est calculée par linéarisation des dynamiques képlériennes autour de la trajectoire moyenne de l'objet primaire, suivant en cela l'algorithme classique de Shepperd [76].
- Une discrétisation comprenant $N_1 = 10$ dates uniformément réparties dans l'intervalle de temps précédant la TCA et $N_2 = 10$ dates après la TCA est construite.
- Supportée par cette discrétisation, la probabilité de collision instantanée pour chaque date est calculée et représentée à la Figure 23(b) (cela paraît être en accord avec les résultats d'Alfano).
- A la Figure 23(d), le swept volume exact (obtenu comme l'image de la sphère de collision par la fonction d'évolution inverse) est représenté.
- L'Algorithme 9 est appliqué avec $Q_{v_r}^0 = 0$ (pas d'incertitude sur la vitesse relative) et $d = 2l = 8$. Cela signifie qu'un polynôme de degré 8 est recherché. Il est important de remarquer que S.Alfano n'a pas négligé l'incertitude de vitesse pour obtenir ses résultats proposés dans [8, Example No. 9].
- L'implémentation MATLAB® de l'Algorithme 9 nécessite 10 secondes d'exécution (sur une station de travail classique) pour calculer l'approximation PSS représentée à la Figure 23(d).
- Finalement, l'exécution du code de [68, Algorithme 3] demande moins de 10 secondes (temps de compilation et d'exécution) afin de calculer une valeur approchée de l'intégrale gaussienne sur l'approximation PSS obtenue à l'étape précédente.

Si on ne considère pas d'incertitudes sur la vitesse à la TCA, la méthode PSS 3D fournit une valeur de 0.2825, qui est plus petite que la valeur de [8] qui est autour de 0.36511 pour la méthode Monte Carlo la plus précise.

Par contre, dans ce cas, les swept-volumes générés pour la plupart des vitesses probables sont plutôt cylindriques, et donc, en utilisant l'algorithme d'échantillonnage des vitesses suivi d'un calcul 2D – comme il est expliqué à la Section 3.2 –, on obtient une valeur très proche (0.3651) de celle de la méthode de Monte Carlo (0.3651), sans avoir à utiliser de propagations compliquées ou une méthode PSS en 6D, même pour une rencontre qui n'est pas rapide (vitesse relative à la TCA de 0.002 m/s).

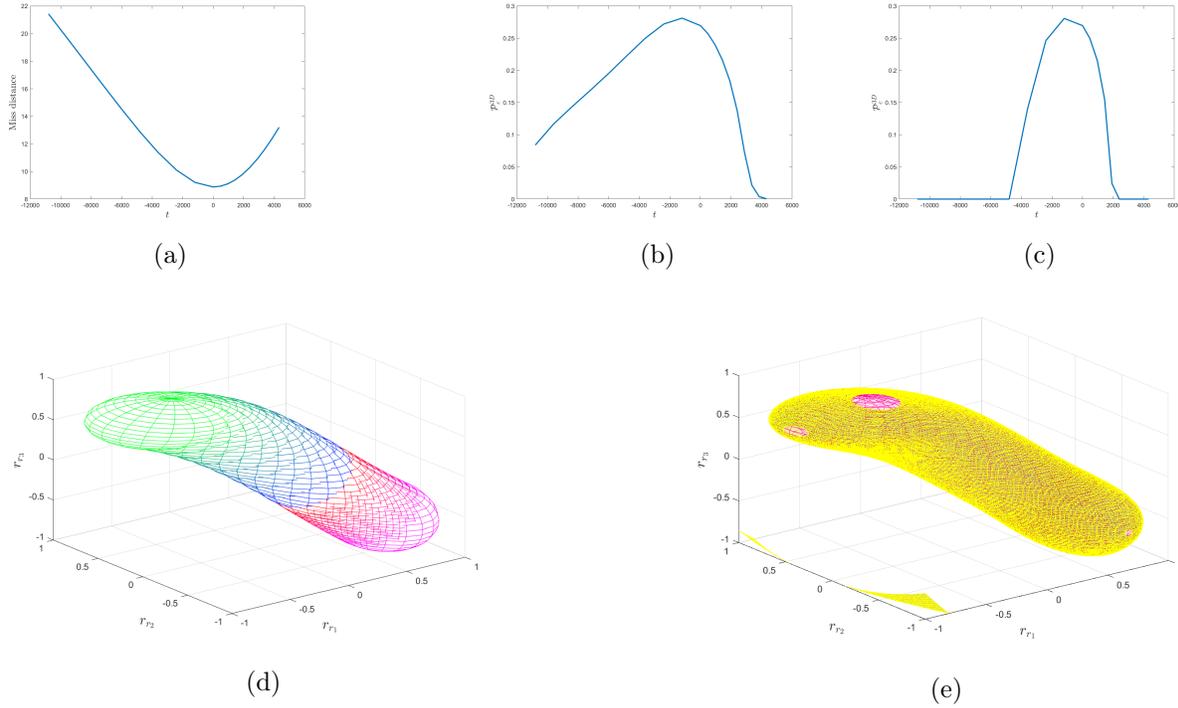
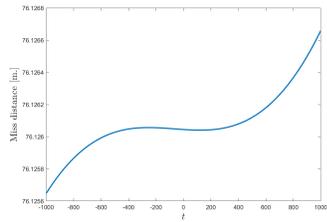


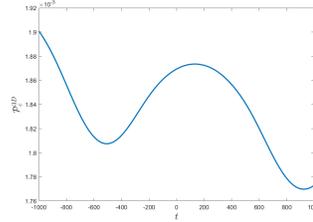
FIGURE 23 – (a) Miss distance (en m) (b) et (c) Probabilité de collision instantanée avec ou sans incertitude sur la vitesse à la TCA (d) Forme 3D du Swept-volume (pas d'incertitude sur la vitesse) (e) Approximation PSS (sans incertitude sur la vitesse) de degré $d = 8$.

5.7.3 Cas test 11

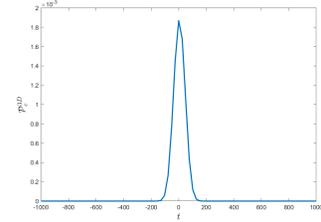
Finalement, considérons un cas où le swept-volume proche du $n\sigma$ -ellipsoïde de covariance est très courbé et l'incertitude sur la vitesse n'est pas négligeable. Ceci peut être observé à la Figure 24 qui illustre l'exemple 11 d'Alfano. L'encadrement 3D fonctionne relativement bien si on néglige les vitesses (Figures 24(d) et (e)). Par contre, si on considère le cas 6D, la surestimation est trop grande, comme illustré par la Figure 24(f) et (g). On peut observer sur la Figure 24(f), que le swept-volume tracé pour une seule vitesse particulière (la moyenne) occupe un volume très petit par rapport à la boîte $[-1, 1]^3$. Ceci s'explique par le fait que pour d'autres vitesses, les swept-volumes correspondants sont situés à d'autres endroits afin que la projection totale soit bornée par la boîte $[-1, 1]^3$. Nous avons donc, soit une valeur de 0.0026 obtenue avec l'algorithme PSS3D, ce qui correspond au cadre sans incertitude sur la vitesse et coïncide dans ce cas là avec la valeur obtenue avec la méthode 2D, soit une valeur trop sur-estimée de 0.06239 avec le PSS6D. Pour cet exemple, par contre, la méthode de test brute-force fonctionne plutôt bien quand le swept-volume est décrit comme une union d'ensembles (en 6D), car nous obtenons une valeur de 0.0032 (en prenant 10000 échantillons), ce qui est très proche de la valeur la plus précise obtenue avec le Monte Carlo le plus précis d'Alfano (0.0033).



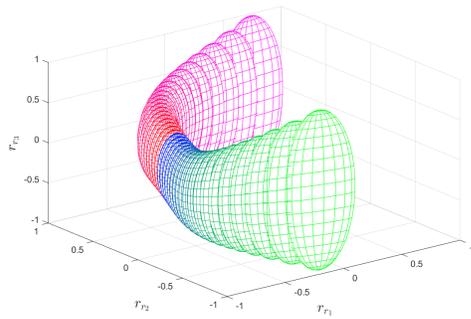
(a)



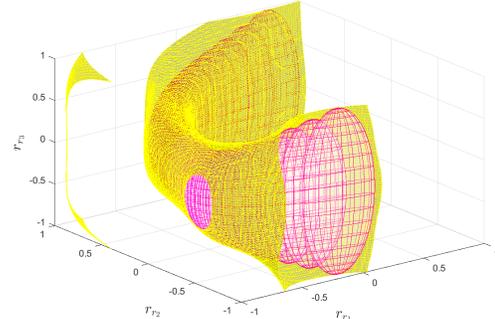
(b)



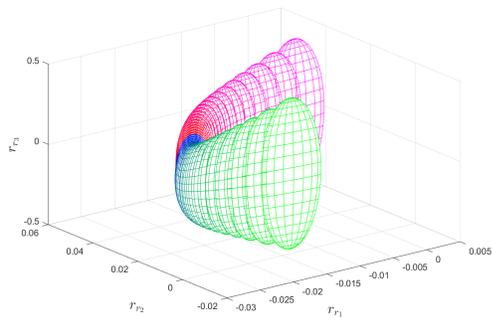
(c)



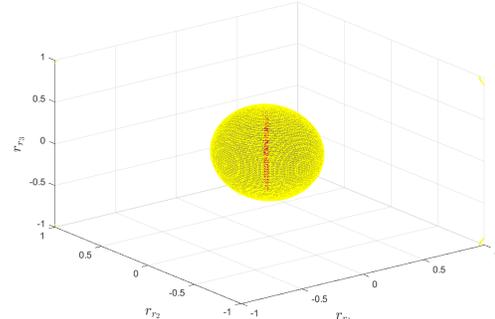
(d)



(e)



(f)



(g)

FIGURE 24 – (a) Miss distance (en m) (b) et (c) Probabilité de collision instantanée avec ou sans incertitude sur la vitesse à la TCA (d) Forme 3D du Swept-volume (quand la vitesse est fixée à la valeur moyenne) (e) Approximation PSS3D de degré $d = 8$, pour la vitesse fixée à la valeur moyenne; (f) et (g) Projection du swept-volume 6D et respectivement de l'approximation PSS6D de degré $d = 8$, pour la vitesse fixée à la valeur moyenne.

6 Conclusion

Ce rapport s'est principalement intéressé à la généralisation des méthodes de calcul de la probabilité de collision entre deux engins spatiaux pour des rencontres pour lesquelles le modèle simplifié des rencontres rapides n'est pas assez réaliste. Les résultats des différentes méthodes, qu'elles soient nouvelles ou issues de la littérature montrent que nous sommes encore assez éloignés d'un état de maturité pour traiter le problème des rencontres lentes de manière sûre et efficace. La difficulté vient d'ailleurs probablement du manque de clarté de la problématique posée. Celle-ci est en effet beaucoup trop vaste et trop vaguement caractérisée pour trouver des réponses rigoureusement fondées. Ainsi, le cadre actuel d'étude entretient la confusion entre modélisation et méthode de calcul, validation des modèles et validation des méthodes. Il n'est, par exemple, pas rare de rencontrer des travaux validant l'analyse des rencontres par les résultats obtenus avec une méthode qui n'est, elle-même, pas validée par ailleurs pour ce cadre de modélisation.

Il semble donc primordial de définir correctement les grandeurs que l'on souhaite calculer en fonction des modèles de rencontre qui semblent les plus pertinents en pratique. Pour cela, il nous semble indispensable de faire un travail important de discrimination, d'analyse et d'évaluation du type des rencontres pour lesquelles il faut évaluer le risque de collision. Certes, quelques éléments de pré-analyse des rencontres permettant de les classer existent dans la littérature (cf. par exemple le time span défini par Coppola pour les rencontres rapides ou les critères de seuil de vitesse relative). Toutefois, cette étude a permis de constater qu'il fallait aller beaucoup plus loin dans cette étape préliminaire puisque l'on est en présence d'une multiplicité presque continue de types de rencontres plutôt que de deux classes clairement séparées. Une fois les modèles de rencontre clairement formulés en fonction des hypothèses retenues, il reste à définir précisément comment se caractérise mathématiquement la probabilité de collision pour finalement aborder la dernière étape de l'étude dédiée au calcul efficace et précis de cette quantité avec les méthodes adéquates.

A Quelques notes sur l'évaluation de fonction sans compensation

A.1 Introduction

Considérons une série entière de la forme

$$g(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \xi^i, \quad g_i \sim (-1)^i \lambda \frac{\alpha^i}{i!^\kappa}, \quad (172)$$

avec $\lambda, \alpha, \kappa > 0$. Pour de grandes valeurs de $\xi > 0$, le calcul en précision finie d'une telle somme est sujet au phénomène dit de *compensations*. En effet, les termes $|g_i \xi^i|$ croissent dans un premier temps, avant que la série ne commence à converger quand $i^\kappa \geq \alpha \xi$. Quand $i^\kappa \simeq \alpha \xi$, les termes $|g_i \xi^i|$ se trouvent en général être largement supérieurs à $|g(\xi)|$. Par conséquent, les bits de poids fort se compensent tandis que les bits de poids faible, dont la contribution est déterminante pour les premiers bits significatifs du résultat, sont perdus en raison des erreurs d'arrondi. C'est la raison pour laquelle nous souhaitons minimiser le rapport

$$d_g(\xi) = \log \frac{\max_i |g_i \xi^i|}{|g(\xi)|}. \quad (173)$$

Exemple 9.

Un exemple simple de compensation catastrophique est celui de $g(\xi) = \exp(-\xi)$. On a $g(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \xi^i$. Les valeurs de $\left| \frac{(-1)^i}{i!} \xi^i \right|$ sont représentées en fonction de i sur la Figure 25 pour $\xi = 15$. On estime à environ $d_g(\xi) \simeq 12$ le nombre de décimales perdues (en prenant le logarithme décimal \log_{10} dans (173)). En pratique, on observe que le résultat de la sommation en Maple des 101 premiers termes avec 10 décimales de précision,

`Digits:=10:`

`add((-15.)^i/i!, i=0..100);`

vaut $-0.4847810247 \cdot 10^{-4}$, alors que $\exp(-15) \simeq 3.06 \cdot 10^{-7}$.

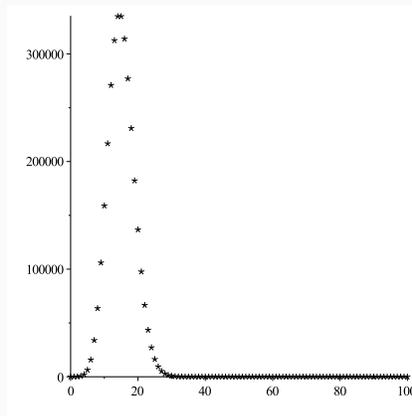


FIGURE 25 – Valeurs de $\left| \frac{(-1)^i 15^i}{i!} \right|$, $i = 0, \dots, 100$, à comparer avec la valeur finale exacte $\exp(-15) \simeq 3.06 \cdot 10^{-7}$.

Afin de contourner le problème de compensation pour cette fonction simple, nous pourrions utiliser la série entière de $\exp(x)$, dont tous les termes sont positifs, puis calculer finalement $\frac{1}{\exp(x)}$. C'est l'illustration la plus simple possible de l'idée promue dans [36, 24], qui consiste à évaluer deux séries bien conditionnées, disons f and ψ , de sorte que $g = \frac{f}{\psi}$. Dans cet exemple, $\psi = \exp$ et $f = 1$.

Cette idée est développée dans [36], par Gawronski, Müller and Reinhard, qui proposent une méthode (que nous appellerons GMR par la suite) pour amoindrir le phénomène de compensation lors de l'évaluation d'une série entière donnée dans un secteur du plan complexe. Nous utilisons une instance simplifiée de leur méthode dans ce qui suit, étant donné que nous n'avons besoin d'évaluer notre fonction que sur l'axe réel positif uniquement. Avant d'expliquer la méthode GMR et son application à notre problème, nous passons en revue quelques notions classiques en analyse complexe (voir par exemple [53, Chap.1, 9]).

A.2 Principe de la méthode GMR

A.2.1 Quelques notions classiques en analyse complexe

Soit $g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n$ une fonction entière (c.-à-d. analytique dans tout le plan complexe, ou de manière équivalente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g_n|} = 0$).

— L'ordre (de croissance) ρ de g est donné par $\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_g(r)}{\log r}$, où $M_g(r) := \max_{|\xi|=r} |g(\xi)|$.

L'ordre est relié aux coefficients de g par l'identité suivante :

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log |g_n|^{-1}}. \quad (174)$$

— Si $0 < \rho < \infty$, le type σ est donné par :

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_g(r)}{r^\rho}. \quad (175)$$

La formule suivante relie l'ordre, le type et la croissance des coefficients de g . Si g est d'ordre $\leq \rho$, alors

$$\sigma = \frac{1}{e\rho} \limsup_{n \rightarrow \infty} n |g_n|^{\rho/n}. \quad (176)$$

— La fonction indicatrice h par rapport à ρ est définie par :

$$h(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r^\rho}. \quad (177)$$

Elle caractérise la croissance de g le long d'un rayon $\{\xi : \arg \xi = \theta\}$. Il est établi que h est continue et que

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} h(\theta) = \sigma. \quad (178)$$

L'idée première de la méthode GMR est que, sous ces notations et pour de grandes valeurs de r , on a $\log |g(re^{i\theta})| \sim h(\theta)r^\rho$, dans un sens relativement vague. Cela permet de quantifier approximativement la compensation (et donc le nombre de décimales perdues) en fonction du type σ et de la fonction indicatrice h .

A.2.2 Lien entre compensation et fonction indicatrice

En vertu de l'Équation (173), nous souhaitons minimiser le rapport

$$d_g(re^{i\theta}) = \log \frac{\max_n |g_n| r^n}{|g(re^{i\theta})|}.$$

D'après [64, Thm. 10.1], nous pouvons approximer $M_g(r)$ par $\mu_g(r) := \max_n |g_n| r^n$ dans (175), puisque $\frac{\log \mu_g(r)}{\log M_g(r)} \rightarrow 1$ quand $r \rightarrow \infty$. Sous certaines hypothèses supplémentaires [36] et en utilisant (177), on peut estimer que

$$d_g(re^{i\theta}) \sim r^\rho (\sigma_g - h_g(\theta)). \quad (179)$$

L'Équation (179) constitue le point de départ essentiel pour évaluer la série (172) sans compensation. Il faut faire en sorte que $\sigma_g - h_g(\theta)$ soit aussi petit que possible pour procéder à l'évaluation le long d'un rayon ou secteur d'angle θ . Dans notre cas, $\theta = 0$ puisque l'évaluation a lieu le long de l'axe réel positif.

A.3 L'ordre, le type et la fonction indicatrice de la fonction de probabilité

La fonction de probabilité, que nous appelons g (voir Section 2), est entière d'ordre $\rho = 1$. On parle alors de *Fonction Entière de Type Exponentiel* (FETE).

Proposition 9.

Soit $\mathcal{L}g(\lambda)$ la transformée de Laplace de g , donnée par l'Équation (76) pour $d = 2$.

Supposons qu'elle admette un développement en l'infini $\mathcal{L}g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1}$, convergent pour tout λ dans $\{|\lambda| > \frac{1}{2\sigma_y}\}$ mais qui diverge pour tout λ dans $\{|\lambda| < \frac{1}{2\sigma_y}\}$, en reprenant la convention $\sigma_x \geq \sigma_y > 0$. Alors $g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{n!} \xi^n$ est une FETE avec $\sigma_g = \frac{1}{2\sigma_y^2}$.

Preuve. La preuve découle de la correspondance entre les transformées de Borel et de Laplace (voir par exemple [64, Prop. 11.5, Cor. 11.5 et Prop. 11.7]). \square

Pour finir, la fonction indicatrice de g s'obtient par le théorème de Polya, que nous rappelons maintenant.

A.3.1 Transformée de Borel et théorème de Polya

Soit g une FETE comme ci-dessus et sa transformée de Laplace $\mathcal{L}g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1}$ (également appelée *transformée de Borel inverse* de g). Cette série converge à l'extérieur du disque $\{|\lambda| \leq \sigma_g\}$ et diverge en tout point de son intérieur. On appelle *diagramme conjugué de l'indicatrice* le plus petit ensemble convexe compact contenant toutes ses singularités. On note $k_g(\theta)$ la fonction support de cet ensemble compact, où, de manière générale, la fonction support $k(\theta)$ d'un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est définie par :

$$k(\theta) = \sup_{z \in K} \{x \cos \theta + y \sin \theta\} = \sup_{z \in K} \{\operatorname{Re}(ze^{-i\theta})\}, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (180)$$

Le théorème suivant relie la *croissance d'une FETE* g le long d'un rayon avec la position des singularités de sa transformée de Borel inverse.

Théorème 3 (Polya [53, Chap. 9].).

Pour toute FETE $g(\xi)$, nous avons the relation

$$h_g(\theta) = k_g(-\theta).$$

Remarque 11.

Dans notre cas, les singularités, rangées par ordre croissant, sont $S = \left\{ -\frac{1}{2\sigma_y^2}, -\frac{1}{2\sigma_x^2}, 0 \right\}$. Ainsi, la fonction indicatrice est donnée par :

$$\begin{aligned} h_g(\theta) &= \sup_{x \in \left[\frac{-1}{2\sigma_y^2}, 0 \right]} \{x \cos(-\theta)\}, \theta \in [0, 2\pi] \\ &= \begin{cases} \frac{-\cos \theta}{2\sigma_y^2} & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0 & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \end{cases} \end{aligned} \quad (181)$$

A.3.2 Choix du préconditionneur $e^{p\xi}$

La fonction indicatrice h_g est représentée sur la Figure 26 (a). Nous observons dans ce cas que $d_g(r) = \sigma_g > 0$, et donc que la somme n'est pas conditionnée de manière optimale pour pouvoir être évaluée sans compensation sur l'axe réel positif. La méthode GMR suggère de multiplier g par une *fonction de préconditionnement* (ou *préconditionneur*) ψ , de sorte à ce qu'à la fois ψ et $\tilde{g} := \psi g$ soient très bien conditionnées pour l'évaluation sur l'axe réel positif. Si ψ est une FETE de fonction indicatrice h_ψ , nous nous attendons à ce que $\tilde{g}(re^{i\theta}) \sim \exp((h_g(\theta) + h_\psi(\theta))r)$. Une possibilité est de choisir $\psi(\xi) = e^{p\xi}$, dont la fonction indicatrice $h_\psi(\theta) = p \cos(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, est tracée à la Figure 26 (b) pour $p > 0$.

Nous pouvons maintenant calculer le type et la fonction indicatrice de la *fonction préconditionnée* \tilde{g} , à partir de la transformée de Laplace de \tilde{g} donnée par l'Equation 37. Les singularités sont $\tilde{s}_0 = p$, $\tilde{s}_1 = p - \frac{1}{2\sigma_x^2} = p\phi$ et $\tilde{s}_2 = p - \frac{1}{2\sigma_y^2} = 0$. Ainsi,

$$\sigma_{\tilde{g}} = \max \left\{ |p|, \left| p - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right| \right\}. \quad (182)$$

Notons que $\left| p - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right|$ est toujours compris entre ces deux valeurs, puisque, par convention, $\sigma_x \geq \sigma_y > 0$. Le théorème de Polya donne :

$$\begin{aligned} h_{\tilde{g}}(\theta) &= \sup_{x \in \left[p - \frac{1}{2\sigma_y^2}, p \right]} \{x \cos(-\theta)\}, \theta \in [0, 2\pi] \\ &= \begin{cases} \left(p - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right) \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ p \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \end{cases} \end{aligned} \quad (183)$$

Nous obtenons alors avec (179) et (183) :

$$\frac{d_{\tilde{g}}(re^{i\theta})}{r} = \begin{cases} \max \left\{ |p|, \left| p - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right| \right\} - \left(p - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right) \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ \max \left\{ |p|, \left| p - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right| \right\} - p \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \end{cases} \quad (184)$$

Ainsi, lors de l'évaluation sur l'axe réel positif ($\theta = 0$), nous avons :

$$\frac{d_{\tilde{g}}(r)}{r} = \max \left\{ |p|, \left| p - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right| \right\} - p,$$

qui atteint son minimum pour $p \geq \frac{1}{4\sigma_y^2}$.

Cette analyse, qui suit de près la méthode GMR présentée dans [36], indique par conséquent que la série obtenue pour \tilde{g} est conditionnée de manière optimale sur l'axe réel positif dès lors que $p \geq \frac{\sigma_g}{2}$. À titre d'exemple, la fonction indicatrice de \tilde{g} pour $p = \frac{\sigma_g}{2}$ (resp. $p = \sigma_g$) est tracée à la Figure 26 (c) (resp. Figure 26 (d)). Nous avons choisi $p = \sigma_g$ pour le calcul effectif de la probabilité de collision dans la Section 2.

Il est bien évidemment possible de choisir d'autres préconditionneurs ψ . À l'heure actuelle, il n'existe pas de technique établie dans la littérature pour déterminer le meilleur choix. Il existe aussi des mauvais choix « évidents ». Prenons par exemple $\sin(\xi)$, qui est une FETE ayant comme fonction indicatrice $h_{\sin} = \omega |\sin(\theta)|$, $\omega > 0$. Nous n'obtiendrons jamais un conditionnement optimal en zéro pour l'évaluation sur l'axe réel.

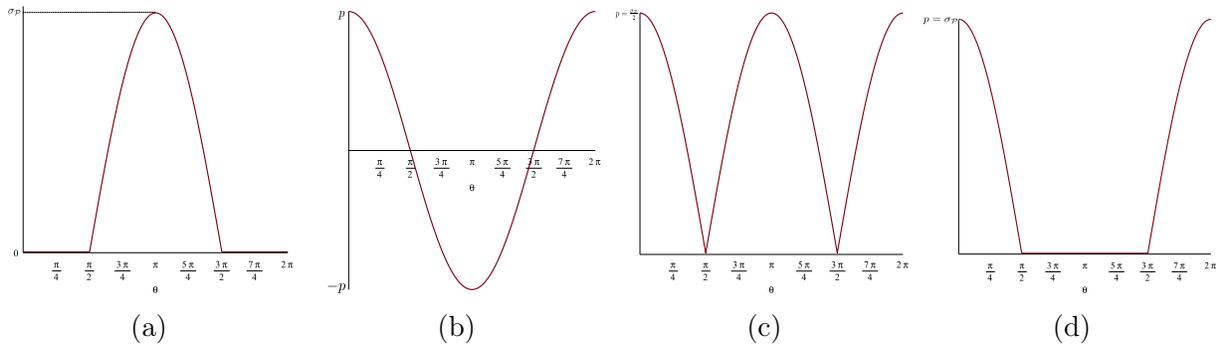


FIGURE 26 – Fonctions indicatrices de (a) la fonction de probabilité g ; (b) le préconditionneur $\xi \mapsto e^{p\xi}$; (c) $\xi \mapsto e^{\frac{\sigma_g}{2}\xi}g(\xi)$; (d) $\xi \mapsto e^{\sigma_g\xi}g(\xi)$.

B Quelques notes sur les séries divergentes

L'objectif de cette annexe est de fournir un aperçu des fondements mathématiques qui sous-tendent la méthode d'approximation de la probabilité de collision par séries divergentes présentée dans la Section 3. En particulier, la définition suivante formalise la notation $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)$ introduite de manière intuitive dans la Section 3, en introduisant la notion de *séries asymptotiques*.

Définition 6. *Étant donné :*

- un domaine Ω du plan complexe défini par $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \text{ et } \theta_0 < \arg z < \theta_1\}$ avec $\theta_0 < \theta_1$;
- une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, analytique sur tout Ω ;
- une suite de fonctions analytiques $(c_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout n et tout sous-ensemble $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \text{ et } \theta'_0 \leq \arg z \leq \theta'_1\}$ de Ω avec $\theta_0 < \theta'_0 \leq \theta'_1 < \theta_1$, on ait la relation de domination asymptotique :

$$c_{n+1}(z) = o(c_n(z)), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega';$$

on dit que $f(z)$ admet $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)$ pour série asymptotique sur Ω quand $z \rightarrow \infty$. On note :

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega,$$

dès lors que l'on vérifie pour tout $N \geq 0$ et tout $\Omega' \subseteq \Omega$ défini précédemment que :

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z) \sim c_N(z), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega'.$$

Un grand nombre de travaux en calcul intégral et analyse complexe se sont penchés sur l'obtention de telles séries asymptotiques [84, 16, 33, 61, 79]. Afin d'illustrer cette notion, nous proposons de suivre pas à pas un exemple particulièrement simple, à savoir la fonction d'erreur complémentaire erfc , pour laquelle des techniques élémentaires d'intégration par parties s'avèrent suffisantes.

Exemple 10.

La fonction erfc est définie (et analytique) en tout $z \in \mathbb{C}$ par l'intégrale :

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

prise le long de la demi-droite $t : \mathbb{R}^+ \mapsto z + t$, issue de z et se prolongeant horizontalement vers l'infini à droite. Nous proposons de calculer son développement asymptotique lorsque $z \rightarrow \infty$ à l'intérieur du secteur angulaire $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 0 \text{ et } -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

En appliquant une première fois la formule d'intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \frac{-2xe^{-x^2}}{-2x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\left[\frac{e^{-x^2}}{-2x} \right]_{x=z}^{+\infty} - \int_z^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x^2} dx \right) \\ &= \underbrace{\frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}}_{c_0(z)} + \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx}_{R_1(z)}. \end{aligned}$$

En particulier, le premier terme $c_0(z) = e^{-z^2}/z\sqrt{\pi}$ correspond au comportement asymptotique bien connu de $\operatorname{erfc}(z)$ quand $z \rightarrow +\infty$ le long de l'axe réel.

En répétant ce procédé, c.-à-d. en déroulant les restes successifs $R_n(z)$ par la formule d'intégration par parties, on obtient à tout ordre N :

$$\operatorname{erfc}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{(-1)^n \frac{(2n-1)!! e^{-z^2}}{(2z^2)^n z \sqrt{\pi}}}_{c_n(z)} + \underbrace{(-1)^N \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2N-1)!! \int_z^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(2x^2)^N} dx}_{R_N(z)}. \quad (185)$$

Cela nous amène à conjecturer le développement asymptotique suivant :

$$\operatorname{erfc}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{(2n-1)!! e^{-z^2}}{(2z^2)^n z \sqrt{\pi}}}_{c_n(z)}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega. \quad (186)$$

Néanmoins, la seule application de la formule d'intégration par parties ne suffit pas à garantir la validité de ce développement asymptotique, à savoir les conditions énoncées dans la Définition 6. Ce qui suit constitue une preuve rigoureuse.

- Il est d'abord clair que les fonctions c_n sont analytiques sur Ω et vérifient la relation de domination $c_{n+1}(z) = o(c_n(z))$ quand $z \rightarrow \infty$ dans Ω , puisque le quotient $c_{n+1}(z)/c_n(z) = O(1/z^2)$ tend vers 0 lorsque $|z| \rightarrow \infty$.
- Nous devons finalement montrer que $f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z) \sim c_N(z)$ quand $z \in \Omega \rightarrow \infty$, ce qui revient à vérifier que $R_{N+1}(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z) - c_N(z) = o(c_N(z))$ sur tout $\Omega' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 0 \text{ et } \theta'_0 \leq \arg z \leq \theta'_1\}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta'_0 \leq \theta'_1 < \frac{\pi}{2}$.

Fixons $z = u + iv \in \Omega'$ avec $u > 0$ et $v \in \mathbb{R}$. On observe que $u \geq \alpha|z|$ avec $\alpha = \min(\cos \theta'_0, \cos \theta'_1) > 0$ indépendant de z . Nous pouvons borner le module de l'intégrande dans R_{N+1} (185) le long du chemin horizontal en $x = z + t$ ($t \geq 0$) de la manière suivante :

$$\left| \frac{e^{-x^2}}{(2x^2)^{N+1}} \right| = \frac{e^{-\operatorname{Re}(x^2)}}{(2|x|^2)^{N+1}} = \frac{e^{v^2 - (u+t)^2}}{(2|x|^2)^{N+1}} \leq \frac{e^{v^2 - u(u+t)}}{(2|z|^2)^{N+1}},$$

ce qui conduit en fin de compte à la majoration attendue du reste :

$$\begin{aligned} |R_{N+1}(z)| &\leq \frac{2(2N+1)!!}{\sqrt{\pi} (2|z|^2)^{N+1}} \int_0^{+\infty} e^{v^2 - u(u+t)} dt = \frac{2(2N+1)!!}{\sqrt{\pi} (2|z|^2)^{N+1}} \frac{e^{v^2 - u^2}}{u} \\ &\leq \frac{2(2N+1)!!}{\alpha \sqrt{\pi} (2|z|^2)^{N+1} |z|} e^{-\operatorname{Re}(z^2)} = \frac{(2N+1)}{\alpha |z|^2} |c_N(z)| = o(|c_N(z)|) \quad \text{quand } z \in \Omega' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Les séries asymptotiques permettent ainsi de capturer finement le comportement de $f(z)$ lorsque $z \rightarrow \infty$. Cela ne signifie cependant pas que la série en tant que telle converge à z fixé vers $f(z)$. Dans de nombreux cas, les sommes partielles des $c_n(z)$ divergent. C'est notamment le cas de la série asymptotique pour la fonction erfc , examinée dans l'Exemple 10, où l'on observe, à n fixé, que le numérateur $(2n-1)!!$ croît plus rapidement que le dénominateur $(2z^2)^n$. Autrement dit, le développement (186) ne converge pour *aucun* z .

Pour autant, l'évaluation de ces séries divergentes peut s'avérer remarquablement efficace pour approximer $f(z)$, typiquement pour de grandes valeurs de z . Nous illustrons ce phénomène en poursuivant l'exemple de la fonction erfc .

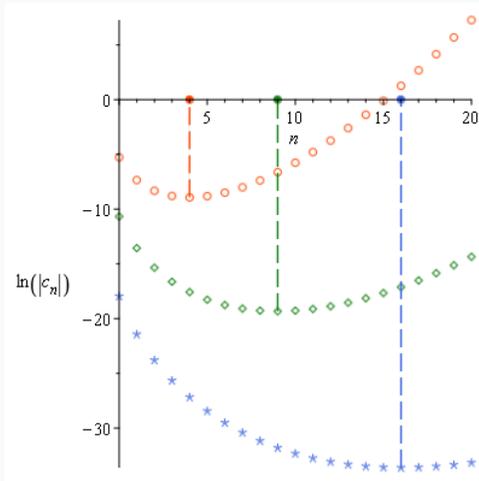
Exemple 11.

Nous avons montré précédemment que $\operatorname{erfc}(z) \sim c_0(z) = e^{-z^2}/z\sqrt{\pi}$ lorsque $z \rightarrow +\infty$. Par conséquent, le même phénomène de « termes en cloche » que celui décrit dans la Section 3 pour le calcul de la probabilité de collision apparaît dans le développement en série entière de erfc en 0 :

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (187)$$

Par conséquent, l'utilisation de cette série se révèle inefficace pour de grandes valeurs de z . L'approximation obtenue en tronquant la série divergente (186) constitue une bien meilleure solution.

La Figure 27a montre le comportement des termes $c_n(z)$ en fonction de n , pour différentes valeurs de z , avec une forme typique de « cuvette ». Les termes commencent en effet par décroître tandis que les sommes partielles se rapprochent de la valeur exacte. Puis, passé un minimum (le « fond de la cuvette »), les termes se remettent à croître et les sommes partielles à s'éloigner de $\operatorname{erfc}(z)$, confirmant le caractère divergent de la série. Empiriquement, l'approximation optimale s'obtient en tronquant le développement asymptotique à l'ordre N correspondant au terme $c_N(z)$ d'amplitude minimale, à savoir $N = z^2$ dans notre cas. En général, l'erreur commise est de l'ordre de grandeur de $|c_N(z)|$ (cf. [16, Sec. 3]).



(a) Amplitude logarithmique des termes $c_n(z)$ et indice optimal de troncature, pour $z = 2$ (cercles rouges), $z = 3$ (diamants verts) et $z = 4$ (étoiles bleues)

z	N	N'
2	–	32
4	–	79
6	–	152
8	15	253
10	11	383
20	7	1 460
40	5	5 769
60	4	12 951
80	4	23 006
100	4	35 934

(b) Nombre de termes nécessaires dans la série divergente (N) et la série entière en 0 (N') pour l'approximation de $\operatorname{erfc}(z)$ avec erreur relative d'au plus 10^{-16}

FIGURE 27 – Série divergente pour la fonction $\operatorname{erfc}(z)$

Dans la Figure 27b, nous nous intéressons au calcul de $y = \operatorname{erfc}(z)$ par la série divergente (186) d'une part et la série entière (187) d'autre part, avec comme contrainte que l'approximation \tilde{y} obtenue ait une erreur relative d'au plus 10^{-16} , c.-à-d. $|\tilde{y} - y|/y \leq 10^{-16}$. Si la série divergente ne permet pas d'atteindre cette précision pour de petites valeurs de z , nous observons en revanche que lorsque z est suffisamment grand ($z \geq 8$ en pratique), l'objectif est atteint, de surcroît avec un nombre remarquablement restreint de termes N . Quant à la série entière, si

en théorie elle converge pour tout z et s'avère en pratique efficace pour de petites valeurs de z , le nombre N' de termes nécessaires devient rapidement prohibitif lorsque z croît. Par ailleurs, l'alternance de signe des termes nous oblige à utiliser jusqu'à 10000 décimales de précision (pour $z = 100$) – obstacle qui pourrait toutefois être contourné grâce à la méthode GMR présentée dans l'Annexe A et utilisée dans la Section 2 pour le calcul de la probabilité de collision.

Nous retiendrons de l'Exemple 11 l'observation générale que les techniques d'approximation par séries divergentes, en dépit de leurs propriétés mathématiques plus faibles que les classiques développements en séries entières convergentes, peuvent dans certains cas constituer une solution efficace, particulièrement en présence de grands paramètres difficiles à appréhender par séries entières.

C Définitions, résultats et faits élémentaires de la théorie de la mesure

Cette annexe résume rapidement les principales définitions de la théorie de la mesure et de l'intégration qui sont nécessaires pour les développements présentés dans ce rapport. Le contenu de cette annexe a été principalement emprunté aux références [15], [10] et [71].

Définition 7 (Fonction Indicatrice).

Soit $B \subset A$. La fonction indicatrice 1_B de B est définie comme :

$$1_B : A \rightarrow \{0, 1\},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B, \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Définition 8 (σ -algèbre).

Soit A un ensemble. Une σ -algèbre de sous-ensembles de A est une famille \mathcal{A} (appelée également tribu) de sous-ensembles de A telle que :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. $\forall E \in \mathcal{A}, A \setminus E \in \mathcal{A}$,
3. pour toute séquence $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 12.

- $\mathcal{P}(A)$ est une (la maximale) σ -algèbre sur A .
- $\{\emptyset, A\}$ est une (la minimale) σ -algèbre sur A .
- Pour $B \subset A$, $\{\emptyset, B, A \setminus B, A\}$ est une σ -algèbre sur A .
- Si $B \neq \emptyset$ et $B \neq A$ alors $\{\emptyset, B, A\}$ n'est pas une σ -algèbre sur A .

Définition 9.

Pour tout système d'ensembles $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(A)$, il existe une plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{G} . Cette σ -algèbre, notée $\sigma(\mathcal{G})$ est la σ -algèbre générée par \mathcal{G} .

Définition 10 (Tribu de Borel ou σ -algèbre topologique).

La σ -algèbre $\sigma(\mathcal{O}^n)$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, générée par le système \mathcal{O}^n de tous les ensembles ouverts de \mathbb{R}^n est appelée la tribu de Borel sur \mathbb{R}^n et ses éléments sont les ensembles de Borel ou ensembles mesurables de Borel.

Noter que la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ peut être générée par la famille de rectangles demi-ouverts dans \mathbb{R}^n , c.-à-d. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{I}$ où $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_j, b_j \in \mathbb{R}\}$.

Définition 11 (Espace Mesurable).

Un espace mesurable est une paire (A, \mathcal{A}) où A est un ensemble et \mathcal{A} est une σ -algèbre de sous-ensembles de A .

Définition 12 (Mesure).

Soit (A, \mathcal{A}) un espace mesurable (voir Définition 11). Une mesure positive sur A (ou, plus précisément, sur (A, \mathcal{A})) est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ satisfaisant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$,

2. pour toute séquence $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints deux à deux dans \mathcal{A} , $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$.

Exemple 13.

- *Mesure de Borel* : une mesure définie sur la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est appelée une mesure de Borel.
- *Mesure de Dirac en a* : soient (A, \mathcal{A}) un espace mesurable et $a \in A$. Alors, l'application $\delta_a : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$, définie pour $A \in \mathcal{A}$ par :

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A, \\ 1 & \text{si } a \in A, \end{cases}$$

est appelée la mesure de Dirac au point a .

- *Mesure de Lebesgue* : la fonction λ^n sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ qui assigne la valeur :

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

à tout rectangle semi-ouvert $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{I}$, est appelée mesure de Lebesgue de dimension n . Si $A \subset \mathbb{R}^n$ alors

$$\lambda^n(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i} \sum (b_1^i - a_1^i) \cdots (b_n^i - a_n^i),$$

où les R_i sont des rectangles semi-ouverts, c.-à-d. $R_i = [a_1^i, b_1^i] \times \cdots \times [a_n^i, b_n^i]$.

La mesure de Lebesgue de dimension 1 représente la « longueur » usuelle d'un segment :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a < b, \quad \lambda([a, b]) = b - a.$$

Il est à remarquer que, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{a\}) = 0$. Du second point de la Définition 12 :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } a < b, \quad \lambda([a, b]) = \lambda(\{a\}) + \lambda(]a, b]) + \lambda(\{b\}) = \lambda(]a, b[).$$

Définition 13 (Espace Mesuré).

Un espace mesuré est un triplet (A, \mathcal{A}, μ) où A est un ensemble, \mathcal{A} est une σ -algèbre de sous-ensembles de A , et μ est une mesure positive sur (A, \mathcal{A}) .

Propriété 1.

Soit (A, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $B, C \in \mathcal{A}$. Alors, $C \subset B \Rightarrow \mu(C) \leq \mu(B)$.

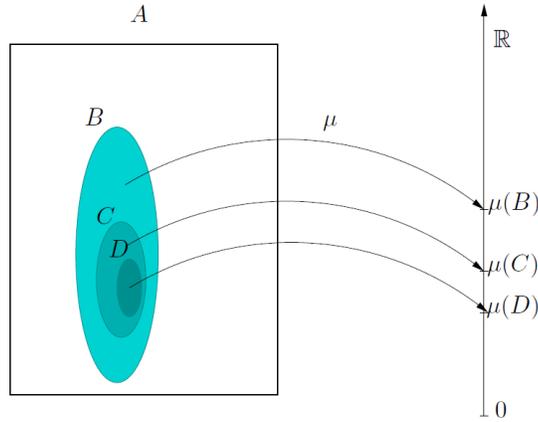


FIGURE 28 – Propriété de monotonie des mesures positives.

Définition 14 (Mesure σ -finie).

Une mesure μ définie sur (A, \mathcal{A}) est dite σ -finie et (A, \mathcal{A}, μ) est appelé espace mesuré σ -fini si A contient une séquence croissante $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'ensembles $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ tels que $\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j = A$, vérifiant $\mu(A_j) < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Définition 15 (Support d'une Mesure).

Soit (A, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Le support d'une mesure positive μ est le plus petit ensemble fermé défini par :

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in A \text{ t.q. } \mu(U) > 0 \text{ pour tout voisinage ouvert } U \text{ de } x\}.$$

Exemple 14.

- Le support de la mesure de Dirac en 0 est le singleton $\{0\}$.
- Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Le support de la mesure de Lebesgue λ est \mathbb{R} . Noter que tout point a une mesure de Lebesgue nulle de même que toute union dénombrable de points.

Définition 16 (Mesure Produit).

Soient $(A_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(A_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, deux espaces mesurés σ -finis. Alors, la fonction

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 &\rightarrow [0, \infty], \\ A_1 \times A_2 &\mapsto \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \end{aligned}$$

est la mesure unique appelée mesure produit, notée $\rho = \mu_1 \otimes \mu_2$ et définie sur l'espace mesuré $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ où $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ est la tribu produit. $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ est appelé l'espace mesuré produit.

La mesure produit ρ est une mesure σ -finie sur $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que

$$\rho(E) = \int \int 1_E(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \int \int 1_E(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx),$$

est vrai pour tout $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Exemple 15.

La mesure de Lebesgue de dimension n , λ^n sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ peut être construite comme une mesure produit, c.-à-d.

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n) = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-d}), \lambda^d \otimes \lambda^{n-d}), \quad \forall n > d \geq 1.$$

D Fonctions mesurables et intégration

Définition 17 (Fonction $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ -mesurable).

Soient (A_1, \mathcal{A}_1) et (A_2, \mathcal{A}_2) deux espaces mesurables. Une fonction $f : A_1 \rightarrow A_2$ est $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ -mesurable si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1, \quad \forall B \in \mathcal{A}_2.$$

Définition 18 (Fonction mesurable).

Soit (A, \mathcal{A}) un espace mesurable. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{A} -mesurable (ou simplement mesurable) si $\{x : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ ou de manière équivalente

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Une fonction mesurable $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

Exemple 16.

Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable. La fonction indicatrice $f(x) = 1_A(x)$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$. Ainsi, pour un ensemble $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \{x : 1_A(x) < c\} &= \emptyset \in \mathcal{A} && \text{si } c \leq 0, \\ \{x : 1_A(x) < c\} &= X \setminus A \in \mathcal{A} && \text{si } c \in (0, 1], \\ \{x : 1_A(x) < c\} &= X \in \mathcal{A} && \text{si } c > 1. \end{aligned}$$

Définition 19 (Fonction simple).

Une fonction simple $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace mesurable (A, \mathcal{A}) est une fonction de la forme :

$$g(x) = \sum_{j=1}^M y_j 1_{A_j}(x),$$

avec un nombre fini d'ensembles disjoints $A_1, \dots, A_M \in \mathcal{A}$ et $y_1, \dots, y_M \in \mathbb{R}$.

Si $y_i \geq 0$ pour tout i , la fonction g est dite simple positive.

Définition 20.

On suppose que μ est une mesure positive sur l'espace mesurable (A, \mathcal{A}) et f est mesurable

- Si $f = \sum_{j=1}^M y_j 1_{A_j}$ est une fonction simple positive alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^M y_i \mu(A_i).$$

- Si $f \geq 0$ alors

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \leq f, g \text{ est simple positive} \right\}.$$

- Pour une fonction f arbitraire,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

où $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = -\min\{f, 0\}$.

Si (B, \mathcal{B}) est mesurable, l'intégrale de f sur B est définie par :

$$\int_B f d\mu = \int f 1_B d\mu.$$

Théorème 4 (Fubini).

Soient $(A_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(A_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ des espaces mesurés σ -finis et soit $f : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -mesurable. Si, au moins une de ces intégrales est finie

$$\int_{A_1 \times A_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2), \quad \int_{A_2} \int_{A_1} |f(x, y)| \mu_1(dx) \mu_2(dy), \quad \int_{A_1} \int_{A_2} |f(x, y)| \mu_2(dy) \mu_1(dx)$$

alors

$$\int_{A_1 \times A_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{A_2} \int_{A_1} f(x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \int_{A_1} \int_{A_2} f(x, y) \mu_2(dy) \mu_1(dx).$$

Définition 21 (Densité).

Soient (A, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et ρ une fonction positive réelle \mathcal{A} -mesurable, la fonction

$$\mu_\rho : A \mapsto \int_A \rho d\mu = \int 1_A \rho d\mu = \int 1_A(x) \rho(x) \mu(dx),$$

est une mesure sur (A, \mathcal{A}) appelée mesure de fonction densité ρ par rapport à μ et notée $\mu_\rho = \rho \mu$.

Traditionnellement, la densité est notée $\rho = \frac{d\mu_\rho}{d\mu}$.

Par exemple, pour la mesure μ_I gaussienne ($\mu_I = \mu_g$), de moyenne $m \in \mathbb{R}^n$, et de matrice de covariance Σ , donnée par :

$$\mu_I(A) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi \det(\Sigma))^n}} \int_A \exp\left(-\frac{(X-m)^T \Sigma^{-1} (X-m)}{2}\right) dX, \quad (188)$$

où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sont les notations pour la complétion de la tribu de Borel sur \mathbb{R}^n et l'intégrale dans (188) est définie par rapport à la mesure de Lebesgue à n dimensions standard, la densité de la mesure μ_I est une fonction $\rho_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\rho_I(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \det(\Sigma))^n}} \exp\left(-\frac{(X-m)^T \Sigma^{-1} (X-m)}{2}\right). \quad (189)$$

En utilisant les notations de la Définition 21, on a $\rho_I = \frac{d\mu_I}{d\lambda}$.

E Image d'une mesure

Soit le cône $M(S)_+$ de toutes les mesures de Borel non négatives, définies sur le sous ensemble S d'un espace mesurable. Afin d'être complet, nous rappelons les éléments classiques concernant la notion de *mesure image*, qui est, en gros, *l'image d'une mesure donnée par une fonction donnée* :

Définition 22. [85, Théorème 1.44] (*Mesure image*)

Soient deux espaces mesurables (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) , une fonction $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable $h : X \rightarrow Y$ et une mesure $\mu \in M(X)_+$. La mesure image (ou la mesure image par la fonction h) $\mu_h = h_*\mu \in M(Y)_+$ définie sur \mathcal{B} est donnée par :

$$\mu_h(B) = h_*\mu(B) = \mu(h^{-1}(B)), \quad (190)$$

pour tous les ensembles de Borel mesurables $B \subseteq Y$.

Pour un ensemble quelconque $B \subseteq Y$, $h^{-1}(B)$ est la *préimage* de B par l'application h , c.-à-d.

$$h^{-1}(B) = \{x \in X : h(x) \in B\}.$$

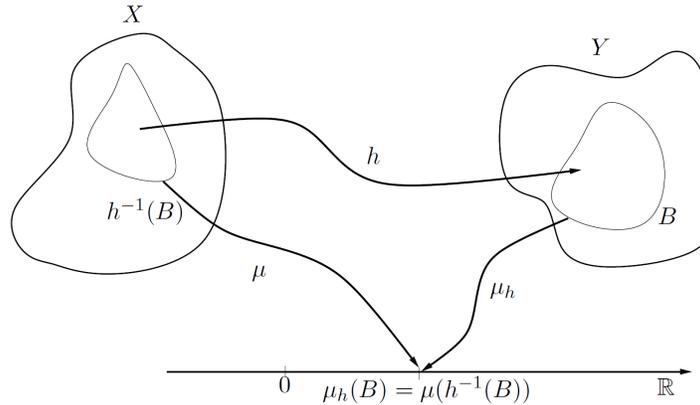


FIGURE 29 – Mesure image μ_h .

Théorème 5. [15, Théorème 3.6.1] (*Changement de variables*)

Soit $\mu \in M(X)_+$. Une fonction mesurable g sur Y est intégrable par rapport à la mesure image $h_*\mu \in M(Y)_+$ si et seulement si la composition $g \circ h$ est intégrable par rapport à la mesure $\mu \in M(X)_+$. Dans ce cas :

$$\int_Y g \, d(h_*\mu) = \int_X g \circ h \, d\mu. \quad (191)$$

Un corollaire très utile peut être déduit du Théorème 5.

Corollaire 1. [71, Corollaire 15.8] (*Théorème de transformation générale*)

Soit $h : X \rightarrow Y$, un C^1 -difféomorphisme. Une fonction g mesurable sur Y est intégrable par rapport à λ^n si et seulement si, la fonction $g \circ h \cdot |\det Dh| : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est intégrable par rapport à λ^n . Dans ce cas,

$$\int_Y g(y) \lambda^n(dy) = \int_X g(h(x)) |\det Dh(x)| \lambda^n(dx). \quad (192)$$

F Les repères de référence

F.1 Le repère géocentrique équatorial

Le repère géocentrique équatorial $\mathcal{R}_{\text{in}} = (O_T, \vec{u}_{X_{\text{in}}}, \vec{u}_{Y_{\text{in}}}, \vec{u}_{Z_{\text{in}}})$ est défini comme un repère pseudo-inertiel dans [80] par exemple, sous le nom *Geocentric Equatorial Coordinate System* ou *Earth Center Inertial*, dont l'origine est située au centre de la Terre, représenté par le point O_T et dont la base associée \mathcal{B}_{in} est définie par les vecteurs $[\vec{u}_{X_{\text{in}}}, \vec{u}_{Y_{\text{in}}}, \vec{u}_{Z_{\text{in}}}]$ où :

- $\vec{u}_{Z_{\text{in}}}$ pointe vers le pôle nord terrestre suivant l'axe de rotation de la terre,
- $\vec{u}_{X_{\text{in}}}$ indique le point d'équinoxe vernal γ (point d'intersection ascendant ou nœud ascendant) porté par la droite obtenue par l'intersection entre le plan de l'écliptique (plan dans lequel se déplace la terre dans son mouvement autour du soleil) et le plan de l'équateur terrestre,
- l'axe $(O_T, \vec{u}_{Y_{\text{in}}})$ qui complète le trièdre orthogonal direct,

Ce système de référence est illustré par la Figure 30.

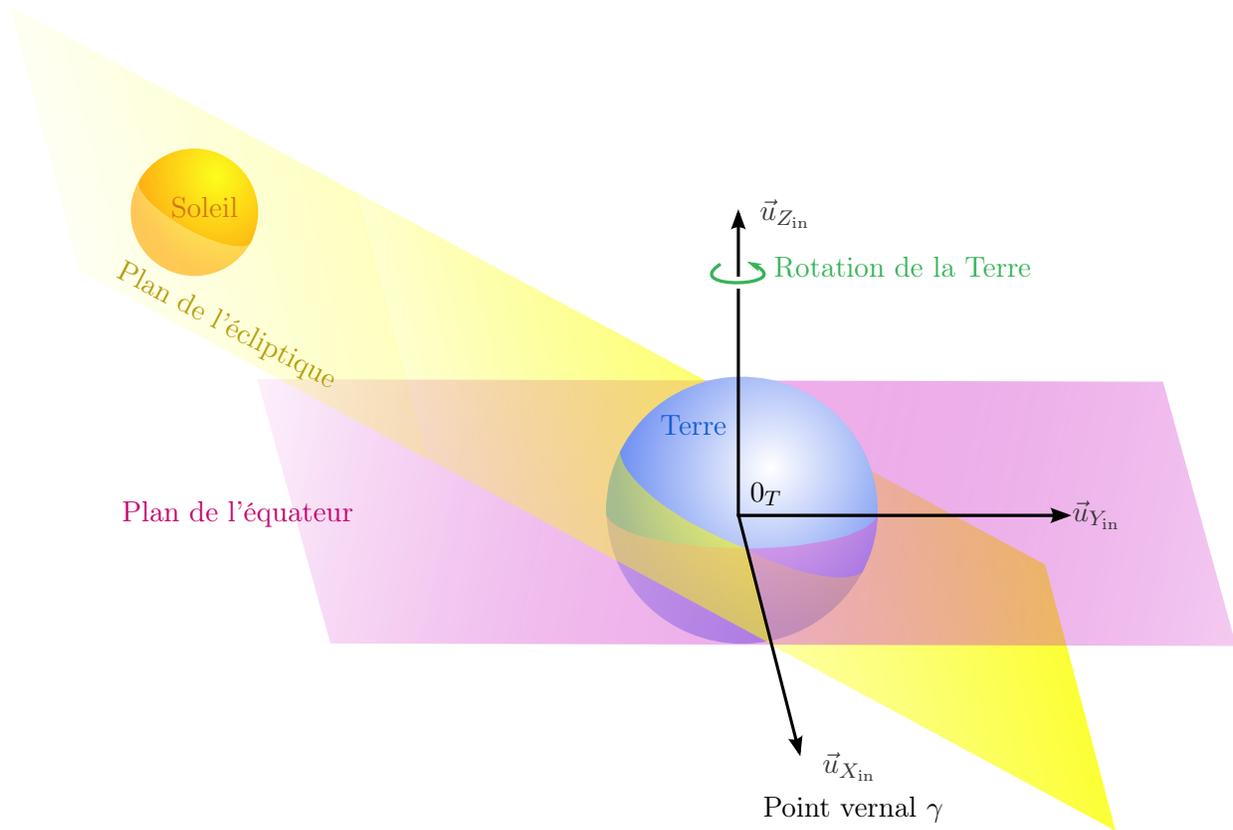


FIGURE 30 – Repère géocentrique inertiel

Une position dans l'espace est repérée par ses trois coordonnées cartésiennes x , y et z ou par ses trois coordonnées sphériques r (distance radiale), α (ascension droite) et δ (déclinaison) reliées

entre elles de la façon suivante et illustrées par la Figure 31.

$$x = r \cos \delta \cos \alpha, \quad (193a)$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha, \quad (193b)$$

$$z = r \sin \delta. \quad (193c)$$

Les relations inverses s'écrivent :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (194a)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (194b)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad (194c)$$

où α est choisi tel que $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$ pour $x > 0$ et $\alpha \in [90^\circ, 270^\circ]$ pour $x < 0$.

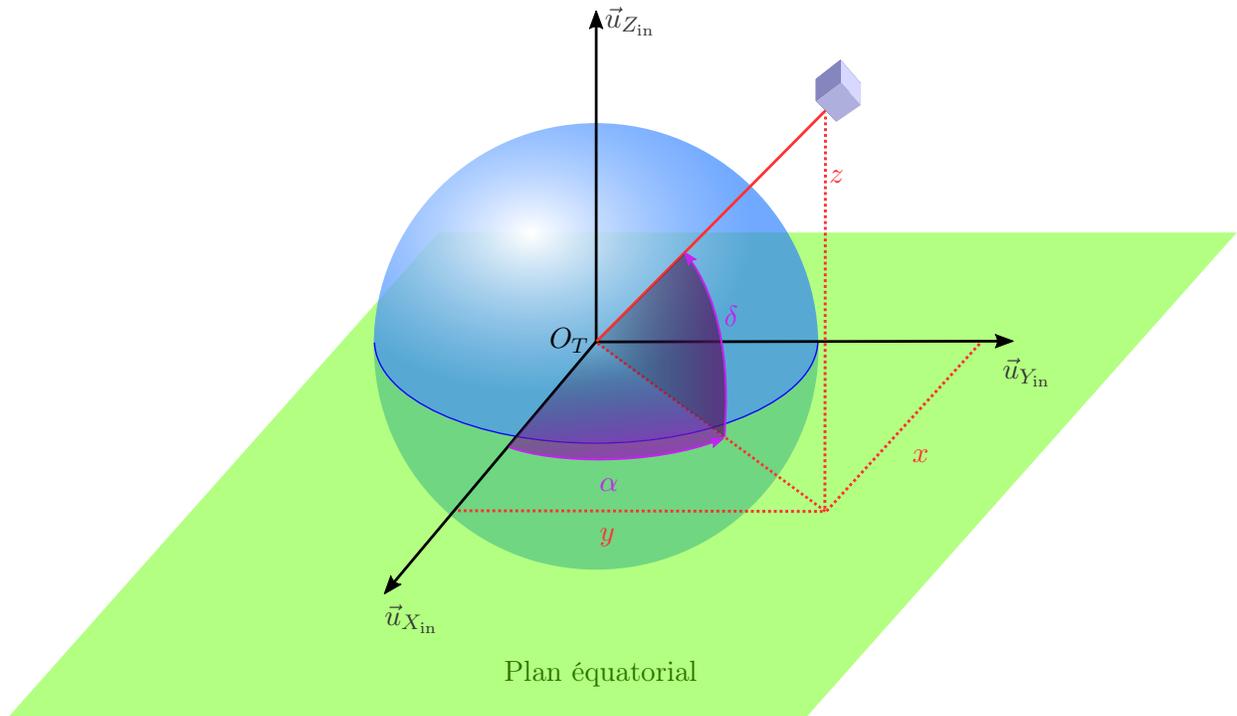


FIGURE 31 – Ascension droite α et déclinaison δ d'un point dans l'espace

F.2 Repères orbitaux locaux

Les repères locaux sont très adaptés pour représenter les composantes des vecteurs et spécifiquement les accélérations dues aux perturbations. Ces repères locaux nous permettent d'exprimer la géométrie relative d'une formation de satellites.

F.2.1 Le repère orbital local RSW (RTN) de Gauss

Un repère local permettant de modéliser le mouvement relatif est *le repère de Gauss* $R_{OLG} = (O_S, \vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ où l'origine O_S est le centre de masse du satellite et ses axes, pouvant être notés *RSW* ou *RTN* (Radial, Transverse, and Normal) comme dans [80], sont définis par :

- l'axe \vec{u}_N est normal au plan orbital défini par le vecteur position et vitesse, colinéaire au vecteur moment cinétique \vec{h} (cross-track direction),
- l'axe \vec{u}_R est radial, colinéaire à la direction centre de la Terre - satellite,
- l'axe \vec{u}_T qui complète le trièdre orthogonal direct (along-track direction).

Le repère $(S, \vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$, noté \mathcal{R}_{OLG} et la base associée \mathcal{B}_{OLG} sont illustrés sur la Figure 32.

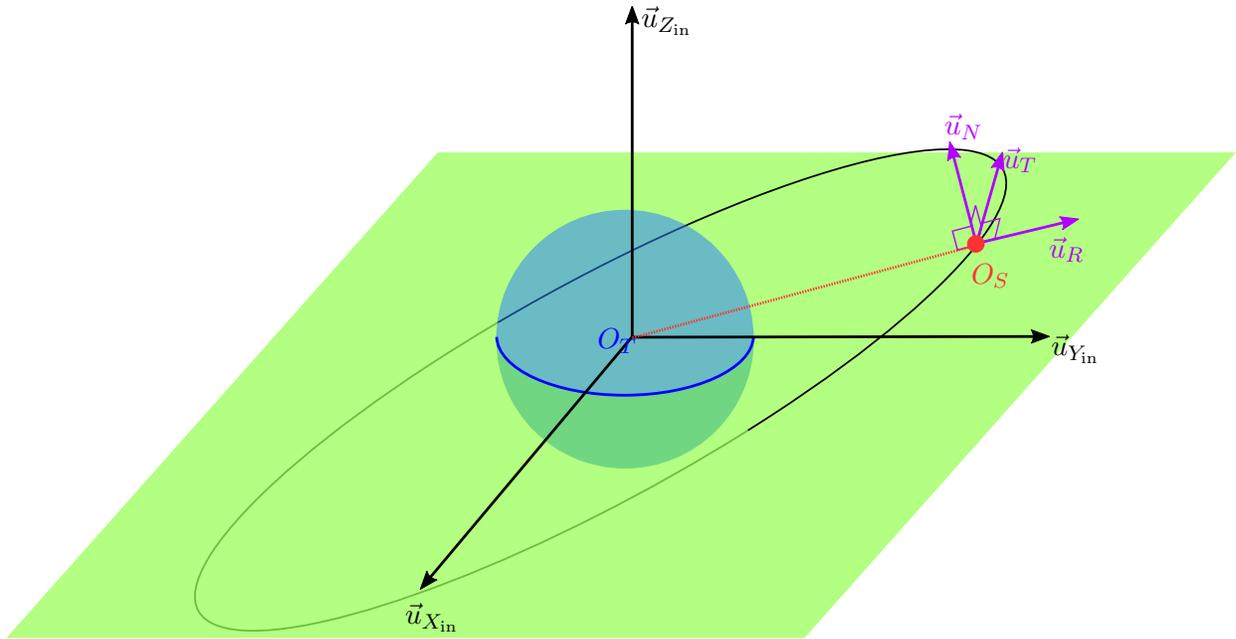


FIGURE 32 – Repère orbital local de Gauss

Il est possible de définir le repère orbital local à partir de trois rotations transformant la base géocentrique équatoriale \mathcal{B}_{in} en une base orbitale locale \mathcal{B}_{OLG} . Celle-ci se déduit de la base géocentrique équatoriale \mathcal{B}_{in} par la série de transformations suivantes (voir la Figure 33) :

- une rotation autour de l'axe $(O_T, \vec{u}_{Z_{in}})$ d'angle Ω ,
- une rotation autour de l'axe (O_T, \vec{u}_n) d'angle i ,
- une rotation autour de l'axe (O_T, \vec{u}_h) d'angle $\omega + \nu$,

où \vec{u}_n est un vecteur unitaire dans la direction de l'intersection entre le plan de l'équateur et le plan de l'orbite et \vec{u}_h est un vecteur directeur perpendiculaire au plan de l'orbite. La Figure 34 montre ces rotations dans l'espace et la Figure 35 présente les rotations planes associées à ces transformations. On a ainsi les coordonnées de ces vecteurs de base dans la base inertielle \mathcal{B}_{in} :

$$\begin{aligned}
\vec{u}_R &= \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \cos i \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \cos i \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \sin i \sin(\omega + \nu) \end{bmatrix}, \\
\vec{u}_T &= \begin{bmatrix} -\cos i \cos(\omega + \nu) \sin \Omega - \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \cos i \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \sin i \cos(\omega + \nu) \end{bmatrix}, \\
\vec{u}_N &= \begin{bmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{195}$$

Si $\vec{\sigma}$ est un vecteur de l'espace de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{in}}}, \tag{196}$$

dans la base géocentrique équatoriale et de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OLG}}}, \tag{197}$$

dans la base orbitale locale, la transformation des coordonnées exprimées dans la base orbitale locale de Gauss en les coordonnées exprimées dans la base géocentrique équatoriale est donnée par :

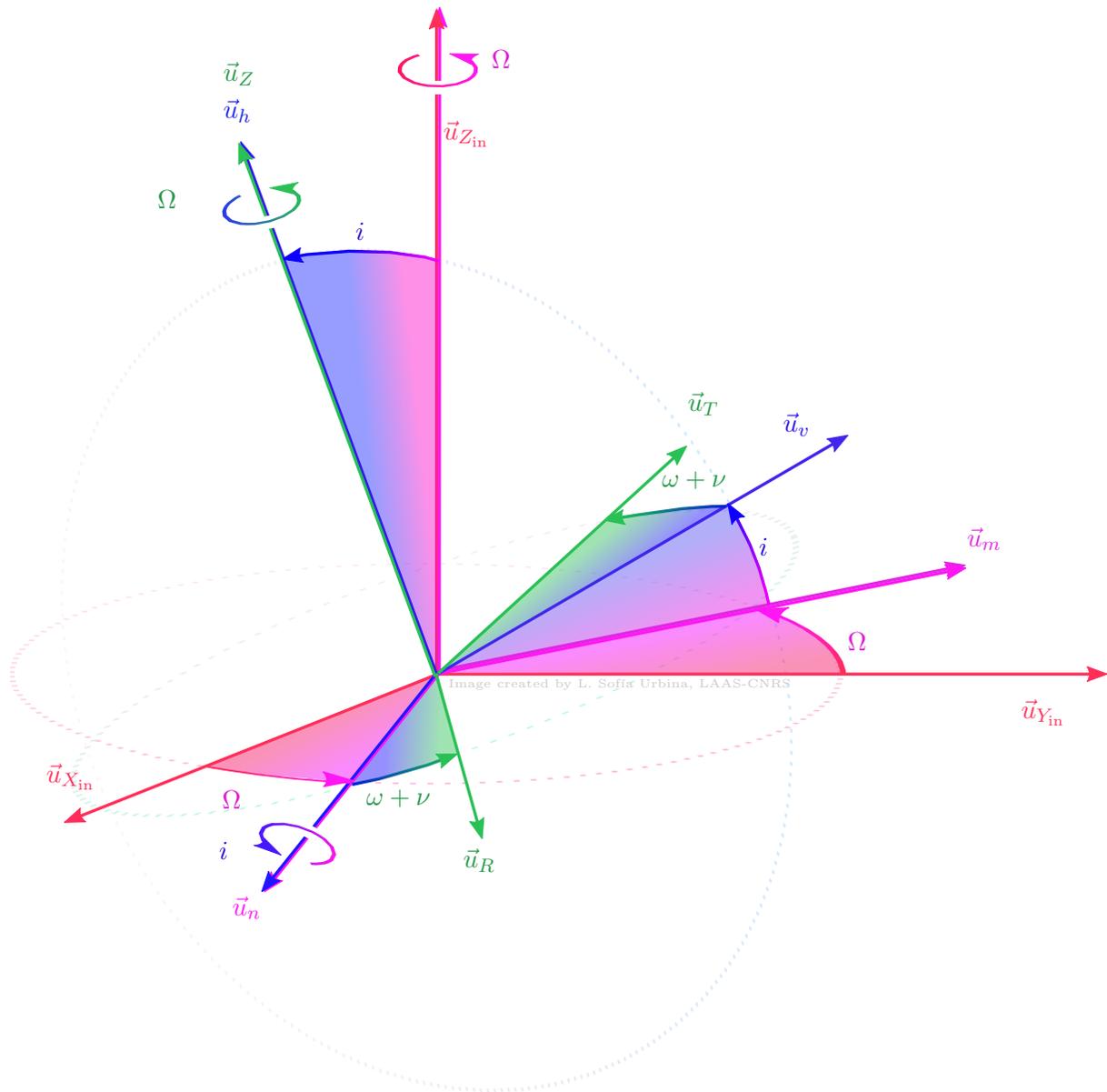


FIGURE 34 – Rotations dans l'espace entre la base géocentrique équatoriale et la base orbitale locale de Gauss.

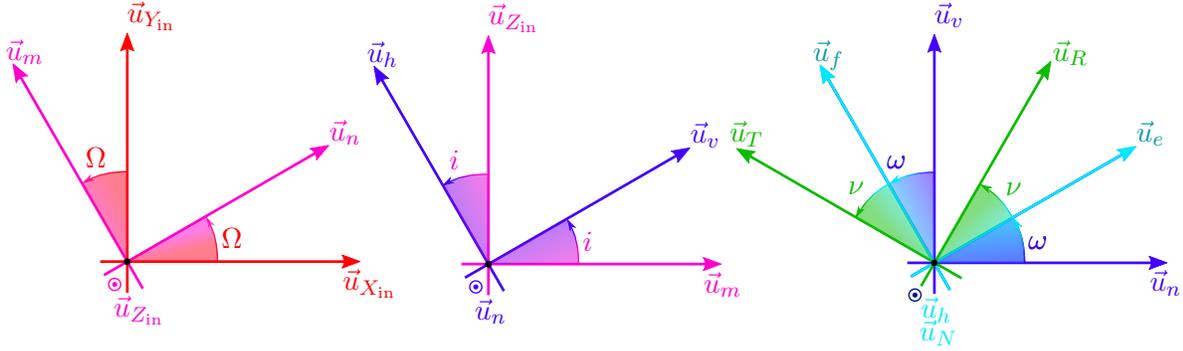


FIGURE 35 – Rotations planes entre le base géocentrique équatoriale et la base orbitale locale de Gauss.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{in}} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) & -\sin(\omega + \nu) & 0 \\ \sin(\omega + \nu) & \cos(\omega + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OLG}}, \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \cos i \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \cos i \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \sin i \sin(\omega + \nu) \\ -\cos i \cos(\omega + \nu) \sin \Omega - \sin(\omega + \nu) \cos \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \cos i \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \sin(\omega + \nu) \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ \sin i \cos(\omega + \nu) & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OLG}}. \tag{198}
 \end{aligned}$$

Le repère orbital local de Gauss s'obtient alors par la translation de l'origine du repère géocentrique équatorial telle que : $\overrightarrow{O_T O_S} = r \vec{u}_R$.

Ce repère est lié au satellite et ne doit pas être confondu avec le repère appelé LVLH (Local-Vertical-Local-Horizontal) $R_{LVLH} = (O_S, \vec{u}_{X_{LVLH}}, \vec{u}_{Y_{LVLH}}, \vec{u}_{Z_{LVLH}})$ qui est, en général, défini dans la littérature avec pour origine O_S , le centre de masse du satellite et les axes définis par :

- l'axe portant le vecteur $\vec{u}_{Z_{LVLH}}$ est radial orienté du satellite vers le centre de la terre,
- l'axe portant le vecteur $\vec{u}_{Y_{LVLH}}$ est normal au plan orbital dans la direction opposée du moment cinétique,
- l'axe portant le vecteur $\vec{u}_{X_{LVLH}} = \vec{u}_{Y_{LVLH}} \wedge \vec{u}_{Z_{LVLH}}$ est dans la direction de la vitesse et tel que $[\vec{u}_{X_{LVLH}}, \vec{u}_{Y_{LVLH}}, \vec{u}_{Z_{LVLH}}]$ forme un trièdre orthonormé direct.

Il est à noter que la littérature anglo-saxonne a des notations particulières pour le repère LVLH :

- l'axe portant le vecteur $\vec{u}_{Z_{LVLH}}$ est appelé **R-bar**,
- l'axe portant le vecteur $\vec{u}_{Y_{LVLH}}$ est appelé **H-bar**,
- l'axe portant le vecteur $\vec{u}_{X_{LVLH}} = \vec{u}_{Y_{LVLH}} \wedge \vec{u}_{Z_{LVLH}}$ est appelé **V-bar**.

F.2.2 Le repère orbital local NTW de Frenet

Dans le cas du mouvement perturbé par le frottement atmosphérique, le repère le plus naturel est le repère NTW de Frénet $R_{OLF} = (O_S, \vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_W)$ défini par son origine O_S située au centre de masse du satellite et les axes portant les vecteurs $[\vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_W]$.

- L'axe portant le vecteur \vec{u}_T est toujours parallèle au vecteur vitesse du satellite \vec{v} (in-track direction) ;

- l'axe portant le vecteur \vec{u}_W est perpendiculaire au plan orbital du satellite (cross-track direction);
- l'axe portant le vecteur \vec{u}_N est tel que $[\vec{u}_N, \vec{u}_T, \vec{u}_W]$ forme un trièdre orthonormé direct.

Ce repère est également lié au satellite. Les formules de passage entre les deux bases locales B_{OLG} et B_{OLF} sont données dans [70] par :

$$\begin{aligned}\vec{u}_R &= \frac{n \cdot a}{v\sqrt{1-e^2}} [e \sin \nu \vec{u}_T + (1 + e \cos \nu) \vec{u}_N] = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [e \sin \nu \vec{u}_T + (1 + e \cos \nu) \vec{u}_N], \\ \vec{u}_S &= \frac{n \cdot a}{v\sqrt{1-e^2}} [(1 + e \cos \nu) \vec{u}_T - e \sin \nu \vec{u}_N] = \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [(1 + e \cos \nu) \vec{u}_T - e \sin \nu \vec{u}_N].\end{aligned}\tag{199}$$

ou réciproquement :

$$\begin{aligned}\vec{u}_N &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [(1 + e \cos \nu) \vec{u}_R - e \sin \nu \vec{u}_S], \\ \vec{u}_T &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos \nu}} [e \sin \nu \vec{u}_R + (1 + e \cos \nu) \vec{u}_S].\end{aligned}\tag{200}$$

F.3 Le repère équinoxial

Le repère équinoxial $\mathcal{R}_{EQX} = (O_S, \vec{u}_p, \vec{u}_q, \vec{u}_h)$ est un repère orbital local centré sur le satellite en O_S et dont la base équinoxiale $\mathcal{B}_{EQX} = (\vec{u}_p, \vec{u}_q, \vec{u}_h)$ est définie de la façon suivante [14, Section 10.4], [80]. Les vecteurs $\vec{u}_p, \vec{u}_q, \vec{u}_h$ sont obtenus à l'aide de la séquence de rotations suivantes :

- rotation de la base géocentrique équatoriale $(\vec{u}_{X_{in}}, \vec{u}_{Y_{in}}, \vec{u}_{Z_{in}})$ de l'angle Ω autour de l'axe porté par le vecteur $\vec{u}_{Z_{in}}$ pour obtenir $(\vec{u}_n, \vec{u}_m, \vec{u}_{Z_{in}})$,
- rotation de $(\vec{u}_n, \vec{u}_m, \vec{u}_{Z_{in}})$ d'un angle i autour du nouvel axe porté par le vecteur du nœud ascendant \vec{u}_n pour obtenir $(\vec{u}_n, \vec{u}_v, \vec{u}_h)$,
- rotation de $(\vec{u}_n, \vec{u}_v, \vec{u}_h)$ d'un angle $-\Omega$ autour du nouvel axe porté par \vec{u}_h confondu avec la direction du moment cinétique pour obtenir $(\vec{u}_p, \vec{u}_q, \vec{u}_h)$.

La Figure 36 montre le repère orbital équinoxial alors que la Figure 37 donne les trois rotations dans l'espace le définissant et la Figure 38 illustre les rotations planes transformant la base géocentrique équatoriale en la base équinoxiale.

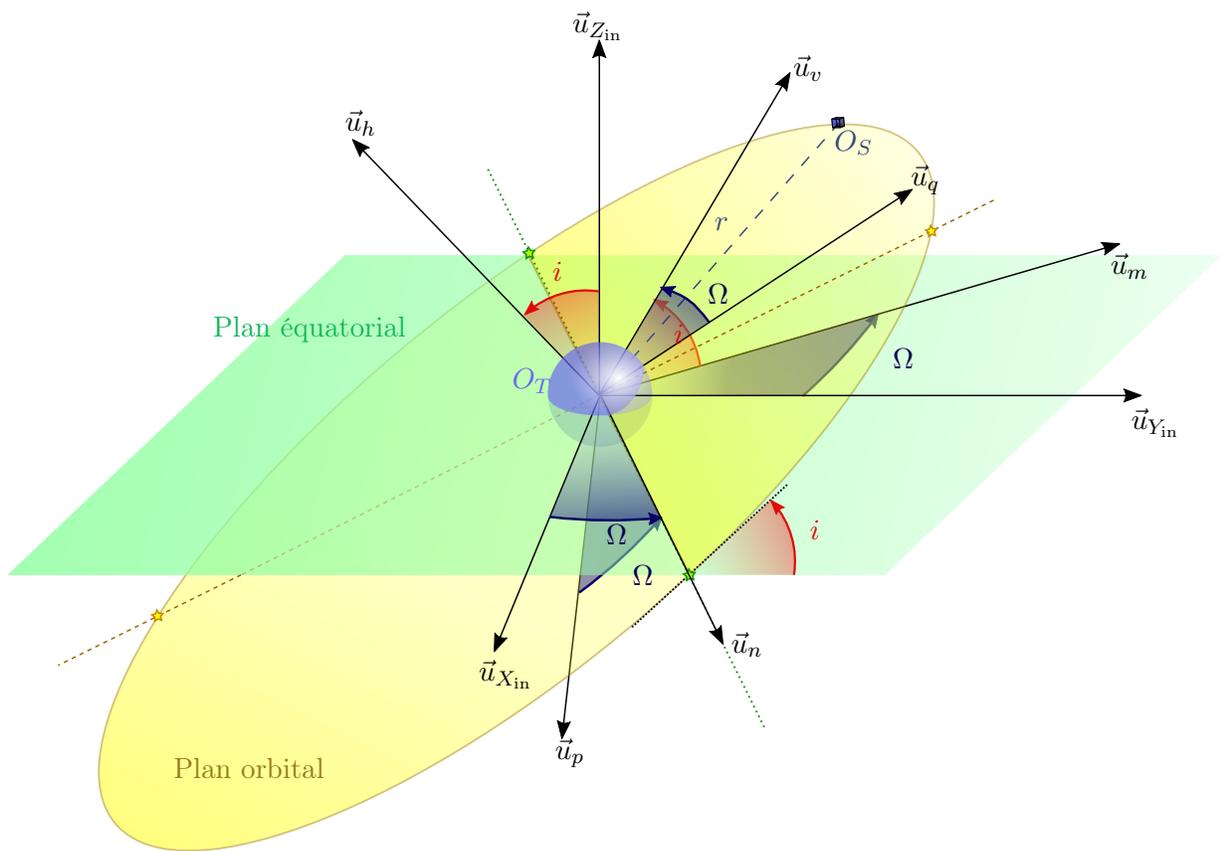


FIGURE 36 – Représentation des angles de rotation entre le repère géocentrique équatorial et le repère équinoxial.

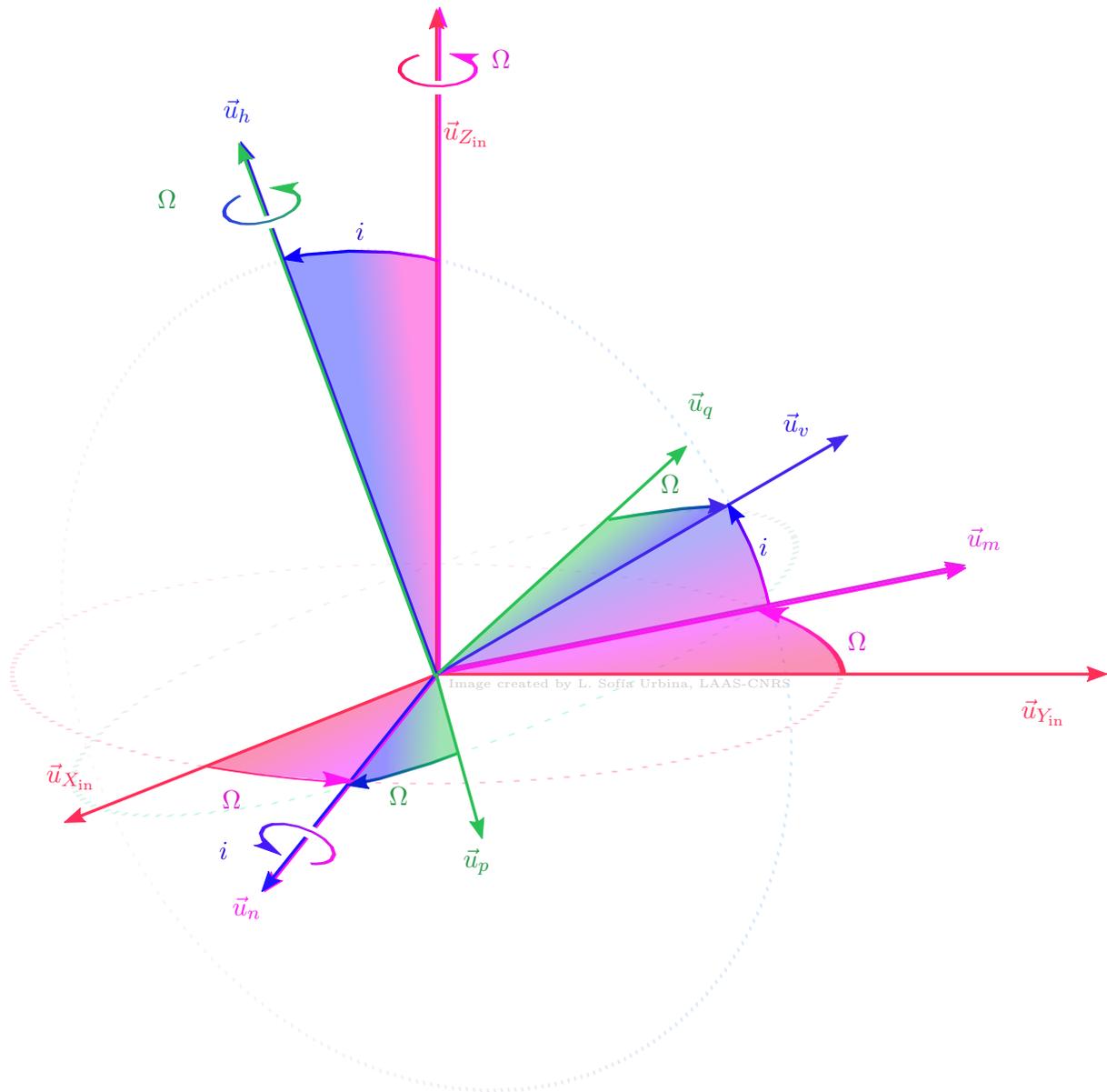


FIGURE 37 – Rotations dans l'espace entre la base géocentrique équatoriale et la base équinoxiale.

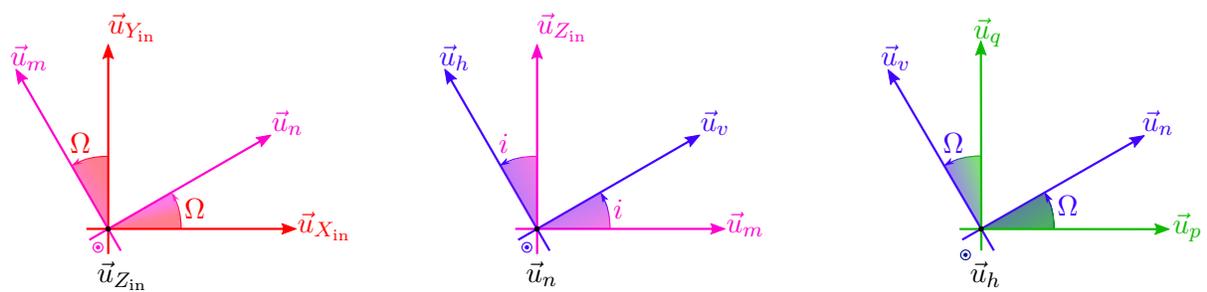


FIGURE 38 – Rotations planes entre la base géocentrique équatoriale et la base équinoxiale.

Si $\vec{\sigma}$ est un vecteur de l'espace de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} , \quad (201)$$

dans la base géocentrique équatoriale et de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} , \quad (202)$$

dans la base équinoxiale, la transformation des coordonnées exprimées dans la base équinoxiale en les coordonnées exprimées dans la base géocentrique équatoriale est donnée par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} , \\ &= \begin{bmatrix} \cos i \sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega & \cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) & -\sin i \sin \Omega \\ \cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) & \sin^2 \Omega + \cos i \cos^2 \Omega & \sin i \cos \Omega \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} . \end{aligned} \quad (203)$$

La matrice de rotation précédente peut être réécrite en utilisant les éléments orbitaux équinoxiaux :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{in}}} &= \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} (1 + i_x^2 - i_y^2) \cos L + 2i_x i_y \sin L \\ 2i_x i_y \cos L + (1 - i_x^2 + i_y^2) \sin L \\ 2(i_x \sin L - i_y \cos L) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} 2i_x i_y \cos L - (1 + i_x^2 - i_y^2) \sin L & 2i_y \\ (1 - i_x^2 + i_y^2) \cos L - 2i_x i_y \sin L & -2i_x \\ 2(i_x \cos L + i_y \sin L) & 1 - i_x^2 - i_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} . \end{aligned} \quad (204)$$

Références

- [1] M.R. Akella and K.T. Alfriend. Probability of collision between space objects. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(5) :769–772, 2000.
- [2] A. Alfano. Aerospace Support to Space Situation Awareness. *Applicationes Mathematicae*, oct 2002.
- [3] S. Alfano. A numerical implementation of spherical objet collision probability. *Journal of Astronautical Sciences*, 53(1), Janvier-Mars 2005.
- [4] S. Alfano. Addressing nonlinear relative motion for spacecraft collision probability. In *Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 06-6760, Keystone, Colorado, USA, August 2006.
- [5] S. Alfano. Satellite collision probability enhancements. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 29(3) :588–592, 2006.
- [6] S. Alfano. Beta conjunction analysis tool. In *Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 07-393, Mackinac Island, MI, USA, August 2007.
- [7] S. Alfano. Review of conjunction probability methods for short-term encounters (aas 07-148). *Advances in the Astronautical Sciences*, 127(1) :719, 2007.
- [8] S. Alfano. Satellite conjunction Monte Carlo analysis. *Advances in the Astronautical Sciences*, 134 :2007–2024, jan 2009.
- [9] K.T Alfriend, M.R. Akella, J. Frisbee, J.L. Foster, D.-J. Lee, and M. Wilkins. Probability of collision error analysis. *Space Debris*, 1(1) :21–35, 1999.
- [10] L. Ambrosio. *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations. Lecture Notes in Mathematics*, volume 1927, chapter Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields. Springer-Verlag, 2008.
- [11] D. Arzelier, F. Bréhard, M. Joldes, J.B. Lasserre, L. Martire, and A. Rondepierre. Global probability of collision : problem modelling via occupation measure. Technical Note AJ/AR/EO-2016-6457, LAAS-CNRS, Octobre 2017.
- [12] D. Arzelier, F. Bréhard, M. Joldes, J.B. Lasserre, and A. Rondepierre. Analysis and review of the literature for the computation of the (global) probability of collision between space objects : Multiple long-term/short-term encounters. Rapport technique R-S19-BS-0005-051, LAAS-CNRS, Décembre 2020.
- [13] D. Arzelier, F. Bréhard, and M. Joldes. Comment on "series for collision probability in short-encounter model". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 43(5) :1034–1036, Mai 2020.
- [14] R.H. Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 1999.
- [15] V. I. Bogachev. *Measure theory*, volume I and II. Springer Science & Business Media, 2007.
- [16] J.P. Boyd. The devil’s invention : asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series. *Acta Applicandae Mathematica*, 56(1) :1–98, 1999.
- [17] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1994.
- [18] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.

- [19] F.K. Chan. Collision Probability Analysis for Earth-orbiting Satellites. *Advances in the Astronautical Sciences*, 96, 1997.
- [20] F.K. Chan. *Spacecraft Collision Probability*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [21] F.K. Chan. Formulation of collision probability with time-dependent probability density functions. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, number AAS 15-233, Williamsburg, VA, USA, January 2015.
- [22] F.K. Chan. Hovering collision probability. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, number AAS 15-234, Williamsburg, VA, USA, January 2015.
- [23] K. Chan. Spacecraft collision probability for long-term encounters. Number AAS 03-549, Big Sky, Montana, USA, 2003.
- [24] S. Chevillard and M. Mezzarobba. Multiple-Precision Evaluation of the Airy Ai Function with Reduced Cancellation. In A. Nannarelli, P.-M. Seidel, and P. T. P. Tang, editors, *21st IEEE SYMPOSIUM on Computer Arithmetic*, pages 175–182, Los Alamitos, CA, Avril 2013. IEEE Computer Society.
- [25] V. Coppola. Evaluating the short encounter assumption of the probability of collision formula. In *Proceedings of the AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 12-248, Minneapolis, Minnesota, USA, 2012.
- [26] V.T. Coppola. Including Velocity Uncertainty in the Probability of Collision between Space Objects. *Advances in the Astronautical Sciences*, 143, 2012.
- [27] V.T. Coppola and J. Woodburn. Determination of close approaches based on ellipsoidal threat volumes. *Spaceflight mechanics*, pages 1013–1023, 1999.
- [28] F. Dabbene, D. Henrion, and C.M. Lagoa. Simple approximations of semialgebraic sets and their applications to control. *Automatica*, 78 :110–118, 2017.
- [29] K.J. DeMars, Y. Chang, and M.K. Jah. Collision probability with gaussian mixture orbit uncertainty. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 37(3) :979–985, 2014.
- [30] A.R. DiDonato and M.P. Jarnagin. Integration of the general bivariate gaussian distribution over an offset circle. *Mathematics of Computation*, 15 :375–382, 1961.
- [31] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, France, 2nd edition, 1992.
- [32] J.C. Dolado, P. Legendre, R. Garmier, B. Revelin, and X. Pena. Satellite collision probability computation for long-term encounters. In *AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, number AAS 11-419, Gridwood, Alaska, USA, Janvier 2011.
- [33] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University press, 2009.
- [34] J. L. Foster and H. S. Estes. A parametric analysis of orbital debris collision probability and maneuver rate for space debris. *NASA/JSC-25898*, August 1992.
- [35] R. García-Pelayo and J. Hernando-Ayuso. Series for collision probability in short-encounter model. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 39(8) :1908–1916, 2016.
- [36] W. Gawronski, J. Müller, and M. Reinhard. Reduced cancellation in the evaluation of entire functions and applications to the error function. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(6) :2564–2576, 2007.
- [37] W.M. Haddad and V. Chellaboina. *Nonlinear Dynamical Systems and Control*. Princeton University Press, 2008.

- [38] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis*, volume 1 of *Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, New York, New York, USA, 1974.
- [39] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis*, volume 2 of *Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, New York, New York, USA, 1974.
- [40] D. Henrion, J.B. Lasserre, and C. Savorgnan. Approximate volume and integration for basic semialgebraic sets. *SIAM review*, 51(4) :722–743, 2009.
- [41] N.L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. Continuous univariate distributions, vol. 1-2, 1994.
- [42] Z.N. Khutorovsky, V.F. Boikov, and S.Y. Kamensky. Direct method for the analysis of collision probability of artificial space objects in leo : Techniques, results and applications. In *Proceedings of the first European Conference on Space Debris*, Darmstadt, Germany, April 1993.
- [43] S. Kotz, N.L. Johnson, and D.W. Boyd. Series representation of the distribution of quadratic forms in normal variables i. central case. *Ann. Math. Statist.*, 38 :823–837, 1967.
- [44] S. Kotz, N.L. Johnson, and D.W. Boyd. Series representation of the distribution of quadratic forms in normal variables ii. non-central case. *Ann. Math. Statist.*, 38 :838–848, 1967.
- [45] S.G. Krantz and H.R. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions*, volume 4 of *Advanced Textbooks in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1992.
- [46] Y.K. Kwok. *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [47] P. Lairez, M. Mezzarobba, and M. Safey El Din. Computing the volume of compact semi-algebraic sets. In *Proceedings of the 2019 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 259–266, 2019.
- [48] J.B Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on optimization*, 11(3) :796–817, 2001.
- [49] J.B. Lasserre. *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*. Cambridge University Press, 2015.
- [50] J.B. Lasserre. Volume of sublevel sets of homogeneous polynomials. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 3(2) :372–389, 2019.
- [51] J.B. Lasserre and Y. Emin. Semidefinite relaxations for lebesgue and gaussian measures of unions of basic semialgebraic sets. *Mathematics of Operations Research*, 44(4) :1477–1493, 2019.
- [52] J.B. Lasserre and E.S. Zeron. Solving a class of multivariate integration problems via laplace techniques. *Applicationes Mathematicae*, 2001.
- [53] B.Y. Levin. *Lectures on Entire Functions*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1996.
- [54] J. Lofberg. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, 2004. <http://yalmip.github.io/>.
- [55] J. Morio, J.C. Dolado Perez, and C. et al Vergé. *Estimation of rare event probabilities in complex aerospace and other systems*, chapter Estimation of collision probability between space debris and satellite. Elsevier-Woodhead Publishing. August 2015.
- [56] MOSEK ApS. MOSEK Version 8.0.0.64, April 2017. <https://www.mosek.com/products/mosek>.

- [57] J. Pachares. Note on the distribution of a definite quadratic form. *Ann. Math. Statist.*, 26 :128–131, 1955.
- [58] A. Papoulis and S.U. Pillai. *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [59] R.P. Patera. General Method for Calculating Satellite Collision Probability. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(4) :716–722, July 2001.
- [60] R.P. Patera. Satellite collision probability for nonlinear relative motion. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 26(5) :728–733, 2003.
- [61] R. Pemantle and M.C. Wilson. *Analytic combinatorics in several variables*. Number 140. Cambridge University Press, 2013.
- [62] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3) :969–984, 1993.
- [63] H. Robbins. The distribution of a definite quadratic form. *Ann. Math. Statist.*, 19 :266–270, 1948.
- [64] L.A. Rubel and J.E. Colliander. *Entire and meromorphic functions*. Universitext. Springer, New York, New York, USA, 1996.
- [65] H. Ruben. Probability content of regions under spherical normal distributions iv : the distribution of homogeneous and non-homogeneous quadratic functions of normal variables. *Ann. Math. Statist.*, 33 :542–570, 1962.
- [66] B. Salvy. D-finiteness : Algorithms and applications. In M. Kauers, editor, *ISSAC 2005 : Proceedings of the 18th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Beijing, China, July 24-27, 2005*, pages 2–3. ACM Press, 2005. Abstract for an invited talk.
- [67] B. Salvy and P. Zimmermann. Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(2) :163–177, 1994.
- [68] R.I. Saye. High-order quadrature methods for implicitly defined surfaces and volumes in hyperrectangles. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2) :A993–A1019, 2015.
- [69] V. Schaeffer, S. Laurens, P. Seimandi, and F. Delmas. Collision probability through time integration. In *SpaceOps Conference*, Marseille, France, June 2018.
- [70] H. Schaub and J.L. Junkins. *Analytical mechanics of space systems*. Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [71] S. L. Schilling. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge University Press, 2011.
- [72] P. Seimandi. Méthodes pour le calcul de la probabilité de collision. Technical Report SORO-NT-7202-0302-CNES, CNES, June 2016.
- [73] R. Serra. *Opérations de proximité en orbite : évaluation du risque de collision et calcul de manoeuvres optimales pour l'évitement et le rendez-vous*. PhD thesis, Université de Toulouse, INSA de Toulouse, 135 Avenue de Rangueil, 31400 Toulouse, France, 12 2015.
- [74] R. Serra, D. Arzelier, M.M. Joldes, J.B. Lasserre, A. Rondepierre, and B. Salvy. Fast and accurate computation of orbital collision probability for short-term encounters. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2016.
- [75] B.K. Shah and C.G. Khatri. Distribution of a definite quadratic form for non-central normal variates. *Ann. Math. Statist.*, 32 :883–887, 1961. Corrected–*Ann. Math. Statist.*, **34** (1963),673.

- [76] W.S. Shepperd. Universal Keplerian State Transition Matrix. *Celestial Mechanics*, 35 :129–144, 1985.
- [77] R.P. Stanley. Differentiably finite power series. *European Journal of Combinatorics*, 1(2) :175–188, 1980.
- [78] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 2003.
- [79] N.M. Temme. *Asymptotic methods for integrals*. Series in Analysis. World Scientific, Singapore, Singapore, 2014.
- [80] D.A. Vallado. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space Technology Library. Kluwer Academic Publishers, El Segundo, California, USA, 2001.
- [81] C. Wen, Y. Gao, and H. Shi. Three-dimensional relative reachable domain with initial state uncertainty in gaussian distribution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 233(5) :1555–1570, 2019.
- [82] D.V. Widder. *The Laplace transform*. Princeton mathematical series. Princeton university press, 1946.
- [83] D.V. Widder. *An introduction to transform theory*. Academic Press New York, 1971.
- [84] R. Wong. *Asymptotic approximations of integrals*. SIAM, 2001.
- [85] J. Yeh. *Real Analysis - Theory of Measure and Integration*. World Scientific, Singapore, Singapore, 2nd edition, 2000.
- [86] D. Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32(3) :321–368, 1990.