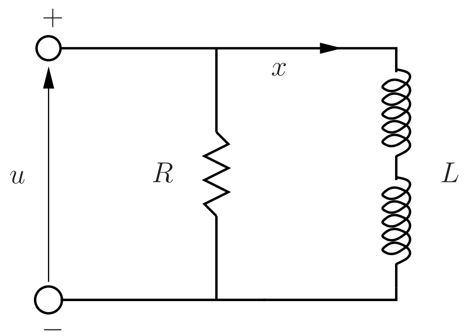
Commande optimale des systèmes dynamiques
BE4
Le régulateur linéaire quadratique

Exercice 1 :

On considère le circuit électrique de la figure 1 où x est le courant dans l'inductance L et u est la tension appliquée. A $t = 0$, le courant vaut x_0 et le but est de déterminer u minimisant le courant tout en ne dépensant pas trop d'énergie dans la conductance R sur un horizon de T secondes. De plus, une valeur finale non nulle du courant doit être pénalisée.



1- Modéliser le problème comme un problème de commande optimale Linéaire Quadratique (LQ).
2- Calculer le gain optimal de ce problème LQ. On utilisera deux méthodes différentes.
3- Montrer que la commande optimale admet un régime permanent stationnaire quand $T \to \infty$ et il n'y a pas de coût terminal.

Exercice 2 :

Soit le modèle du double intégrateur :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

On définit le critère de performance :

$$J(T) = \int_0^T (x'x + u^2)dt + x'(T)x(T)$$

1- Ecrire la commande optimale minimisant $J(T)$ pour le double intégrateur.
2- Calculer la commande optimale pour $J(\infty)$.

Exercice 3 :

Soit le modèle linéarisé d'un hélicoptère CH-47 en déplacement horizontal :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32 \\ -0.14 & 0.44 & -1.3 & -30 \\ 0 & 0.018 & -1.6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix}$$

1- On suppose que le vecteur d'état complet est disponible à la mesure, calculer le régulateur LQ minimisant le critère :

$$J_{LQ} = \int_0^{+\infty} y'y + u'u \; dt$$

2- Calculer la dynamique en boucle fermée et tracer la réponse fréquentielle du gain de boucle obtenu.

Commande optimale des systèmes dynamiques
BE4
Le régulateur linéaire quadratique

Exercice 1 :

1- Le problème de commande optimale peut se mettre sous la forme du problème Linéaire Quadratique (LQ) :

$$\min_u \quad \frac{1}{2}\int_0^T (x^2 + \frac{u^2}{R})dt + \frac{1}{2}\sigma x^2(T)$$
$$\text{sous} \quad \dot{x}(t) = \frac{u(t)}{L} \quad x(0) = x_0$$

2- Méthode directe :
Le problème LQ est un problème à horizon fini dont la commande optimale est donnée par $u^*(t) = -K(t)x^*(t) = -\dfrac{Rp(t)}{L}x^*(t)$ où $p(t)$ est la solution positive de l'équation de Riccati différentielle :

$$-\dot{p}(t) = -\frac{Rp^2}{L^2} + 1 \quad p(T) = \sigma$$

On pose $\tau = L/\sqrt{R}$ et le changement de variables $p(t) = p_1 + \dfrac{1}{z(t)}$ où p_1 est une solution particulière de l'équation différentielle complète. Ici, on choisit $p_1 = \tau$. On obtient ainsi l'équation différentielle :

$$\dot{z}(t) = -\frac{1}{\tau^2} - 2\frac{z(t)}{\tau}$$

L'intégration de cette équation conduit à écrire :

$$z(t) = \frac{\sigma + \tau}{2\tau(\sigma - \tau)}e^{2\frac{(T-t)}{\tau}} - \frac{1}{2\tau}$$

d'où :

$$p(t) = \tau\frac{\sigma + \tau - (\tau - \sigma)e^{\frac{2(t-T)}{\tau}}}{\sigma + \tau + (\tau - \sigma)e^{\frac{2(t-T)}{\tau}}}$$

On en déduit le gain du problème LQ :

$$K(t) = -\sqrt{R}\frac{\sigma + \tau - (\tau - \sigma)e^{\frac{2(t-T)}{\tau}}}{\sigma + \tau + (\tau - \sigma)e^{\frac{2(t-T)}{\tau}}}$$

Méthode par la matrice Hamiltonienne :
On définit la matrice Hamiltonnienne par :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1/\tau^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont $1/\tau$ et $-1/\tau$ avec la matrice des vecteurs propres donnée par :

$$U = \begin{bmatrix} 1/\tau & -1/\tau \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient alors $G = \dfrac{\tau - \sigma}{\tau + \sigma}$ pour enfin obtenir :

$$p(t) = \tau \frac{\sigma + \tau - (\tau - \sigma)e^{\frac{2(t-T)}{\tau}}}{\sigma + \tau + (\tau - \sigma)e^{\frac{2(t-T)}{\tau}}}$$

3- Quand l'horizon d'optimisation tend vers l'infini $T \to \infty$, on obtient facilement que :

$$p(t) = p = \tau = L/\sqrt{R}$$

Ce résultat est à comparer avec la solution de l'équation de Riccati algébrique :

$$-\frac{p^2}{\tau^2} + 1 = 0$$

qui conduit au même résultat puisque le système est commandable. Finalement, le gain de Kalman est donné par :

$$K = -\sqrt{R}$$

Exercice 2 :

Soit le modèle du double intégrateur :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

On définit le critère de performance :

$$J(T) = \int_0^T (x'x + u^2)dt + x'(T)x(T)$$

1- Le régulateur LQ en horizon fini est donné par :

$$\begin{array}{rcl} u^*(t) & = & Kx^*(t) = -B'P(t)x^*(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_2(t) & p_3(t) \end{bmatrix} x^*(t) \\ & = & -\begin{bmatrix} p_2 & p_3 \end{bmatrix} x^*(t) \end{array}$$

où $P(t) \succeq \mathbf{0}$ est solution de l'équation de Riccati différentielle :

$$-\dot{P}(t) = A'P(t) + P(t)A - P(t)BB'P(t) + \mathbf{1}$$

L'équation de Riccati différentielle conduit au système d'équations différentielles du premier ordre non linéaires :

$$\begin{array}{rclrcl} -\dot{p}_1 & = & -p_2^2 + 1 & p_1(T) & = & 1 \\ -\dot{p}_2 & = & -p_3 p_2 + p_1 & p_2(T) & = & 0 \\ -\dot{p}_3 & = & -p_3^2 + 2p_2 + 1 & p_3(T) & = & 1 \end{array}$$

2- Pour le nouveau critère de performance en horizon infini et sans terme de pénalisation terminal, on doit résoudre le système algébrique d'équations de Riccati puisque (A, B) est commandable (régime permanent) et choisir la solution définie positive.

$$\begin{aligned} 0 &= -p_2^2 + 1 \\ 0 &= -p_3 p_2 + p_1 \\ 0 &= -p_3^2 + 2p_2 + 1 \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{3} \\ p_2 &= 1 \\ p_3 &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

et le gain de Kalman devient alors :

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

1- Le gain optimal résolvant le problème LQ est donné par :

$$K = -R^{-1} B' P$$

où P est la solution définie positive de l'équation de Riccati :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C = 0$$

```
>> A=[-0.02 0.005 2.4 -32;-0.14 0.44 -1.3 -30;0 0.018 -1.6 1.2;0 0 1 0];
>> B=[0.14 -0.12;0.36 -8.6;0.35 0.009;0 0];
>> C=[0 1 0 0;0 0 0 57.3];D=zeros(2,2);
>> Q=C'*C;R=eye(2);

>> [Klq,Plq,Ebflq]=lqr(A,B,C'*C,eye(2))

Klq =

   -0.0033    0.0472   14.6421   60.8894
    0.0171   -1.0515    0.2927    3.2469

Plq =

   .70974e-2, -.20998e-2, -.10214e-1, -.78779e-1
  -.20998e-2,     .12231,  .98776e-2,    -.19414
  -.10214e-1,  .98776e-2,     41.828,     174.20
  -.78779e-1,    -.19414,     174.20,     1120.9

Ebflq =

  -8.6168
```

```
   -3.3643 + 2.9742i
   -3.3643 - 2.9742i
   -0.0196
```

2- Calcul de la dynamique en boucle fermée et tracé :

```
>> Abolq=A;
>> Bbolq=B;
>> Cbolq=-Klq;
>> Dbolq=zeros(2,2);
>> Lbolq=ss(Abolq,Bbolq,Cbolq,Dbolq);
>> figure(1)
>> sigma(Lbolq);
>> grid
```